



مبادئ التحليل الرياضي

تأليف

أ. ج. مادوكس

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مبادئ التحليل الرياضي

تأليف
أ. ج. مادوكس

ترجمة
الدكتور وليد ديب

راجع لغويًا
الدكتور أحمد سعيدان

راجع علميًا
الدكتور محمد عرفات النسيه

منشورات مجمع اللغة العربية الأردني
١٤٠٤ هـ - ١٩٨٤ م

Introductory Mathematical Analysis

I. J. Maddox
B.A., Ph.D., D.Sc.

Professor of Pure Mathematics
in the Queen's University of Belfast

First published 1977

Published by
Adam Hilger Ltd.
Techno House, Redcliffe Way, Bristol BS1 6NX

Printed in Great Britain by
J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol, BS3 2NT

مشتورات .
مجمع اللغة العربية الأردني
ضمن مشروع تعريب التعليم العالي الجامعي

الطبعة الأولى
عمان - الأردن
١٩٨٤ هـ - ١٩٨٤ م

حقوق الطبع والنشر محفوظة لمجمع اللغة العربية الأردني
ويمنع تصوير الكتاب أو إعادة طبعه دون إذن من المجمع

المحتويات

مقدمة المؤلف

مقدمة المترجم

٧ الفصل الأول : المنطق ، المجموعات ، البنى الجبرية
٩ ١ - المنطق
١٩ ٢ - المجموعات والاقترانات
٤٠ ٣ - الزمر ، الحلقات ، الحقول ، الفضاءات الخطية ، الجبريات
٦٣ الفصل الثاني : أنظمة الأعداد
٦٥ ١ - الأعداد الطبيعية
٧٣ ٢ - الأعداد الصحيحة
٨٠ ٣ - الأعداد النسبية
٩٢ ٤ - متاليات الأعداد النسبية
١١١ ٥ - بناء كانتور للأعداد الحقيقية

١٢٢	٦ - الأعداد المركبة
١٣٣	٧ - المتباينات
١٤٧	الفصل الثالث : مجموعات الأعداد
١٤٩	١ - مجموعات محصورة من الأعداد الحقيقية
١٦٣	٢ - تبولوجية الأعداد الحقيقية
١٧٧	٣ - المجموعات المتراسة
١٨١	٤ - المجموعات القابلة للعد
١٨٧	٥ - مجموعات الأعداد المركبة
١٩٥	الفصل الرابع : للمتاليات
١٩٧	١ - خاصية التهام في \mathbb{C} وجبر التقارب
٢١٠	٢ - النهايات العليا والسفلى
٢١٦	٣ - المتتاليات الجزئية ونقط النهاية
٢٢١	٤ - متتاليات خاصة
٢٢٥	٥ - العلاقات التكرارية
٢٣٣	الفصل الخامس : المتسلسلات
٢٣٥	١ - التقارب والتقارب المطلق
٢٥٠	٢ - اختبارات التقارب
٢٦٥	٣ - ضرب المتسلسلات
٢٧٧	الفصل السادس : النهايات والاتصال
٢٧٩	١ - نهاية الاقتران عند نقطة
٢٩٣	٢ - الاقترانات الوتيرية
٢٩٧	٣ - الاقترانات المتصلة
٣١٩	٤ - الاتصال المنتظم
٣٢٧	الفصل السابع : الاقترانات القابلة للتفاضل

٣٢٩	١ - مشتقة الاقتران عند نقطة
٣٤٩	٢ - القيم العظمى والقيم الصغرى
٣٥٧	٣ - نظريات القيمة المتوسطة
٣٧٢	٤ - نظرية تايلور
٣٧٨	٥ - متسلسلة تايلور
٣٨٥	٦ - التقريب
٣٩٧	الفصل الثامن : متسلسلات القوى
٣٩٨	١ - مقدمة
٤١٥	٢ - المتفاضل
٤١٣	٣ - نظرية النهاية لأبل
٤٢٣	الفصل التاسع : الاقترانات الابتدائية
٤٢٥	١ - الاقتران الأسى
٤٣٧	٢ - الاقترانات المثلثية
٤٥٢	٣ - اقترانات ابتدائية اخرى
٤٥٦	٤ - معكوسات الاقترانات الابتدائية والقوى العامة
٤٧١	الفصل العاشر : التكامل
٤٧٣	١ - تكامل نيوتن وتكامل ريمان
٤٨٩	٢ - خواص التكامل
٤٩٦	٣ - التكامل كاقتران لنهايته العليا
٥١٣	٤ - التكامل اللانهائي والتكامل المعتل
٥٢٥	٥ - تطبيقات على التكامل
٥٤٧	الفصل الحادي عشر : اقترانات بمتغيرين حقيقيين
٥٧٧	ارشادات لحل بعض التمارين
٦٢١	قاموس المصطلحات

مقدمة المؤلف

قمت بتأليف هذا الكتاب وأنا مؤمن بأن أي مساق أولي في مادة التحليل الرياضي يجب أن يحتوي على بنى رياضية بحتة وعرض للطرق الحسابية بالإضافة الى التحليل التقليدي . والتحليل هو، بعبارة تقريبية، دراسة لعمليات النهايات . وهذه الدراسة تبحث في تقارب المتسلسلات اللانهائية، والاتصال، والتفاضل والتكامل ثم يأتي بعد ذلك فضاءات الاقترانات والتحليل الدالي . ان تطبيقات التحليل في الفيزياء والهندسة هامة جداً وأن تاريخ الموضوع يمتد على مدى ٢٠٠٠ عام ويحفل باسماء رياضيين عظماء مثل : ارخميدس ونيوتن، وليبتس، اويلر وكوشي، آبل، وفايرشتراس وكانتور، ديديكند وريز، وهلمبرت ويناخ . وان العديد من مساقات التحليل الابتدائي التي تدرس عادة في السنة الاولى في الجامعات لا تعطي الاختارات من اسهل المواضيع في التحليل كما انحدرت التنا من قبل القرن العشرين على يد كوشي وفايرشتراس . وان من سوء الحظ أن هذا الاسلوب التقليدي البحث

يعرض عادة بطريقة مقتضبة تجعل الطلاب يظنون ان التحليل هو تفاضل وتكامل شديد الصعوبة. فلكي اتفادى هذا الوضع حاولت ان اعرض ما يكفي من الحسابات العددية السهلة بالاضافة الى اسس التحليل التقليدي من أجل توضيح النظرية العامة وجعلها أكثر حيوية. وان الحاسبات الميكانيكية واجهزة الحاسب الالكتروني قد سهلت العمليات الحسابية في التحليل العددي، ولكن هناك خطر كبير في ان يظن المبتديء ان بإمكان الحاسب الالكتروني حل اي مسألة.

فمن الضروري ان نبين، ان امكن، ان هناك حلاً (وهنا تكمن اهمية التحليل التقليدي). ثم نحتاج الى طريقة ما تعطينا متتالية من التقريبات تتقارب نحو الحل (وهنا نحتاج الى التحليل العددي).

اما بالنسبة للبنى الرياضية البحتة، وهذه ظاهرة من ظواهر القرن العشرين، فقد حاولت أن أتحدث عن أهميتها في التحليل من حيث شموليتها. لقد حان الوقت حتى في التحليل المبدي لعرض الافكار الاساسية مثل الزمر، والفضاء الخطي، والمجموعات المفتوحة، والاقتراانات التبولوجية.

ويعد ان يدرس الطالب هذه الافكار يصبح مستعداً لدراسة مواضيع متقدمة مثل التحليل الدالي والتبولوجيا، ويكون لديه الخلفية المناسبة من المصطلحات والافكار الرياضية. وضع هذا الكتاب بصورة اساسية لطلبة الجامعات والمعاهد التقنية، حيث يدرس في السنة الاولى او الثانية لطلبة يدرسون الرياضيات أو الفيزياء أو الهندسة. ولكن يمكن لطلبة المدارس الذين درسوا التفاضل والتكامل ان يقرأوا جزءاً كبيراً منه. وقد حاولت ان اعطي براهين مفصلة لكل نتيجة في هذا الكتاب، وأعطيت امثلة توضيحية عديدة وعدداً كبيراً من التمارين. كما وضعت في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض التمارين. ونأمل بان يساعد هذا الطالب الذي يدرس بدون مشرف.

ولجعل فائدة الكتاب أعم، عاجلت، وبصورة مفصلة، الاقتراانات الأولية ومواضيع مثل مبدأ النقطة الثابتة، وتقريب نيوتن لجذور المعادلات. وان نظرة الى محتويات الكتاب تبين انه ليس موسوعياً. ولا يمكن لأى كتاب في موضوع واسع مثل التحليل ان يجوي كل شيء. وما

نأمله انه عند انتهاء الطالب من هذا الكتاب ان يكون عنده اساس قوي للبحث في العديد من جوانب واحد من روائع مبتكرات العقل الانساني .
(يتوجه المؤلف بالشكر الى من ساعده في اعداد الكتاب وطباعته).

أ، ج، مانوكس
جامعة كوينز في بلفاست ١٩٧٥ .

مقدمة المترجم

ان الهدف من ترجمة هذا الكتاب هو المساهمة في نقل العلم والمعرفة الى اللغة العربية. والحديث عن ترجمة كتب العلوم يطرح دائماً مشكلة الرموز. هل نستعمل رموزاً غير عربية ام لا. هناك من يقول اللغة العربية لغة واسعة ويمكن ان توفر لنا ما نحتاج من رموز. وهناك من يقول يجب الابقاء على الرموز المستخدمة دولياً لتسهيل على الطالب العربي متابعة دراسته. في ترجمة هذا الكتاب فضلت استعمال الرموز العربية بشكل عام. ولكني اقيت على استعمال الرموز الاغريقية δ ϵ في تعريف الاتصال والنهايات لا عجزاً في اللغة العربية بل احتراماً لهذين التعريفين اللذين هما من اسس التحليل. كما استخدمت λ μ ν θ . . . في بعض الحالات التحليلية الاخرى للابقاء على الطابع المتعارف عليه لبعض التعاريف.

اما من ناحية المواضيع التي يغطيها الكتاب فقد استعرضها المؤلف في مقدمته وأحب ان اضيف الى قوله ان هذا الكتاب لا يحوي كل شيء في التحليل ولكنه، ككتاب في مبادئ

التحليل، يحوي أكثر من أي كتاب آخر من مستواه، واعتقد انه اختيار موفق لمجمع اللغة العربية.

د. وليد ديب
الجامعة الاردنية

افصل الاول

المنطق، المجموعات، البنى الجبرية

١ - المنطق

للمنطق أهمية في موضوع التحليل لا تقل عن أهميته في مواضيع الرياضيات الأخرى. ولكن لا مجال لأن نعرض بالتفصيل جميع الأفكار المنطقية التي قد نحتاج إليها في هذا الكتاب. ولكن سوف نحاول عرض بعض الأفكار التي تستخدم عادة في براهين نظريات في التحليل، وتوضيحها بأمثلة مبسطة.

ولكي تتمكن من إعطاء أمثلة ذات أهمية سنفترض أن القارئ لم يلم بمبادئ المجموعات المذكورة أدناه. وهذه المجموعات تتخلل علم الرياضيات بأكمله، وسوف نستعرضها بالتفصيل في فصول متقدمة.

سوف نستعمل الرموز \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} لتشير إلى المجموعات التالية:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ مجموعة الاعداد الطبيعية،
 $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة،
 $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ مجموعة الاعداد النسبية،
 \mathbb{R} مجموعة الاعداد الحقيقية،
 \mathbb{C} مجموعة الاعداد المركبة .

بالنسبة للمجموعة \mathbb{Q} فان الخط الراسي بعد a/b يقرأ «حيث» و « \in » يقرأ «ينتمي إلى» أو «عنصري». وتسمى \mathbb{N} ايضاً مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة. و «Zahlen» هي كلمة المانية تعني «اعداد صحيحة»، ولهذا استخدم الحرف \mathbb{Z} للإشارة الى مجموعة هذه الاعداد.

والاعداد النسبية تدعى ايضاً باللغة الانجليزية «Quotients» ولهذا استخدم الحرف \mathbb{Q} للإشارة اليها. اما الحرف \mathbb{R} فمن كلمة «Real» (حقيقي) وحرف \mathbb{C} من كلمة «Complex» (مركب).

ومعظم الرياضيين يستعملون هذه الرموز، والذين لا يستخدمونها ربما كان عليهم ان يستخدموها، ولكن لنكن متساهلين.

جاوز نفسه قال مرة: تعنى الرياضيات بالافكار وليس بالرموز.

ومن الافكار الرئيسية في المنطق فكرة «القضية»: نعرف القضية بانها عبارة خبرية ذات معنى يمكن ان يكون صواباً او خطأ ولكن لا يمكن ان يكون صواباً وخطأ في آن واحد.

وفيما يلي مثال لقضيتين

السماء غطر (١)

الشوارع مبللة . . . (٢)

ومن مثل هاتين العبارتين البسيطتين نستطيع تكوين عبارات اخرى باستخدام كلمات واحرف مثل «أو»، «ليس»، «أو» . . . الخ.

مثال

السماء غطر والشوارع مبللة.

ونستعمل غالباً الأحرف ف، ن، ر لتشير إلى القضايا.

وأهم العبارات التي يمكن تكوينها من العبارتين ف، ن هي:

النفي: ليس ف، ورمزها ~ ف

الوصل: ف و ن، ورمزها ف٨ ن

الفصل: ف أو ن، ورمزها ف٧ ن

التضمن: ف تتضمن ن، ورمزها ف ← ن

التكافؤ: ف إذا وفقط إذا ن، ورمزها ف ↔ ن

والرمز ف ↔ ن هو حسب التعريف (ف ← ن) ٨ (ن ← ف)

إن ف إذا وفقط إذا ن تعني أن ف تتضمن ن وكذلك ن تتضمن ف.

وهناك طريقتان أخريان نعبر بهما عن ف ↔ ن.

أ) ف تكافئ ن

ب) ف شرط ضروري وكاف لتحقيق ن

وهذه طرق أخرى شائعة لقولنا «ف تتضمن ن»:

أ) إذا كان ف فإن ن

ب) ف فقط إذا ن

ج) ف شرط كافٍ لتحقيق ن

د) ن شرط ضروري لتحقيق ف

المثال ١:

لتكن ف رمزاً للعبارة (١) أعلاه، ن رمزاً للعبارة (٢)، فيكون:

~ ن، ف٨ ن، ف ↔ ن تعني على الترتيب: الشوارع ليست مبللة، السماء تمطر والشوارع مبللة، السماء تمطر إذا وفقط إذا كانت الشوارع مبللة.

إننا هنا لا نتحدث عن صواب أو خطأ العبارات الواردة في مثال ١، وإنما نوضح معنى الرموز فقط.

ونظمئفن الفارفة ان الفلفلف الرفاصف لا ففم كففراً بفلف الشوارف؁ والسبب الوففف
لذكرف عباراف كففك الوارفة فف الفال ١ هواففا ابسط الامفلة الفف فوفف افكار الرففسة دون
اسفءام الرفاففاء.

ومن فرففنا للعبارة ف؁ ففف ان فكون بالامكان وصففا بكلمة صواب أو فطأ؁ لذلك
سفسفمف الفرف ص والفرف ف لفشر الف قفمة الصواب فف العبارة.
ونففر فءول الصواب الفلف فرففأ لقم صواب العباف المذكورة :

ف	ن	ف؄ن	ف؄ف	ف؄ن	ف؄ف
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	خ	خ	ص

(٣)

المفال ٢ :

باسفءام الفءول (٣) فكون فءول الصواب للعبارة (ف؄ف؄ن) هو :

ف	ف؄ف	ن	ف؄ف؄ن
ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص

(٤)

لاحظ ان جدول الصواب لـ (~ ف) ان هو نفس جدول الصواب لـ ف ← ن
بمعنى ان لهاتين العبارتين نفس العمودين الأخيرين . في هذه الحالة نقول ان العبارتين
(~ ف) و (ف ← ن) متكافئتان منطقياً .

ومن الممكن ان نعلل اعطاء قيم الصواب المذكورة في (٣) ، لكن تعليل اعطاء قيم
صواب لعبارة التضمن (الشرط) غير مقتنع . فمن الافضل اتخاذ جدول الصواب بمثابة تعريف
لها ، مقبول في كل مكان .

ومن المهم ان نذكر ان العبارة التي قيم صوابها دائماً ص تدعى تحصيل حاصل . اما
العبارة التي قيم صوابها خ دائماً فانها تدعى تناقضاً .

المثال ٣ :

باستخدام (٣) فان جدول صواب ف و (~ ف) هو

ف	~ ف	ف و (~ ف)
ص	خ	ص
خ	ص	ص

لذلك فان ف و (~ ف) هي تحصيل حاصل .

وبالمثل نرى ان ف و (~ ف) هي تناقض .

اليك مثلاً اقل وضوحاً من هذا ، وان يكن سهلاً : انه كتابة جدول الصواب لاثبات ان

$$(٥) \dots [(ف \leftarrow ن) \wedge (ن \leftarrow ر)] \leftarrow (ف \leftarrow ر)$$

هي أيضاً تحصيل حاصل . وتدعى العبارة (٥) قانون القياس المنطقي ونستخدمه دائماً في
الرياضيات ، وهو اذا عبرنا عنه بالكلمات يبدو من الواضح بحيث ان معظم الناس يستخدمونه
وهم لا يعلمون .

طرق البرهان

هناك ثلاث طرق رئيسية للبرهان نجدها في التحليل

ب_١: البرهان المباشر

ب_٢: برهان المعاكس الإيجابي

ب_٣: البرهان بالتناقض.

المقصود بـ ب_١ انه اذا اردنا اثبات ف ← نبدأ بالعبارة ف ثم نتوصل الى استنتاجات معتمدين على معرفتنا بالوضع حتى نتوصل الى ن.

المثال ٤ :

لنبرهن باستخدام البرهان المباشر على انه اذا كان ن عدداً طبيعياً زوجياً فان ن^٢ هو عدد

زوجي

ن عدد زوجي ← ن = ٢أ حيث أ عدد طبيعي

$$\leftarrow \text{ن}^2 = 2^2 \text{أ}^2 = 2(2\text{أ}^2)$$

← ن^٢ عدد زوجي.

لا شيء أبسط من هذا، وبشكل عام يكون البرهان المباشر هو البرهان الطبيعي.

ولكن لسوء الحظ فان معظم النظريات الهامة في التحليل لا يمكن اثباتها بطريقة

مباشرة. وعلينا استخدام الطرق غير المباشرة ب_٢، ب_٣.

نذكر الآن التعاريف التالية:

برهان المعاكس الإيجابي:

هو برهانٌ يدل أن ثبت فيه ان ف ← ن (وهو ما نريد اثباته) فاننا نثبت ان ~ ن ←

~ ف. تدعى العبارة ~ ن ← ~ ف المعاكس الإيجابي للعبارة ف ← ن.

البرهان بالتناقض

في هذا البرهان، بدل أن نثبت أن $F \leftarrow N$ (وهو ما نريد إثباته) فأننا نثبت أن $F \wedge (\sim N) \leftarrow$ أي عبارة خاطئة ر.

لا بد أن هذين البرهاتين يبدوان غريبين بالنسبة للمبتديء ولكن معظم كتب التحليل تستخدمهما كثيراً، وعادة دون ذكر ذلك. وتبين النظرية التالية صحة استعمال B_p ، B_p حيث تثبت أن كلاً منهما مكافئاً منطقياً للبرهان المباشر $F \leftarrow N$.

النظرية ١ :

(أ) $\sim N \leftarrow \sim F$ تكافئ منطقياً $F \leftarrow N$

(ب) لنفرض أن R هي أي عبارة خاطئة فإن

$F \wedge (\sim N) \leftarrow R$ تكافئ منطقياً $F \leftarrow N$

البرهان : علينا أن نبين أن جدول الصواب للعبارتين $\sim N \leftarrow \sim F$ و $F \wedge (\sim N) \leftarrow R$

هما نفس جدول الصواب للعبارة $F \leftarrow N$

باستخدام التعريف ٣ نجد أن

ف	ن	$\sim N$	$\sim F$	$\sim N \leftarrow \sim F$	$F \wedge (\sim N)$	ر	$F \wedge (\sim N) \leftarrow R$
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص

فالعمودان الخامس والثامن من هذا الجدول هما نفس العمود الاخير في جدول ٣. وهذا يثبت النظرية.

المثال ٥ :

سنستخدم المعاكس الايجابي لاثبات انه اذا كان م عدداً طبيعياً فان م زوجي تتضمن م زوجي (ولنقل ف ← ن).

لاحظ اننا اثبتنا ان ن ← ف في المثال ٤. وبالعكس ان العبارة ن ← ف تختلف عن العبارة ف ← ن. وليحذر الطالب كل الحذر ان يظن انه اذا كانت ن ← ف فان ف ← ن. الآن (ن ~ ن) تعني ان م ليست عدداً زوجياً اي انها عدد فردي. إذن $م = ١ - ٢$ ، حيث أ عدد طبيعي، ومنه نستنتج ان $م = ٢ = ١٢ - (٢ - ٢) + ١$ ، إذن م عدد فردي، ومنه م عدد غير زوجي (وهي ~ ف). لقد اثبتنا ان ~ ن ← ف. وباستخدام النظرية ١ - (أ) نجد ان ف ← ن.

المثال ٦ :

في النظرية ٧ الهامة والواردة في الفصل السادس نستخدم البرهان بالتناقض. في تلك النظرية علينا ان نثبت ان الاتصال على مجموعة معينة (لنقل ف) تتضمن الحصر (لنقل ن). لا حاجة لك هنا بمعرفة معنى هذه الكلمات فما يهمنا هو فقط تركيب البرهان. في الحقيقة فاننا نثبت في النظرية ٧ أن

$$ف \wedge (ن \sim ن) \rightarrow ر، \text{ حيث ر هي العبارة الحاطة } ١ \geq ٠$$

وفكرة البرهان هي كما يلي : اذا كانت هناك خاصية الاتصال دون الحصر امكننا ان نستنتج ان $١ \geq ٠$. وهذا التناقض يثبت ان الاتصال يتضمن الحصر.

السور الكلي والسور الجزئي

هذان اسمان في المنطق يبدوان خيفين الا انهما شيان بسيطان ومفيدان. فالرمز \forall يقرأ «لكل» ويسمى السور الكلي والرمز \exists يقرأ «يوجد» ويسمى السور الجزئي.

ولن نستخدم هذين الرمزين في غير هذا البند لاننا نفضل استخدام الكلمات التي تؤدي معناهما. ولكن قد يواجه الطالب هذه الرموز عند دراسته المنطق والرياضيات.

المثال ٧:

يمكننا ان نؤكد ان العبارات التالية صائبة:

$$(أ) \quad \forall x \in R, x \leq y.$$

$$(ب) \quad E \in R \mid x = 16.$$

في (أ) نعبّر عن نظرية عامة لجميع الاعداد الحقيقية، وفي (ب) نلاحظ ان $x = 16$ تحقق الشرط، وكذلك $x = 2$. وعندما نقول «يوجد» نعي بالضبط انه «يوجد على الاقل واحد»

$$(ج) \quad \forall x \in R, x < 0 \text{ خاطئة لان } x = 0 \text{ لا تحقق } x < 0.$$

انه لامرهم جداً ان يدرك الطالب الفرق بين السورين «لكل» و«يوجد» وان لا يستبدل احدهما بالآخر في البراهين أو التعاريف.

وقد يلزم نفي عبارة تحتوي على \forall و E . والقاعدة العامة انه عند نفي عبارة تحتوي على \forall و E فاننا نستبدل \forall ب E و E ب \forall ، ثم نقوم بنفي اي عبارة تتبع السورين. مثالا على ذلك، نفي $E \in A$. ب \forall جـ بحيث ان $f(A, b, c)$ هو \forall, A, b, c ب E جـ بحيث ان $\sim f(A, b, c)$.

المثال ٨:

فيما يلي تعريف لقولنا ان المتتالية (s_n) تقترب من الصفر. (انظر الفصل ٢).

$$(٦) \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \text{ تحقق } |s_n| < \epsilon, \forall n > N.$$

في هذا التعريف نستعمل الحرف الاغريقي ϵ (ايسلون) ليشير الى عدد موجب.

ويجب ان لا يخلط بينه وبين \exists الذي يعني «يتبعي الى».

نفي (٦): اي ان (s_n) لا تقترب من الصفر هو:

$$(٧) \dots E < \epsilon, \forall n, E < n \text{ تحقق } |s_n| \leq \epsilon.$$

وبالكلمات فإن (٧) تقول: يوجد عدد موجب ϵ حيث أنه لكل n يوجد $n < n$ يحقق $|s_n| \leq \epsilon$.

تمارين ١ - ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين)

١ - اكتب جدول الصواب لـ $f \leftrightarrow n$

٢ - اذكر اي العبارات التالية تحصيل حاصل او تناقض أو غير ذلك:

(أ) $f \leftrightarrow (f \vee n)$

(ب) $f \leftrightarrow \sim f$

(ج) $[f \wedge (f \leftrightarrow n)] \leftrightarrow n$

(د) $(\sim f \leftrightarrow f) \wedge (f \leftrightarrow \sim f)$

٣ - استخدم جدول الصواب لاثبات ان قانون القياس المنطقي هو تحصيل حاصل.

٤ - استخدم جداول الصواب لاثبات التكافؤ المنطقي ت لكل من

(أ) $\sim (f \wedge n) \quad \text{ت} \quad (\sim f) \vee (\sim n)$

(ب) $\sim (f \vee n) \quad \text{ت} \quad (\sim f) \wedge (\sim n)$

(ج) $\sim (f \leftrightarrow n) \quad \text{ت} \quad f \leftrightarrow \sim n$

(د) $f \wedge (n \vee \sim n) \quad \text{ت} \quad (f \wedge n) \vee (f \wedge \sim n)$

٥ - اذا تفادى فريق أ الاصابات الجسدية سيفوز بالبطولة. تفادى الفريق الاصابات او

الحكم متحيز. إذا كان الحكم متحيزاً يثور الجمهور لكن الجمهور هاديء.

اذا علمت ان كل هذه العبارات صائبة، فهل سيفوز فريق أ بالبطولة؟

٦ - لنفرض ان $s \exists R$ ولنفرض ان f ترمز الى $s = ١$ ون الى $s = ٢$ ، بين صواب

أو خطأ ما يلي :

(أ) $f \leftarrow n$

(ب) $n \leftarrow f$

٧ - اكتب كلاً من العبارات التالية على شكل $f \leftarrow n$ أو $n \leftarrow f$. في كل حالة بين

صواب العبارة أو خطأها :

(أ) يكون $3^x + 4^y = 7$ إذا كانت $x = 1$ حيث $x \in R$

(ب) $x = 1$ شرط ضروري وكاف لتحقيق $3^x + 4^y = 7$ حيث $x \in R$.

(ج) كل عدد صحيح أكبر من ٢ يكون عدداً أولياً فقط إذا كان فردياً.

(د) إذا كان العدد الصحيح من مضاعفات ٤ ، فذلك شرط كاف لأن يكون هذا العدد زوجياً.

(هـ) $\exists x \in \mathbb{C}$ و $x = 1$ إذا وفقط إذا كان $x \in \mathbb{C}$ و $x = 1$.

٨ - لكل $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن n^3 زوجي تتضمن n زوجي.

٩ - انف ما يلي : إذا كان المحاضر كسولاً فإن بعض الطلبة لن ينهوا واجباتهم المدرسية.

٢ - المجموعات والاقترانات

ترد نظرية المجموعات وفكرة الاقترانات (وتدعى ايضاً الدوال) في معظم كتب الرياضيات المدرسية في وقتنا الحاضر. لذلك ستقدم عرضاً موجزاً لها (ولكنه كافٍ لغايات التحليل) يفسر الرموز ويقدم التعاريف وبعض النتائج المفيدة المجموعة هي أي جمع من الأشياء المحددة والمميزة بحيث ينظر اليها كوحدة. هذا ما قاله الرياضي الألماني الشهير ج كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨) مبتكر نظرية المجموعات. وستأخذ بتعريفه هذا مع ان علماء المنطق الرياضي يعتبرون هذا التعريف غير دقيق.

والاشياء المذكورة في التعريف تسمى عناصر أو أعضاء المجموعة وسنرمز للمجموعات بحروف مذبذبة مثل M ، N ، الخ.
 اذا كانت M مجموعة فان $a \in M$ تعني ان a عنصر في M . اذا كانت b ليست عنصراً في M فاننا نكتب $b \notin M$ ونقول ان b لا تنتمي الى M .

المثال ٩:

اذا كانت M مجموعة عناصرها هي الاحرف A ، B ، C نكتب $M = \{A, B, C\}$.
 ومن المتعارف عليه استخدام هذا النوع من الاقواس لتضم عناصر المجموعة. وهذه امثلة على الرموز التي نستعملها: $B \in M$ ، $D \notin M$ وكذلك $Y \notin M$.

المثال ١٠:

يمكن ان تحتوي المجموعة على عناصر متباعدة مثل $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$.
 ولكن مجموعات كهذه لا تظهر في التحليل.

المثال ١١:

من الخطأ ان نقول ان $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ هي مجموعة لأن تعريف كانتور ينص على ان العناصر يجب ان تكون مميزة. لذلك فان اي عنصر في المجموعة يظهر مرة واحدة فقط.

المثال ١٢:

تبقى المجموعة كما هي اذا كتبت عناصرها بترتيب مختلف، مثال على ذلك $\{2, 4, 1, 3\}$ هي نفس المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$. ومن الافضل بالطبع ترتيب العناصر بطريقة طبيعية ومنظمة.

وقد يستحيل على الطالب كتابة جميع عناصر المجموعة، فمثلاً لا يمكن كتابة جميع عناصر مجموعة الاعداد الطبيعية N وهي من أبسط المجموعات في الرياضيات. ففي هذه الحالة نكتب

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ حيث استخدمت الأقواس لتحتوي على العناصر واستخدمت النقاط الثلاث... لتعني ان قانون تكوين باقي العناصر معروف وستحدث أكثر عن N في الفصل الثاني.

ونقرأ الصيغة $\{s \mid N \ni s \wedge s < 2\}$: «مجموعة جميع العناصر s التي تنتمي الى N بحيث ان $s < 2$ » ويقرأ الخط الرأسي بعد N «حيث ان». وهناك طريقة أخرى لكتابة $\{s \mid N \ni s \wedge s < 2\}$ هي $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

مثال آخر $\{s \mid R \ni s \wedge s = 1\} = \{1\}$ سنعرف الآن الفكرة الأساسية للمجموعة الجزئية، والاتحاد والتقاطع، وشممة المجموعة، مع بعض الأفكار المتعلقة بها.

المجموعات الجزئية

إذا كانت S ، T مجموعتين فإننا نعرف S بأنها مجموعة جزئية من T إذا وفقط إذا كان كل عنصر في S هو أيضاً عنصر في T . وإذا كانت S مجموعة جزئية من T فإننا نكتب $S \subset T$. كذلك إذا كانت $S \subset T$ فإننا نقول S محتواة في T أو أن S محتوي على T .

المجموعات المتساوية

نعرف $S = T$ إذا وفقط إذا كانت $S \subset T$ و $T \subset S$ وكذلك $S \subset S$ ، وهذا يعني ان S و S هما نفس العناصر.

المجموعات الجزئية فعلاً:

نقول ان S مجموعة جزئية فعلاً من T إذا وفقط إذا كانت $S \subset T$ و لكن $S \neq T$ ونكتب $S \subsetneq T$ فعلاً.

المجموعة الخالية

إذا كانت S مجموعة فإن $\emptyset = \{x \mid x \in S \wedge x \neq x\}$ هي مجموعة جزئية من S ، وندعو \emptyset المجموعة الخالية. المجموعة \emptyset لا تحتوي على عناصر. وهناك خاصية هامة جداً للمجموعة الخالية \emptyset وهي انها المجموعة الوحيدة المحتواة في كل مجموعة أخرى.

لأثبت ذلك لنأخذ أي مجموعة S ولنفرض ان \emptyset ليست مجموعة جزئية من S . اذن يوجد عنصر $s \in S$ وهذا يناقض حقيقة ان \emptyset لا تحتوي على عناصر. ومنه نستنتج ان $\emptyset \subseteq S$ لأي مجموعة S . $s \in S \implies s \in \emptyset$ يعني ان $s \in \emptyset$ ولكن $s \notin \emptyset$.
لثبت ان \emptyset وحيدة. لنفرض ان Ψ مجموعة أخرى محتواة في كل مجموعة أخرى. اذن $\Psi \subseteq \emptyset$. ولكننا نعرف ان $\emptyset \subseteq \Psi$. لهذا من تعريف المجموعات المتساوية نستنتج ان $\emptyset = \Psi$ أي ان \emptyset وحيدة بالخاصية المذكورة.

المثال ١٣:

المجموعة $\{1, 3, 8\}$ ومجموعة الأعداد الفردية $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ هما مجموعتان جزئيتان من N .
لذلك نستطيع كتابة $\{1, 3, 8\} \subseteq N$ نعلماً.

اتحاد المجموعات

اتحاد المجموعتين S ، T هو
 $U = \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$
وإذا كانت S عائلة من المجموعات S_i فإننا نعرف
 $U = \{x \mid \exists i \{x \in S_i\}\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \dots, 1, 2, 3, 4, \dots \} \text{ فان} \\ \mathcal{C}/\mathcal{C} &= \{ \dots, 18, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 \} \\ \mathcal{C}/\mathcal{C} &= \{ \dots, 7, 5, 3, 1 \} \end{aligned}$$

النظرية ٢ (قوانين ديمورغان)

لنفرض ان \mathcal{C} مجموعة وان $\{ \mathcal{C}_R \}$ عائلة من المجموعات الجزئية من \mathcal{C} ، حيث R تنتمي الى مجموعة عدّ، \mathcal{C} ، فاننا بكتابة $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R$ لتعني $\mathcal{C} \cap \{ \mathcal{C}_R \mid \mathcal{C}_R \supseteq \mathcal{C} \}$ الخ نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R) &= \mathcal{C}_R \cap \mathcal{C} \text{ وكذلك} \\ (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R) &= \mathcal{C}_R \cap \mathcal{C} \end{aligned}$$

البرهان: سنبرهن النتيجة الاولى فقط.

اذا كانت $\mathcal{C} \supseteq (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R)$ فان $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_R$.
وهذا يعني ان \mathcal{C} لا ينتمي الى اي من \mathcal{C}_R . اذن $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_R$ لكل $R \supseteq \mathcal{C}$ ، وهذا يعني ان $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_R$. وهكذا نكون قد اثبتنا ان $(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R) \supseteq (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R)$ ومن الواضح انه يمكن الرجوع في البرهان عكسياً لاثبات ان $(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R) \supseteq (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R)$. وهذا يثبت النتيجة الاولى.

النظرية ٣:

لنكن \mathcal{C} اي مجموعة و $\{ \mathcal{C}_R \}$ عائلة من المجموعات حيث تنتمي الى مجموعة العدّ

بكتابة $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_R$ لتعني $\mathcal{C} \cap \{ \mathcal{C}_R \mid \mathcal{C}_R \supseteq \mathcal{C} \}$ الخ نحصل على

الواضح انه لم يصل الى ب هذه المرة. لذلك فان تساوي المجموعتين $\{2, 3\}$ و $\{3, 2\}$ لا يفسر الوضع بدرجة مرضية.

من الطبيعي ان تطرح فكرة الأزواج المرتبة (س، ص) حيث يكون ترتيب س، ص هاماً. هنا نستخدم اقواساً دائرية بدل المتعرجة للدلالة على الترتيب.

وفي المثال السابق يمكن للرقم الأول ان يدل على عدد الخطوات باتجاه الشرق، والرقم الثاني على عدد الخطوات باتجاه الشمال. لذلك فان $(2, 3)$ تختلف عن $(3, 2)$.

سنذكر الآن التعريف الدقيق للأزواج المرتبة ولن نمن الاشياء المرتبة.

الأزواج المرتبة - التوحيات المرتبة

لنفرض ان س، ص شيان. تعرف (س، ص) كما يلي: (س، ص) = $\{\{س\}\}$ ، $\{س، ص\}$.

وتسمى هذه المجموعة الزوج المرتب (س، ص).

من التعريف يمكننا ان نثبت ان

(س، ص) = (أ، ب) اذا وفقط اذا كان أ = س، ب = ص. وبعبارة أعم يمكن تعريف التوحيات المرتبة (س₁، ص₁)، (س₂، ص₂)، ...، (س_n، ص_n) بأن الخاصية (س₁، ص₁) = (س₂، ص₂)، ...، (س_n، ص_n) تصح اذا وفقط اذا كانت س₁ = س₂، ص₁ = ص₂، ...، س_n = ص_n.

المثال ١٦:

العبارة (س، ص) = $\{\{س\}\}$ ، (س، ص) تعني $\{\{س\}\}$ لاننا لا نسمح بالتكرار في المجموعة. لاحظ ان (س، ص) = (ص، س) اذا وفقط اذا كان س = ص.

المجموعات التي عناصرها أزواج مرتبة تسمى علاقات. وبعض العلاقات

الخاصة (كالضرب الديكارتي، وعلاقة التكافؤ، والاقتران) هامة جداً في الرياضيات. واليك تعاريفها الدقيقة:

العلاقة:

تعرف العلاقة بأنها مجموعة أزواج مرتبة.
 فإذا كانت E علاقة وكان $(s, s) \in E$ نكتب ذلك أيضاً $s \in E$.

الضرب الديكارتي:

لنفرض ان S و S' مجموعتان، فيكون:
 $S \times S' = \{(s, s') \mid s \in S, s' \in S'\}$
 ويسمى الضرب الديكارتي ل S و S' .
 نكتب $S \times S'$ غالباً على صورة S^2 ، و S^n تعني $\{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_i \in S, 1 \leq i \leq n\}$.
 وكلمة ديكارتي هي نسبة الى الرياضي الفرنسي رينه ديكارت.

علاقة التكافؤ:

لنفرض ان S مجموعة وان \sim مجموعة جزئية من $S \times S$. لهذا فان \sim علاقة. ومن غير المحتمل الخلط بين \sim وبين اشارة النفي.
 نعرف \sim على انها علاقة تكافؤ اذا وفقط اذا كان:
 (أ) $s \sim s$ لكل $s \in S$ [خاصية الانعكاس]
 (ب) $s \sim s'$ و $s' \sim s''$ $\Rightarrow s \sim s''$ [خاصية التماثل]
 (ج) $s \sim s'$ و $s' \sim s''$ $\Rightarrow s \sim s''$ [خاصية التعدي].

الاقتران :

لنفرض ان s ، s مجموعتان. فالاقتران Q من s الى s يعرف على انه مجموعة جزئية من $s \times s$ تحقق

(أ) لكل $s \in s$ يوجد زوج مرتب $(s, s) \in Q$

(ب) اذا كان $(s, s) \in Q$ ، $(s, l) \in Q$ فان $s = l$.

سنستخدم Q : $s \leftarrow s$ لتدل على ان Q هو اقتران من s الى s .

وبعبارة تقريبية اذا كان Q : $s \leftarrow s$ يمكننا ان نقول انه لكل عنصر $s \in s$ يوجد عنصر وحيد $s \in s$ يرتبط به وليس من الضروري ان يشمل هذا جميع عناصر s . واذا كان Q : $s \leftarrow s$ وكان $(s, s) \in Q$ فاننا نكتب $Q(s) = s$ وهذه هي الطريقة التقليدية لكتابة s كاقتران في s . نسمي s قيمة Q عند s أو صورة s تحت تأثير Q . واذا كان Q : $s \leftarrow s$ فاننا نسمي s مجال Q ونسمي s المجال المقابل لـ Q . وهناك اسماء اخرى تستعمل لتدل على الاقتران : مثل دالة وتابع، ومؤثر، وتحويل، وتطبيق.

الاقترانات المتساوية

لنفرض ان Q : $s \leftarrow s$ ، M : $s \leftarrow s$

فاننا نعتبر $Q = M$ اذا وفقط اذا كان $Q(s) = M(s)$ لجميع قيم $s \in s$.

واذا كان Q : $s \leftarrow s$ فاننا نعرف $Q(s) = \{s \mid (s, s) \in Q\}$ ونسمي $Q(s)$ صورة s تحت تأثير الاقتران Q ، أو مدى الاقتران Q . ومن الواضح ان $Q(s) \subseteq s$

(وبصورة عامة يكون الاحتواء فرعياً).

واذا كان Q : $s \leftarrow s$ فان الاقتران Q يدعى اقتراناً شاملاً.

واذا كان Q : $s \leftarrow s$ وكانت $J \subseteq s$ فان الاقتران H : $J \leftarrow J$ يعرف

بـ $H(s) = \{s \mid (s, s) \in J\}$ لجميع $s \in J$ يدعى تحديد Q على J .

المثال ١٧ :

$$\begin{aligned} \text{لتفرض ان } \sim &= \{1, 2, 3\} \text{ ، } \sim = \{a, b\} \text{ فان} \\ \sim \times \sim &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \\ \sim \times \sim &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \end{aligned}$$

المثال ١٨ :

المساواة هي علاقة تكافؤ على أي مجموعة \sim : لأن \sim لكل $s \in \sim$ ، تستلزم
ان $s = s$ تعني ان $s = s$ ، وكذلك $s = s$ ، $s = s$ تعني ان $s = s$.

المثال ١٩ :

لتعرف \sim على مجموعة الاعداد الصحيحة Z كما يلي :
 $s \sim s$ اذا فقط اذا كان $s - s$ يقبل القسمة على ٣ .
 من المتعارف عليه ان نكتب $s \equiv s$ (مض ٣) وان s تطابق s في مضاعفات ٣ .
 نقول \sim علاقة تكافؤ على Z لأن
 (أ) $s - s = 0$ صفرأ تقبل القسمة على ٣ ،
 (ب) $s - s = 3m$ تعطي $s - s = 3(-m)$ ،
 (ج) $s - s = 3m$ و $s - s = 3l$ تعطي $s - s = 3(m + l)$
 واليك نقطة هامة : لتأخذ كم $\{s \in Z \mid s \sim 0\}$
 من الواضح ان كم $\{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}$ ، وبصورة عامة اذا كانت كم $s = 3k$
 $\{s \in Z \mid s \sim s\}$ نجد ان
 $k = 1, \{1, 4, 7, \dots\}$ ، $k = 2, \{2, 5, 8, \dots\}$ ، $k = 3, \{3, 6, 9, \dots\}$ ،
 $k = 4, \{4, 7, 10, \dots\}$ ،
 $k = 5, \{5, 8, 11, \dots\}$ ،
 من الواضح ان كل عدد صحيح ينتمي لمجموعة واحدة فقط من المجموعات $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ،
 كـ ٣ . تدعى هذه المجموعات صفوف تكافؤ .

المثال ٢٠ :

لنفرض ان $\text{سم} = \{ ٣, ٢, ١ \}$ ، $\text{صم} = \{ ٢, ١ \}$ فان :
 $ق = \{ (١, ٣) , (٢, ٢) , (٢, ١) \}$ هو اقتران من سم الى سم اي ان $ق : \text{سم} \leftarrow \text{سم}$.
ولكن $\text{سم} = \{ (٢, ١) , (١, ٣) \} = \text{م}$ ، $\{ (٣, ١) , (٢, ١) \}$ ليسا اقترانين من سم الى سم .
بالنسبة لـ ه فالجزء الاول (أ) من تعريف الاقتران لم يتحقق ، وبالنسبة لـ م فان الجزء الثاني (ب) لم يتحقق .

المثال ٢١ :

لتعرف $ق(س) = \text{س}$ لكل $س \in R$
اذن $ق : R \leftarrow R$ وكذلك $ق : R \leftarrow \{ س \in R \mid س \leq ٠ \}$.

وبعض أنواع الاقترانات لها أسماء خاصة :

الاقتران التبايني (واحد لواحد) :

يدعى الاقتران $ق : \text{سم} \leftarrow \text{صم}$ تباينياً أو واحداً لواحد اذا وفقط اذا كانت $ق(س_١) = ق(س_٢)$ تنضم من $س_١ = س_٢$

الاقتران الشامل :

يسمى الاقتران $ق : \text{سم} \leftarrow \text{صم}$ اقتراناً شاملاً اذا وفقط اذا كان لكل $س \in \text{صم}$ يوجد $س \in \text{سم}$ بحيث ان $ق(س) = \text{ص}$. لذلك اذا عرفنا $ق(سم) = \{ ق(س) \mid س \in \text{سم} \}$ يكون $ق$ شاملاً اذا وفقط اذا كان $ق(سم) = \text{صم}$.

اقتران التقابل :

يسمى الاقتران $ق : \text{سم} \leftarrow \text{صم}$ تقابلاً اذا وفقط اذا كان الاقتران شاملاً وواحداً لواحد

معاً.

العملية الثنائية :

العملية الثنائية على المجموعة S هي اقتران $ق: S \times S \rightarrow S$

المثال ٢٢ :

لنعرف $ق: Z \rightarrow Z$ بـ $ق(ن) = ٢ن$

ان $ق$ اقتران واحد لواحد ولكنه ليس شاملاً. انه واحد لواحد لانه اذا كانت $ق(ن) = ق(م)$ فان $٢ن = ٢م$ ومنه نستنتج ان $ن = م$. وليس اقتراناً شاملاً لأن $\exists ١ \in Z$ - لكن $ق(ن)$ عدد زوجي لذلك $ق(ن) \neq ١$ لكل $ن \in Z$. من هذا ينتج ان $ق$ ليس تقابلاً.

المثال ٢٣ :

لتكن $S = \{س \mid س \in R\}$ ولنعرف

$ق: R \rightarrow S$ بـ $ق(س) = س$ اذا كانت $س \leq ٠$

، $ق(س) = -س$ اذا كانت $س > ٠$. يسمى هذا الاقتران اقتران القيمة المطلقة. ويكتب عادة $ق(س) = |س|$.

والشكل التالي هو بيان اقتران القيمة المطلقة.

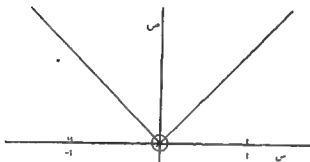
$ق$ ليس واحداً لواحد لان $ق(١) = ق(-١)$ لا يتضمن $١ = -١$. ولكن $ق$ اقتران شامل لانه اذا كانت $ص \in S$ فان $ص \leq ٠$ ومن التعريف نرى ان $ق(ص) = ص$. من هذا ينتج ان $ق$ ليس تقابلاً.

المثال ٢٤ :

عرف $ق: R \rightarrow R$ بحيث ان $ق(س) = ٢س + ٣$

ان ق تقابل لأن ق (س) = ق (س) يتضمن $٢ = ٣ + ١$ س $٢ = ٣ + ١$ س $٣ + ١$ ومنه ينتج ان س $١ = ٣$ ، واذا كانت س $\exists R$ فانه يوجد س $\exists R$ بحيث ان ق (س) = س اي ان $٢ = ٣ + ١$ س $٢ = ٣ + ١$ س وبالتحديد فان

$$\frac{٣ - س}{١} = س$$



المثال ٢٥ :

لنرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة بالرمز R^+ اي ان $R^+ = \{س | س > ٠ \text{ و } س \in R\}$ فمن الواضح ان الاقتران $ق : R^+ \leftarrow R^+$ المعروف ب ق (س) = س هو تقابل .

المثال ٢٦ :

عملية الجمع هي عملية ثنائية على N لأنه اذا كان (س، ص) $\exists N \times N$ فان س + ص $\exists N$ وهذه بالطبع هي الطريقة العادية لكتابة عملية الجمع . وباستعمال رموز الاقتران فاننا نكتب : $N \times N \leftarrow N$ ، وان ((س، ص)) $\exists N$ لكل (س، ص) $\exists N \times N$. وفائدة استعمال الطريقة العادية واضحة .
لاحظ ان عملية الطرح ليست عملية ثنائية على N لانه على سبيل المثال (١، ٢) \exists

$N \times N$ ولكن $1-2 \nmid N$.

سنبرهن الآن نظريتين عامتين.

النظرية ٤ :

لتكن \sim علاقة تكافؤ على المجموعة S . ولكل $s \in S$ ، لتكن $K_s = \{s \in S \mid s \sim s\}$ أي ان K_s هو ما ندعوه بصف التكافؤ المحتوي على s ، فان

- (أ) $s \in K_s$ لجميع $s \in S$
- (ب) $K_s = K_t$ اذا فقط اذا كانت $s \sim t$
- (ج) $K_s \cap K_t = \emptyset$ تتضمن $K_s \cap K_t = \emptyset$
- (د) $\{K_s \mid s \in S\}$ مجموعة صفوف التكافؤ المختلفة تمثل تجزئة لـ S ، اي ان S هي اتحاد صفوف التكافؤ المنفصلة K_s .

البرهان :

- (أ) $s \sim s$ لكل $s \in S$ وهذا يعطي (أ)
- (ب) لنفرض ان $K_s \neq K_t$. فمن (أ) $s \in K_s$ إذن $s \in K_t$ ومنه $s \sim t$ (من تعريف K_t).

العكس : لنفرض ان $s \sim t$ ، فعلينا ان نثبت ان $K_s = K_t$ وسنفعل ذلك بان نثبت ان $K_s \subseteq K_t$ و $K_t \subseteq K_s$.

لنأخذ $s \in K_s$. إذن $s \sim s$ وبما ان $s \sim t$ من خاصية التعلدي ان $s \sim t$ ، ومنه ينتج ان $s \in K_t$ ، الخلاصة : $s \in K_t$ يتضمن $s \in K_t$ اي $K_s \subseteq K_t$ لنفرض ان $s \in K_t$ إذن $s \sim t$ ، ومن خاصية التماثل ينتج ان $t \sim s$ ، وهذه مع $s \in K_s$

\sim ص يتضمن \sim ع ومنه \supset ك \sim وهذا يثبت (ب).
 (ج) سثبت (ج) باستخدام المعاكس الالجابي . لنفرض ان \supset ك \sim $\neq \emptyset$ اذن يوجد ع
 \supset ك \sim $\bar{\sim}$ ك \sim اي ان ع \supset ك \sim ، ع \supset ك \sim اذن ع \sim ع ص وهذا يتضمن \sim
 ص ومن (ب) يتبع ان ك \sim = ك \sim .
 (د) اذا كانت ص \supset \sim من (أ) يتبع ان ص \supset ك \sim \supset ك \sim ومنه نجد ان \supset ك \sim .
 وبالعكس اذا كانت ص \supset ك \sim تكون ص \supset ك \sim لقيمة ماثل ص \supset \sim ، اذن
 ص \supset \sim . وهكذا يتبع ان ك \sim \supset \sim . وبذلك نكون قد اثبتنا ان \supset ك \sim = ك \sim ، ويتم
 اثبات النظرية .

المثال ٢٧ :

من المثال ١٩ نرى ان $Z = \{ \supset \text{ ك } \sim , \supset \text{ ك } \sim , \supset \text{ ك } \sim , \supset \text{ ك } \sim \}$ مجموعات منفصلة .

النظرية ٥ [الاقتران العكسي]:

اذا كان ق: \sim ص \leftarrow ص اقران تقابل ، فانه يوجد اقتران وحيد م: \sim ص \leftarrow ص بحيث
 ان م (ق) (ص) = ص لجميع قيم ص \supset \sim وكذلك
 ق (م) (ص) = ص لجميع قيم ص \supset \sim .
 ندعوم عكس ق ونكتب م = ق⁻¹ .

البرهان :

بما ان ق هو اقتران شامل ، فاذا كانت ص \supset \sim فانه يوجد ص \supset \sim بحيث ان ص
 = ق (ص) ، ويوجد واحد فقط ، لانه اذا كان ص = ق (ص) فان ص = ق (ص) = ق (ق (ص)) ،
 وهذا يعطي ص = ص لان ق واحد لواحد .
 كل عنصر ص \supset \sim يرتبط بعنصر وحيد م \supset \sim . اذن يوجد اقتران م: \sim ص \leftarrow ص
 \sim ، بحيث ان م (ص) = ص . من هذا يتبع ان م (ق (ص)) = ص ، ق (م (ص)) = ص .

لثبت ان م وحيد: لنفرض انه يوجد ل: $\text{صه} \leftarrow \text{مه}$ بحيث ان ل (ق (س)) = س
 لجميع قيم س $\ni \text{مه}$. ولناخذ أي عنصر ص $\ni \text{صه}$. اذن يوجد س $\ni \text{مه}$ بحيث ان ص
 = ق (س)، اذن ل (ص) = ل (ق (س)) = س = م (ق (س)) = م (ص) اذن ل = م. وهذا
 يثبت النظرية.

المثال ٢٨ :

(أ) ق: $R \leftarrow R$ المعروف ب ق (س) = $٢ + ٣$ هو اقتران تقابل (انظر المثال ٢٤).
 وعكسه ق: $R \leftarrow R$ يعطي بالصيغة ق: $١^- (س) = (س - ٣) / ٢$
 (ب) ق: $R \leftarrow R$ المعروف ب ق (س) = ٥ هو اقتران تقابل (مستثب هذا فيما بعد)
 وعكسه ق: $١^- R \leftarrow \bar{R}$ يرمز له بالرمز لو.

المجموعات المتكافئة :

نقول ان المجموعتين مه ، صه متكافئتان / ونكتب $\text{مه} \sim \text{صه}$: اذا وفقط اذا وجد
 اقتران تقابل ق: $\text{مه} \leftarrow \text{صه}$.

المثال ٢٩ :

$\{١, ٢, ٣\} \sim \{١, ٣, ٥\}$ لأن ق المعروف ب
 ق (١) = ١، ق (٢) = ٣، ق (٣) = ٥ هو اقتران تقابل
 لكن $\{١, ٢, ٣\}$ لا تكافئ $\{١, ٢, ٣\}$ لأنه اذا فرضنا ان ق: $\{١, ٢\} \leftarrow \{١, ٢, ٣\}$ هو
 اقتران تقابل فان $١ = \text{ق (س)}$ لعنصر ما س $\ni \{١, ٢\}$ ، ب = ق (ص) لعنصر ما ص \ni
 $\{١, ٢\}$ و ان $\text{ب} \ni \text{ص}$ فان س $\ni \text{ب}$. الآن ج = ق (١) أوج = ق (٢)، لذلك اذا كانت س =
 ١ فان أ = ج. واذا كانت س = ٢ فان ب = ج. لكن هذا يؤدي الى تناقض لان أ $\ni \text{ب}$ و ب $\ni \text{ج}$.

المثال ٣٠:

$N \sim \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ أي أن N تكافئ مجموعة الأعداد الزوجية وهي مجموعة جزئية فعلاً من N . ولايثبات ذلك نلاحظ أن الاقتران $ق: N \leftarrow \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ المعروف بـ $ق(ن) = 2ن$ هو اقتران تقابل.

ليس من الصعب إثبات أن \sim هي علاقة تكافؤ على صف جميع المجموعات. فمثلاً $ق: م \leftarrow م$ المعروف بـ $ق(م) = م$ هو اقتران تقابل.

وفي حساب التفاضل والتكامل يواجه الفرد فكرة الاقتران المركب.

فمثلاً إذا كان $ق(م) = م$ جتا $م$ ، $ق(س) = س$ فإن $ق(م(س)) = م$ جتا $س$ وم $ق(س(م)) = م$ جتا $س$ وعادة نكتب $ق(م(س)) = م$ جتا $س$.

والاقترانان جتا $س$ وجتا $م$ هما اقترانان مختلفان تماماً فمثلاً جتا $م$ جتا $س \neq$ سنذكر الآن التعريف العام.

تركيب الاقترانات:

لنفرض أن $ق: م \leftarrow م$ و $ق: م \leftarrow م$ فإن

ل: $ق: م \leftarrow م$ المعروف بـ $ل(م) = م$ (ق(س)) يدعى تركيب الاقترانين $ق$ ، $م$ ونكتب $ل = م \circ ق$ لهذا فإن

$ل(م) = ق(م) = م$ (ق(س)) لجميع قيم $س \in م$.

أحياناً يكتب تركيب الاقترانين $م$ ، $ق$ على صورة $م \circ ق$ ولكن هذا قد يسبب الالتباس لأن حاصل ضرب $م$ ، $ق$ يكتب $م \circ ق$ المعروف بـ $ل(م) = م$ (ق(س))، $ق(م) = م$ ، في الحالات التي يكون بها حاصل الضرب ممكناً، مثلاً إذا كان $م(س) = ق(س)$ أعداداً حقيقية.

الصورة وأصل الصورة:

ليكن $ق: م \leftarrow م$ و $ق: م \leftarrow م$ ، $ق: م \leftarrow م$.

نعرف $ق(ج) = \{س | س \in ج\}$ بـ $ق(ج)$ صورة المجموعة $ج$ تحت تأثير الاقتران $ق$. لاحظ أن $ق(ج) \subset م$. كذلك نعرف $ق^{-1}(ي) = \{س | س \in ق(ي)\}$ ،

وندعوق⁻¹ (ي) أصل الصورة للمجموعة ي تحت تأثير ق. لاحظ ان ق⁻¹ (ي) \supset سم. نذكر هنا اننا لا نشترط ان يكون ق تقابلا حتى نكتب ق⁻¹ (ي)، لانه واضح من تعريف ق⁻¹ (ي) ان عكس الاقتران ق لا يرد في التعريف.

المثال ٣١:

عرف ق: $R \leftarrow R$ ب ق (س) = س^١ ولتأخذ
 $J = \{1, -1\}$ ، ي = {س \exists | س > ٠}
اذن ق (ج) = {١} ، ق⁻¹ (ي) = \emptyset كذلك ق⁻¹ (ج) = ج.

في النظرية التالية نعطي مثالين عن خواص الصور واصول الصور.

النظرية ٦:

ليكن ق: سم \leftarrow سم، ح_١، ح_٢ \supset سم، ي_١، ي_٢ \exists سم فان
(أ) ح_١ \supset ح_٢ \leftarrow ق (ح_١) \supset ق (ح_٢)
(ب) ق⁻¹ (ي_١ \cap ي_٢) = ق⁻¹ (ي_١) \cap ق⁻¹ (ي_٢)

البرهان:

(أ) سنثبت ان ص \exists ق (ح_١) تتضمن ص \exists ق (ح_٢)؛ ص \exists ق (ح_١) \leftarrow ص = ق (س) لعنصر ماس \exists ح_١ ولكن ح_١ \supset ح_٢ إذن ص \exists ح_٢ ومنه ص = ق (س) \exists ق (ح_٢) وهذا يثبت (أ).

(ب) س \exists ق⁻¹ (ي_١ \cap ي_٢) تعطي ق (س) \exists ي_١ \cap ي_٢
ومنه ق (س) \exists ي_١ ، ق (س) \exists ي_٢ إذن س \exists ق⁻¹ (ي_١) ، س \exists ق⁻¹ (ي_٢) وهذا يعطي
س \exists ق⁻¹ (ي_١) \cap ق⁻¹ (ي_٢)
ومن الواضح انه يمكن الرجوع بخطوات البرهان وهذا يثبت النظرية.

التمارين (١ - ٢)

في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين

- ١ - اثبت ان $\text{سم} \cap \text{صم} = \text{صم}$ اذا فقط اذا كانت $\text{صم} \supset \text{سم}$
- ٢ - اذا كانت سم_1 ، سم_2 مجموعتين. فأوجد مجموعتين منفصلتين سم_1 ، سم_2 بحيث ان $\text{سم}_1 \cup \text{سم}_2 = \text{سم}$ و $\text{سم}_1 \cap \text{سم}_2 = \emptyset$.
- ٣ - لاي مجموعة غير خالية سم ، لنرمز الى عائلة جميع المجموعات الجزئية من سم بالرمز $\text{قو}(\text{سم})$. ونسمي $\text{قو}(\text{سم})$ مجموعة القوة لـ سم . اكتب عناصر $\text{قو}(\text{سم})$ حيث $\text{سم} = \{a, b, c\}$
- ٤ - اي من المجموعات التالية مجموعة خالية:
 $\text{سم}_1 = \{x \in Z \mid x^2 = 2\}$ ،
 $\text{سم}_2 = \{x \in R \mid x^2 - 2 = 0\}$ ،
 $\text{سم}_3 = \{(x, y) \in R \mid x^2 + y^2 = 0\}$
- ٥ - اثبت انه في اي مجموعات سم ، صم ، ع يكون:
 $\text{سم} \times (\text{صم} \cap \text{ع}) = (\text{سم} \times \text{صم}) \cap (\text{سم} \times \text{ع})$
- ٦ - اثبت ان $>$ هي علاقة تعدُّ على R . ولكنها ليست انعكاسية وليست تماثلية.
- ٧ - اعط مثالا لعلاقة على N بحيث تكون علاقة انعكاس وتعد ولكنها ليست تماثلية.
- ٨ - (أ) لتكن $Q: \text{سم} \leftarrow \text{صم}$: عرف علاقة \sim على سم كما يلي: $s \sim t$ ص اذا فقط اذا كان $Q(s) = Q(t)$. اثبت ان \sim هي علاقة تكافؤ.
- نسعي \sim علاقة التكافؤ المعرفة بـ Q .
- (ب) لتكن سم هي مجموعة الاعداد الحقيقية عدا الصفر.
- عرف $Q: \text{سم} \leftarrow \text{سم}$ بـ $Q(s) = \frac{\text{سم}}{|s|}$ حيث $|s|$ هي القيمة المطلقة لـ s . صف علاقة التكافؤ المعرفة بـ Q . اكتب سم على صورة اتحاد صفوف التكافؤ المنفصلة.
- ٩ - (أ) ثبت عددا ما $n \in N$. عرف \sim على Z كما يلي: $s \sim t$ ص اذا فقط اذا كان $s - t$ ص يقبل القسمة على n . كالعادة نكتب $s \equiv t \pmod{n}$ ونقول ان s و t

متطابقان في مضاعفات ن. أثبت ان \sim هي علاقة تكافؤ على Z.

(ب) افرض ان $s \equiv ص$ (مض ن) و $s' \equiv ص'$ (مض ن) اثبت ان $s + s' \equiv ص + ص'$ (مض ن) وكذلك $s \cdot s' \equiv ص \cdot ص'$ (مض ن) ومنه استنتج ان

$s \equiv ص$ (مض ن)، $s' \equiv ص'$ (مض ن)، ...

(ج) استخدم الجزء الاخير من (ب) لاثبات ان $2^{202} - 1$ يقبل القسمة على 5.

(د) اثبت ان العدد الطبيعي (مكتوبا بشكله العشري) يقبل القسمة على 9 اذا وفقط اذا كان مجموع ارقامه يقبل القسمة على 9. مثالا على ذلك 6282 يقبل القسمة على 9 لان $6 + 2 + 8 + 2 = 18$ يقبل القسمة على 9.

١٠- لتكن S أي مجموعة و لتكن f عائلة كل المجموعات الجزئية للمجموعة S . لنفرض ان

ق: $f \rightarrow \{s \in R \mid s \subseteq S\}$ بحيث ان

ق (ح₁) = ق (ح₂) + ق (ح₃) لأي مجموعتين جزئيتين منفصلتين H_1, H_2 من S .
اثبت ان $f \rightarrow \{s \in R \mid s \subseteq S\}$.

١١- لتكن S أي مجموعة f عرف

$f = \{0, 1\}$

ك f (س) = 1 اذا كان $s \in f$

ك f (س) = 0 صفرا اذا كان $s \notin f$

نسمي f الاقتران المميز لـ f .

اذا كانت f ، f f فاثبت ان

(أ) $f = f$ اذا وفقط اذا كانت $f = f$.

(ب) $f \geq f$ اذا وفقط اذا كانت $f \subseteq f$

(ج) $f \cap f = f$

$$(د) \quad \text{ك ي} \cup \text{ح} = \text{ك ي} + \text{ك ح} - \text{ك ي} \cap \text{ح}$$

لاحظ انه في (ج) تعني $\text{ك ي} \cap \text{ح}$ (س) = ك ي (س) \cap ك ح (س) لكل س $\in \mathcal{S}$ وكذلك في

(د) تعني

$$\text{ك ي} \cap \text{ح} (س) = \text{ك ي} (س) + \text{ك ح} (س) - \text{ك ي} \cap \text{ح} (س) \text{ لكل س } \in \mathcal{S}$$

٣- الزمر، الحلقات، الحقول، الفضاءات الخطية، الجبريات.

مفهوم الزمرة من أبسط الافكار واكثرها اساسية في الرياضيات، والفكرة سهلة الا ان نظرية الزمر واسعة جداً. وتوجد أوليات هذه النظرية في اي كتاب يبحث في الجبر المجرد. والزمرة هي اساس نظم اخرى تظهر في التحليل، مثل الحلقات والفضاءات الخطية، لذلك سنذكر بإيجاز بعض الافكار الاساسية للزمر.

ولكي تتمكن من اعطاء امثلة سنفترض المعرفة ببعض الخواص الأولية لمجموعة الاعداد الصحيحة ولمجموعة الاعداد الحقيقية الخ.

لنأخذ بعين الاعتبار الزوج المرتب $(Z, +)$ الذي يتكون من Z وعملية ثنائية هي عملية الجمع على Z . نلاحظ الخواص التالية:

(أ) عملية الجمع هي عملية تجميعية اي ان

$$أ + (ب + ج) = (أ + ب) + ج \text{ لجميع } أ، ب، ج \in Z$$

(ب) يوجد عنصر محايد $0 \in Z$ بحيث ان $س + 0 = س = 0 + س$ لجميع س $\in Z$.

(ج) لكل $أ \in Z$ يوجد نظير $أ^{-}$ $\in Z$ بحيث ان

$$أ + أ^{-} = 0 = أ^{-} + أ$$

في (ب) 0 هو بالطبع العدد صفر وفي (ج) $أ^{-} = -أ$

$$\text{لذلك } أ + (-أ) = (-أ) + أ = 0 \text{ صفراً.}$$

مثال آخر: لنأخذ الزوج المرتب $(R, +)$ الذي يتكون من مجموعة الاعداد الحقيقية

الموجبة مع عملية الضرب على R^{+} . عملية الضرب هي عملية ثنائية لأن $أ.ب < \infty$ عندما يكون $أ < \infty$ و $ب < \infty$.

من السهل ان نثبت ان الخواص (أ)، (ب)، (ج) السابقة تبقى صحيحة اذا استبدلنا R^+ بـ Z ، وعملية الضرب بعملية الجمع فمثلاً (ب) تصبح $a + a = 0$ ، $a = 0$ لكل $a \in R^+$ وفي هذه الحالة a هو العدد الحقيقي الموجب ١ .

اذا نظرنا بتمعن الى المثالين السابقين، نرى ان كلاً منهما توضح لما ندعوه بالزمرة. وها هو التعريف الدقيق للزمرة:

الزمرة (ز، *) هي عبارة عن زوج مرتب يتكون من مجموعة غير خالية Z وعملية ثنائية * على Z بحيث ان

(١) العملية الثنائية * هي عملية تجميعية، اي ان

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ لجميع } a, b, c \in Z$$

(٢) يوجد عنصر محايد $e \in Z$ بحيث ان

$$a * e = a = e * a \text{ لجميع } a \in Z$$

(٣) لكل عنصر $a \in Z$ يوجد نظير a^{-1} بحيث ان

$$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$$

من السهل ان نرى ان e وحيد وأنه لكل a يوجد نظير واحد فقط.

في كثير من الزمر المستعملة يكون $a * b = b * a$ لكل $a, b \in Z$ ، اي ان العملية * هي عملية تبديلية. مثل هذه الزمر تسمى زمراً تبديلية، أو زمراً أبيلية (نسبة للرياضي النرويجي أبيل (١٨٠٢ - ١٨٢٩)). لهذا فان $(Z, +)$ ، (R^+, \cdot) هي زمر تبديلية.

واذا كانت الزمرة تحوي عدداً متتهياً من العناصر فان عدد عناصرها يسمى رتبة الزمرة.

مثال على ذلك $Z = \{1, -1\}$ مع عملية الضرب هي زمرة تبديلية من الرتبة الثانية.

يمكننا اثبات ان جميع الزمر التي رتبتهها $n \geq 2$ هي بالضرورة زمر تبديلية.

والمثال التالي يؤكد على ان الزمرة يمكن ان تكون اي مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية مناسبة، وليس فقط مجموعة ارقام مع عملية حسابية مألوفة.

المثال ٣٢ :

لتكن S اي مجموعة غير خالية، Z هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة S

$$(١ح * ٢ح) * ٣ح = ٣ح * (٢ح * ١ح)$$

وهذا يثبت الشرط (١) من شروط الزمر.

ونرغب أحياناً أن نقارن زميرتين (ز ، *) ، (ى ، ٥) ، ونفعل ذلك عادة بدراسة اقتران بين الزميرتين يحافظ على العمليات الثنائية .

الاقتران المحافظ والتشاكل

الاقتران المحافظ من (ز ، *) الى (ى ، ٥) هو اقتران ق : ز ← ى يحقق الشرط

$$ق(أ * ب) = ق(أ) ٥ ق(ب) \text{ لجميع } أ، ب \in ز$$

إذا كان الاقتران المحافظ تقابلاً فإنه يدعى تشاكلاً . ونسمى الزمرتان متشاكلتين إذا وفقط إذا وجد بينهما تشاكل .

إذا كتبنا ز ~ ى لتعني أن ز و ى هما زميرتان متشاكلتان ، فإنه يكون من السهل التحقق من أن ~ هي علاقة تكافؤ على عائلة جميع الزمر . ولهذا فإن الزميرتين المتشاكلتين ينظر إليهما في نظرية الزمر كمتمكافئتين .

المثال ٣٣

زمرة الأعداد الحقيقية مع عملية الجمع ، (+ ، R) ، وزمرة الأعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب ، (* ، R⁺) ، هما زميرتان متشاكلتان .

ذلك أننا سثبت في الفصل التاسع أن الاقتران الآسي

$$ق : (+ ، R) \leftarrow (* ، R^+) \text{ المرف بـ } ق(م) = م \text{ هو تشاكل}$$

في هذه الحالة فإن خاصية المحافظة ق(أ + ب) = ق(أ) ٥ ق(ب) تصح ٥^١ = ٥^١ ٥^١ ، وهذه قد تكون من أهم خواص الاقتران الآسي .

المثال ٣٤

لتكن (ز ، ٥) هي الزمرة { ١ ، -١ } مع عملية الضرب . عرف

ق: $(Z, +, \cdot) \leftarrow (Z, \cdot)$ برف $(A) = 1$ ،

ق $(A) = 1 - 1$ لكل $A \in Z$. بفحص الحالات عندما تكون $A, B \in Z$ اعدادا زوجية او فردية : يتضح ان ق هواقتران محافظ فمثلا اذا كان أزوجياوب فرديا فان $A+B$ يكون عدداً فردياً.ولهذا فان ق $(A+B) = 1 - 1$ ، ق $(A) = 1$ ، ق $(B) = 1 - 1$ ؛ ومنه ق $(A+B) = ق (A) \cdot ق (B)$.

من الواضح ان الاقتران ق هواقتران شامل ولكنه ليس واحدا لواحد . فعلى سبيل المثال ق $(2) = ق (4)$ ولكن $2 \neq 4$.لهذا فان ق ليس تشاكلا . لاحظ ان هذا لا يثبت أن $(Z, +, \cdot)$ ليستا متشاكلتين ، لانه ربما يكون من الممكن ايجاد تشاكل بينهما . ولكن في هذه الحالة بالذات يمكن اثبات انه لا يوجد تشاكل بين هاتين الزمرتين (انظر التمرين ١ - ٣) .

المثال ٣٥

لنأخذ علاقة التكافؤ \sim ؛ فمن المثال ١٩ حصلنا على ثلاثة صفوف تكافؤ $\bar{0}$ ، $\bar{1}$ ، $\bar{2}$ سنرمز لها بـ $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ على التوالي . لهذا نحصل على ما يلي :

$$\bar{0} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$\bar{2} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$. تدعى هذه صفوف التكافؤ لمضاعفات ٣ ويرمز لها بالرمز Z_3 . وسنجري عملية ضرب على Z_3 حسب القاعدة التالية $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$: مثلا $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$.

علينا ان نتحقق ان هذه القاعدة تعرف صف تكافؤ وحيدا . اي علينا اثبات انه اذا كان $\bar{a} \sim \bar{b}$ و $\bar{c} \sim \bar{d}$ فان $\bar{a} \cdot \bar{c} \sim \bar{b} \cdot \bar{d}$.

الآن $\bar{a} - \bar{b} = \bar{0}$ ، $\bar{c} - \bar{d} = \bar{0}$ حيث $\bar{0} \in Z_3$ وهذا يعطي $\bar{a} = \bar{b}$ و $\bar{c} = \bar{d}$.

ومنه ينتج ان $\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{d}$ قبل القسمة على ٣ أي ان $\bar{a} \cdot \bar{c} \sim \bar{b} \cdot \bar{d}$.

لنأخذ $Z_3^* = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ عناصر Z_3 غير الصفرية ، مع عملية الضرب الثنائية التي

عرفناها توالاً.

من السهل إثبات ان Z^* هي مجموعة رتبها ٢ وعنصرها المحايد هو \bar{A} . ومن المفيد ان نكتب جدول زمرة لثبات هذه الزمرة المنتهية الصغيرة:

	\bar{A}	\bar{B}
(Z^*)	\bar{A}	\bar{B}
	\bar{A}	\bar{B}

من المفيد ان نلاحظ ان كل زمرة رتبها ٢ تشاكل Z^* .

لايثبات هذا نفرض ان $Z = \{s, m\}$ هي زمرة تتكون من عنصرين مختلفين حيث m -العنصر المحايد. اذن $s * s = s$ و $m * s = s$ و $s * m = m$ و لو كانت $s * m = s$ فان $m * (s * s) = m * s = s$ و $(m * s) * s = m * (s * s) = m * s = s$ و هذا يناقض $s \neq m$ اذن $s * m = m$

وجداول الزمرة $(Z, *)$ هو

	s	m
(Z)	s	m
	s	m

وبالنظر الى جدولي (Z) و (Z^*) نرى ان Z تشاكل Z^* ، وبعبارة ادق فان الاقتران

ق: $Z \rightarrow Z^*$ المعروف بـ ق($m = \bar{A}$ ، ق($s = \bar{B}$) هو تشاكل.

واذا اخذنا Z مجموعة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٤ حيث $a \sim b$ تعني ان $a - b$ يقبل

القسمه على ٤ ، فان العناصر غير الصفري في Z مع عملية الضرب لا تكون زمرة ، لانه على سبيل المثال $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0} \notin Z$ ، لهذا فان عملية الضرب ليست عملية ثنائية .

وبشكل عام يمكن اثبات ان Z^n مع عملية الضرب لصفوف التكافؤ تكون زمرة اذا وفقط اذا كان n عدداً اولياً ، اي ان n لا يقبل القسمه إلا على ١ وعلى n فقط .

سنفحص الآن الفكرة الهامة : «زمرة داخل زمرة» أو الزمرة الجزئية : لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة مع عملية الجمع $(Z, +)$. فالمجموعة :

ج = $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ للاعداد الصحيحة الزوجية هي مجموعة جزئية من Z .
ومن الواضح ان (ج، +) هي زمرة . ومن المهم التأكد من ان + ما زالت عملية ثنائية على ج اي ان $a + b \in ج$ عندما يكون $a, b \in ج$. وهذا واضح لأن $2m + 2n = 2(m + n)$ لكل $m, n \in ج$. والمجموعة المكونة من عنصر واحد $\{0\}$ هي زمرة جزئية مع عملية الجمع ، بينما المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ليست زمرة جزئية ، فعلى سبيل المثال : العنصر اليسر له نظير في المجموعة $ع = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ اي انه لا يوجد $س \in ع$ بحيث $ان س + ١ = ٠$.
ومن الواضح ايضاً ان مجموعة الاعداد النسبية الموجبة مع عملية الضرب (Q^+, \cdot) هي زمرة جزئية من (R^+, \cdot) .

سنعطي الآن تعريف الزمرة الجزئية :

الزمرة الجزئية :

الزمرة الجزئية (ي، *) للزمرة (ز، *) هي مجموعة $ي$ غير خالية وجزئية من $ز$ بحيث ان (ي، *) هي زمرة ايضاً .

من المفهوم ان * هي عملية ثنائية على $ي$ اي ان $a * b \in ي$ لكل $a, b \in ي$.
والنظرية التالية تعطينا طريقة لمعرفة هل المجموعة الجزئية من زمرة ما هي زمرة جزئية ام لا :

النظرية ٧

إذا كانت Y مجموعة غير خالية وجزئية من الزمرة $(Z, *)$ فإن $(Y, *)$ تكون زمرة جزئية إذا وفقط إذا كان $A * B \subseteq Y$ لكل $A, B \subseteq Y$.

البرهان

اولا لنفرض ان $(Y, *)$ هي زمرة جزئية، لنأخذ $A, B \subseteq Y$.
إذن $B \subseteq Y$ لأن Y زمرة جزئية وايضا $A * B \subseteq Y$ لأن $*$ هي عملية ثنائية على Y . وهذا يثبت الجزء (فقط اذا) من النظرية.
ثانيا لنفرض ان $A * B \subseteq Y$ لكل $A, B \subseteq Y$. علينا اثبات ان $(Y, *)$ هي زمرة.
لنأخذ $A \subseteq Y$ إذن $A * A \subseteq Y$ اي ان $A \subseteq Y$ ، وهذا يثبت ان العنصر المحايد في المجموعة الاصلية Z هو عنصر محايد في Y .

كذلك لاي عنصر $A \subseteq Y$ ، بما ان $A \subseteq Y$ فإن $A * A \subseteq Y$ اي ان $A \subseteq Y$. وهذا يثبت الشرط (٣) من شروط الزمرة. وخاصية التجميع واضحة لأن $A * (B * C) = (A * B) * C$ لجميع عناصر Z فهي بالتأكيد صحيحة لجميع عناصر اي مجموعة جزئية من Z .
أخيرا لنفرض ان $A, B \subseteq Y$. لقد اثبتنا ان $B \subseteq Y$ ، ومنه $A * B \subseteq Y$ ومن الفرض يتبع ان $A * B \subseteq Y$ ولكن $B \subseteq Y$ ، إذن $A * B \subseteq Y$. وهذا يثبت ان $(Y, *)$ هي عملية ثنائية على Y . وهذا يثبت النظرية.

وكثير من الزمر التي نشاهدها في التحليل هي تبديلية، لهذا سوف نهتم بهذه الزمر في معظم ما سيأتي.

إذا كانت $(Z, *)$ زمرة تبديلية و $(Y, *)$ زمرة جزئية فيها (بالضرورة ستكون تبديلية)، يمكننا تكوين زمرة جزئية جديدة تدعى بالزمرة العكسية يرمز لها بالرمز Z/Y . وعناصر هذه الزمرة هي عبارة عن صفوف التكافؤ التي تحددها علاقة التكافؤ \sim ، المعرفة بـ $A \sim B$ اذا وفقط اذا كان $A * B \subseteq Y$ حيث $A, B \subseteq Z$. سنثبت كل هذا الآن.

المثال ٣٦

لتكن Z هي الزمرة التبديلية $(+, Z)$ ولتكن \mathcal{O} هي الزمرة الجزئية $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فان \mathcal{O}/Z هي الزمرة \mathcal{O}/Z لصفوف تكافؤ مضاعفات العدد ٣ مع الجمع.

ولبعض الزمر التي قدمناها في امثلة سابقة خواص جبرية اكثر مما قدمنا. فعلى سبيل المثال لا نحتاج فقط لجمع الاعداد الصحيحة (اعتبر الزمرة $(+, Z)$ مثالا) ولكننا نحتاج ان نضرب الاعداد الصحيحة. ولسوء الحظ فان $(\mathcal{O}, +)$ ليست زمرة مع عملية الضرب. وبالطبع فان \mathcal{O} هي عملية ثنائية تبديلية وتجميعية على \mathcal{O} والعدد ١ هو العنصر المحايد في عملية الضرب ولكن لا يوجد نظير لكل عنصر في $(\mathcal{O}, +)$. يوجد نظائر للعنصرين ١ و -١ فقط. وهناك نقطة اخرى يجب ملاحظتها وهي ان العمليتين $+$ و \cdot تتداخلان في خاصية التوزيع

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

والنظام الجبري الذي له تقريبا نفس خواص $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ يدعى حلقة، ونقول «تقريبا نفس الخواص» لانه في الحلقة المجردة لا نشترط ان تكون عملية الضرب تبديلية ولا نشترط ان يكون هناك عنصر محايد لعملية الضرب.

الحلقة

نعرف الحلقة على انها ثلاثة اشياء مرتبة (مجموعة $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ تتكون من مجموعة غير خالية \mathcal{O} وعملتي جمع وضرب ثنائيتين على \mathcal{O} بحيث ان

$$(1) (\mathcal{O}, +) \text{ هي زمرة تبديلية.}$$

$$(2) (\mathcal{O}, \cdot) \text{ تحقق الشرط (1) من شروط الزمرة اي ان لها الخاصية التجميعية.}$$

$$(3) \text{ خاصية التوزيع تحقق}$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ لكل } a, b, c \in \mathcal{O}$$

لاحظ اننا كتبنا كما هو متعارف عليه $a \cdot b$ بدلا من $a \cdot b$. وهذا سيء منطقياً لكنه اوجز.

وسنرمز للعنصر المحايد في (س، +) بالرمز ص ويدعى ص صفر الحلقة
 في (س، +) سنشير الى نظير أ بالرمز -أ لذلك فإن $-أ + أ = أ - أ = ص$
 تدعى الحلقة تبديلية اذا كانت عملية الضرب تبديلية اي اذا كانت أب = با لكل أ، ب
 (س، و) اذا كانت (س، +) تحقق الشرط (٢) من شروط الزمر اي انه يوجد عنصر محايد، ولعملية
 الضرب فإن س تسمى حلقة محايدة.
 وفي الغالب سنأخذ الحلقات بحيث اذا كانت تحوي عنصرا محايدا وفان $و \neq ص$. وهذا
 يمنحنا الحلقة التي تحوي على ص فقط.

المثال ٣٧

من اسهل الحلقات س، بعد الحلقة التي تحتوي على ص فقط، الحلقة المعطاة بجدولي
 الجمع والضرب التاليين

+	ص	و
ص	ص	و
و	و	و

و	ص	و
ص	ص	و
و	و	و

هذه الحلقة هي في الحقيقة، حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٢ (Z، +، ، و). وبعبارة
 اخرى فإنها تشكل هذه الحلقة، وهذا يعني انه يوجد اقتران ق : س \rightarrow Z بحيث ان
 ق (أ + ب) = ق (أ) + ق (ب) ، ق (أب) = ق (أ) ق (ب) لكل أ، ب \in س.
 والاختيار الطبيعي لق هو المعروف بـ
 ق (ص) = ٠ ، ق (و) = ١ .

المثال ٣٨

لحل اهم الحلقات واكثرها اساسية حلقة الاعداد الصحيحة (Z، +، ، و) التي مهدت

لتعريف الحلقة المجردة وفلولا حلقة الاعداد الصحيحة لما كنا نعرف الرياضيات بوضعها الحالي.

المثال ٣٩ [اعداد جاوس الصحيحة]

لنفترض المعرفة بالاعداد المركبة (الفصل الثاني). ولنفرض ان t هو العدد المركب حيث ان $t^2 = -1$. ولنفرض ايضا ان $\mathbb{S} = \{1 + t \cdot \text{جـ} \mid \text{جـ} \in \mathbb{Z}\}$ سنضرب ونجمع عناصر \mathbb{S} كما هو الحال في الاعداد المركبة. فمثلا $(أ + t \cdot \text{جـ}) (س + t \cdot \text{ص}) = (أس - \text{جـ} \cdot \text{ص}) + t (\text{جـ} \cdot \text{س} + أ \cdot \text{ص})$ حيث $أ، \text{جـ}، \text{س}، \text{ص} \in \mathbb{Z}$.

إذن فعملية الضرب هي عملية ثنائية على \mathbb{S} . ومن السهل اثبات ان $(\mathbb{S}, +, \cdot)$ هي حلقة تدعى حلقة الاعداد الصحيحة الجاوسية نسبة الى الألماني جاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) أحد أعظم الرياضيين في التاريخ. وفي الفصل الثاني سنقابل حلقات أخرى تتكون من المتساليات اللانهائية من الاعداد النسبية. وهذه الحلقات هامة في التحليل لعلاقتها في بناء نظام الاعداد الحقيقية من الاعداد النسبية.

وما يقابل الزمر الجزئية والزمر الكسرية هنا الحلقات الجزئية والحلقات الكسرية.

إن تعريف الحلقة الجزئية واضح: فهي مجموعة جزئية غير خالية من حلقة ما، وتكون هي نفسها حلقة. وكمثال على ذلك مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية \mathbb{J} فهي حلقة جزئية من \mathbb{Z} . وحاصل جمع وحاصل ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

وبشكل خاص فإن \mathbb{J} لها الخاصية التالية: إذا كان $أ \in \mathbb{J}$ ، $ب \in \mathbb{J}$ فإن $أ \cdot ب \in \mathbb{J}$. وامثال هذه الحلقة الجزئية تدعى مثالية ويكفي ان نركز اهتمامنا على الحلقات التبديلية.

المثاليات:

لتكن $(\mathbb{S}, +, \cdot)$ حلقة تبديلية، $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{S}$ بحيث ان $(\mathbb{M}, +)$ هي زمرة جزئية من $(\mathbb{S}, +)$ وبحيث ان $أ \in \mathbb{M}$ لكل $أ \in \mathbb{M}$ ولكل $ب \in \mathbb{S}$. لاحظ ان المثالية هي حلقة جزئية لان $أ \in \mathbb{M}$ في هذه الحالة نسمي \mathbb{M} مثالية في \mathbb{S} .

لكل $\mathbf{A} \ni \mathbf{m}$ كوب \exists من تتضمن ان $\mathbf{A} \ni \mathbf{m}$ لكل $\mathbf{A}, \mathbf{B} \ni \mathbf{m}$.

واذا كانت من حلقة تبديلية فاننا نكون الحلقة الكسرية لـ من بالنسبة لحلقة جزئية مثالية \mathbf{m} ، اي \mathbf{m}/\mathbf{m} . لذلك وكما سثبت فان \mathbf{m}/\mathbf{m} ستكون حلقة. اما اذا كانت \mathbf{m} حلقة جزئية ليست مثالية فان هذا لن يكون صحيحا.

وكما في النظرية ٨، تعرف \sim بالنسبة للزمرة الجزئية $(\mathbf{m}, +)$ اي لكل $\mathbf{A}, \mathbf{B} \ni \mathbf{m}$ ، $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ يعني $\mathbf{A} + \mathbf{B} \ni \mathbf{m}$. ومن النظرية ٨ نحصل على ان $(\mathbf{m}, +)/(\mathbf{m}, +)$ هي زمرة تبديلية. وعملية جمع صفوف التكافؤ تعرف بالطبع كالتالي:

$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. ولنحاول تعريف عملية ضرب على صفوف التكافؤ بـ $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ حيث $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ تمثل عملية الضرب على الحلقة \mathbf{m} . وسثبت ان هذا التعريف له معنى. عندما ثبت ذلك سيكون من السهل اثبات خاصية التجميع والتوزيع... الخ.

لنأخذ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ni \mathbf{m}$. ولنفرض ان $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$ ، $\mathbf{B} \sim \mathbf{E}$.

يجب ان نثبت ان $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \sim \mathbf{D} + \mathbf{E}$ ، $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{D} \cap \mathbf{E}$ ، $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{D} \cup \mathbf{E}$.

لكن \mathbf{m} هي حلقة جزئية مثالية. اذن $\mathbf{m} \cup (\mathbf{B} + \mathbf{m}) = \mathbf{m}$ وكذلك $\mathbf{A} \cup \mathbf{m} = \mathbf{m}$. لذلك (٩) تتضمن ان $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cup \mathbf{m} = \mathbf{B} \cup \mathbf{m} = \mathbf{m}$ ، اي ان $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{m} = \mathbf{B} \cap \mathbf{m} = \mathbf{m}$ وهذا ما كنا نريد. ولنلخص ذلك:

الحلقات الكسرية:

لتكن من حلقة تبديلية، \mathbf{m} مثالية في \mathbf{R} . فيوجد حلقة كسرية \mathbf{R}/\mathbf{m} تتكون من صفوف التكافؤ التي تعينها العلاقة \sim والمعرفة بـ $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ اذا وفقط اذا كانت $\mathbf{A} + \mathbf{B} \ni \mathbf{m}$. وعمليتا الجمع والضرب معرفتان على \mathbf{R}/\mathbf{m} كما يلي:

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

المثال ٤٠

لنأخذ الحلقة Z والمثالية

$M = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ فإن M/Z هي حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٣. (انظر المثال ٣٥).

المثال ٤١

لنأخذ حلقة الأعداد النسبية Q والحلقة الجزئية Z . Z ليست مثالية في Q . فمثلاً $2/1 \notin Z$. ومن السهل ملاحظة أنه يوجد a, b, c بحيث $a \in Z$ ، $b \in Q$ ، $c \in Q$ بحيث $a = b \cdot c$ ، ولكن $a \notin Z$. وهذا يثبت أنه لا يمكن استبدال الحلقة الجزئية المثالية بأي حلقة جزئية عند تكوين الحلقات الكسرية.

لقد حاولنا إعطاء فكرة كاملة عن الأشياء التي سوف يحتاج اليها من نظرية الزمر والحلقات. ونريد أن نؤكد أنه في التحليل، كما في الجبر، على الفرد أن يكون مستعداً للتحقق من كون أية فكرة جديدة تطرح ذات بنية جبرية.

فعلى سبيل المثال إذا عرفنا التسلسلات المتقاربة للمرة الأولى، فعلى الفرد أن يسأل هل يمكن جعل مجموعة جميع التسلسلات المتقاربة زمرة أو حلقة. وأيضاً هل هناك زمرة جزئية أو حلقات جزئية مثالية، وهل يمكن جعل هذا النظام الجديد يشاكل نظاماً معروفاً؟ (وفي هذه الحالة لا يكون النظام في الواقع جديداً).

وهناك ثلاث بنى جبرية يتكرر استعمالها في التحليل هي الحقول والفضاءات الخطية والجبريات. وعلى القارئ أن يلاحظ محتويات فرضيات هذه البنى الآن حيث ستطرح في فصول لاحقة أمثلة طبيعية لها.

الحقل

يعرف الحقل $(F, +, \cdot)$ على أنه حلقة تبديلية لها صفر 0 وعنصر محايد $1 \neq 0$ ،

بحيث انه لكل عنصر $a \neq 0$ يوجد نظير ضربي a^{-1} ح. ونكتب عادة $a^{-1} = \hat{a}$ لهذا فإن $1^{-1} = 1$.

وفي الحقول المجردة لا علاقة للصفر والعنصر المحايد بالعديدين العاديين $0, 1$ لكننا سنستعمل هذين الرمزين لأن اهتمامنا سينحصر في حقل الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة حيث يكون $0, 1$ هما صفر الحقل والعنصر المحايد على التوالي.

الفضاء الخطي:

لتكن $M = \{s, ص, \dots\}$ زمرة تبديلية مع عملية الجمع $+$ وليكن $H = \{a, b, ج, \dots\}$ حقلا صفرا 0 وعنصره المحايد 1 .

فالفضاء الخطي M على الحقل H هو الرباعي المرتب $(M, +, \cdot, 0, 1)$ حيث العملية \cdot معرفة من $H \times M$ الى M وحيث

$$(1) \quad 1 \cdot s = s$$

$$(2) \quad a \cdot (s + ص) = (a \cdot s) + (a \cdot ص)$$

$$(3) \quad (a + b) \cdot s = (a \cdot s) + (b \cdot s)$$

$$(4) \quad a \cdot (b \cdot s) = (a \cdot b) \cdot s$$

وفي الفضاء الخطي نسمي عناصر M بالمتجهات وعناصر H بالاعداد. لاحظ أنه في (4) نستخدم عملية ضرب $a \cdot b$ في الحقل وكذلك عملية \cdot التي تسمى الضرب العددي في $a \cdot s$ ، الخ. والعنصر المحايد في $(M, +)$ يرمز له بالرمز 0 ويسمى المتجه الصفري.

الجبريات:

الجبرية هي عبارة عن فضاء خطي M على حقل H بالإضافة الى عملية ضرب على M يرمز لها بـ \cdot حيث $s \cdot s = s$ لكل $s \in M$ ، وحيث تتحقق الشروط التالية

- (١) (س ص) ع = س (ص ع)
 (٢) س (ص ع) = س ص + س ع
 (٣) (س + ص) ع = س ع + ص ع
 (٤) أ (س ص) = (أ س) ص = س (أ ص)

إذا كانت س ص = ص س فإن الجبرية تسمى جبرية تبديلية وتستغنى عن الشرط (٣) لأنه ينتج من (٢).

وإذا وجد عنصر ϕ به بحيث أن $س = و = س$ لكل $س \in \phi$ فإن ϕ يدعى عنصر الجبرية المحايد. وهذا العنصر المحايد وحيد لأنه إذا كان ϕ وعنصراً محايداً آخر فإن $\phi = \phi$.

وفكرة الاقتران المحافظ والتشاكل في الحلقات والحقول وما إلى ذلك، مشابهة لنفس الفكرة في الزمر. وما نطلبه بشكل أساسي هو اقتران محافظين أو حقلين وما إلى ذلك. ثم يعرف التشاكل على أنه اقتران محافظ تقابلي. لهذا فإن اقتران $ق : س \rightarrow س$ بين حلقتي $س$ ، $س$ يعرف على أنه اقتران محافظ إذا وفقط إذا كان $ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص)$ ، $ق (س \cdot و) = ق (س) \cdot ق (و)$ لكل $س، و \in س$. ونفس هذا التعريف يمكن تطبيقه على الحقول لأن الحقل هو حالة خاصة من الحلقة. وبطريقة مشابهة إذا كان $س، س$ فضائين خطيين على نفس الحقل $ح$ فإن الاقتران $ق : س \rightarrow س$ يسمى اقتراناً محافظاً إذا وفقط إذا كان:

- (١٠) $ق (س + و) = ق (س) + ق (و)$ لكل $س، و \in س$ ،
 (١١) $ق (أ س) = أ ق (س)$ لكل $أ \in ح$ ولكل $س \in س$
 وفي العادة نجمع (١٠) و (١١) في شرط واحد هو التالي:
 $ق (أ س + ب ص) = أ ق (س) + ب ق (ص)$ لكل $أ، ب \in ح$ و $س، ص \in س$ (١٢)

والاقتران المحافظ للفضاء الخطي، أي الاقتران الذي يحقق (١٢)، يسمى عادة اقتراناً

خطیبا (او مؤثر خطیبا).

وأخيرا إذا كانت \sin ، \sin جبريتين على نفس الحقل H فإن Q : \sin ← \sin يسمى
اقترانا محافظا إذا وفقط إذا كان

ق (أ س + ب ص) = أ ق (س) + ب ق (ص)

وكذلك ق (س ص) = ق (س) ق (ص) لكل أ، ب ج ح ولكل س، ص ج هـ.

تمارين (١ - ٣)

في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين

١- (وحدانية العنصر المحايد والنظر)

اذا كان m_1 ، m_2 عنصرين محايدين في $(Z, *)$ فائت ان $m_1 = m_2$. واذا كان $s \in Z$ ، $s \neq 0$ فليحيط ان $s \cdot m_1 = m_2$ فائت ان $s = 0$.

٢- لنفرض ان (ز، *) هي زمرة مع عملية الضرب اي ان س * ص = ص * س ، ص = ص س
ش = ص س^١ اثبت ان (س^١)^١ = س^١ س (س ص) = ص^١ ص^١ س^١ . لاحظ ان (س ص)^١
≠ س^١ ص^١ الا اذا كانت ز تبديلية.

٣- لتكن (ز، *) كما في السؤال (٢)، اكتب من ^٢ لتعني من ^٠ من فاذا كان من، من ^٣ ز
بحيث ان من ^٢ = من ^٢ = (من من) ^٢ = من فائت ان من من = من من .

٤- خذ عددا صحيحا ثابتا $n \in \mathbb{Z}$ ، وعرّف $s * s = s + s - n$ لكل $s \in \mathbb{Z}$.
 أثبت ان $(\mathbb{Z}, *)$ هي زمرة تبديلية. ما هو العنصر المحايد وما هو 0 ؟

٥ - لنفرض ان (ز، *) زمرة. عرف عملية □ على الضرب الديكارتي $Z \times Z$ بـ (أ، ب) □ (ج، د) = (أ * ج، ب * د). اثبت ان (ز، □) زمرة.

٦- لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية، R^* مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر. عرف *

على $R^* \times R^*$ بـ $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ وهكذا فإن a ، b ، c ، d أعداد غير الصفر.

اثبت ان $(R \times R^*, *)$ هي زمرة. ما هو العنصر المحايد؟.

اثبت كذلك ان $\{(1, b) \mid b \in R\}$ هي زمرة جزئية من $(R \times R^*, *)$.

٧- لتكن S المجموعة $\{1, 2, 3\}$ ولتكن S^3 مجموعة اقترانات التقابل من S الى S واليك على سبيل المثال عنصرين من عناصر S^3 هما q_1 (المعرف بـ $q_1(1)=2, q_1(2)=1, q_1(3)=3$) و q_2 (المعرف بـ $q_2(1)=1, q_2(2)=3, q_2(3)=2$) يمكن التعبير عن q_1, q_2 كما يلي:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

تسمى عناصر S^3 (٣) عادة تبديلات S وتسمى ايضا S^3 الزمرة المتماثلة من الدرجة الثالثة. ويوجد في S^3 ستة عناصر، اي انها مجموعة من الرتبة ٦.

وهذه العناصر هي q_1, q_2 اعلاه و:

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad q_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

نعرف العملية الثنائية على S^3 (٣) بتركيب الاقترانات فعلى سبيل المثال $q_1 \circ q_2$

$(q_1 \circ q_2)(1) = q_1(q_2(1)) = q_1(1) = 2$. اكتب جدول الزمرة S^3 ، لاحظ انها ليست تبديلية

فمثلا $q_1 \circ q_2 \neq q_2 \circ q_1$ ولكن $q_1 \circ q_2 = q_2 \circ q_1 = q_3$.

٨- ليكن $q: (Z, *) \rightarrow (Y, \square)$ اقترانا محافظا، فاذا كان m هو العنصر المحايد في Z

فاثبت ان $q(m)$ هو العنصر المحايد في Y .

٩- أثبت ان الزمرتين $(Z, +)$ ، (Z, \cdot) في المثال ٣٤ غير متشاكلتين ارشاد : لنفرض انه يوجد تشاكل ق : $(Z, +) \leftarrow (Z, \cdot)$ فاذن يوجد س ، ص \exists بحيث ان ق(ص) = ١ ، ق(ص) = ١- . لنأخذ الآن \exists بحيث ان \neq س و \neq ص . اعتبر ق(ن) وتوصل الى تناقض .

١٠- أثبت ان (Q^+, \cdot) هي زمرة جزئية من (R^+, \cdot) .

هل يمكن ان يكون لـ (R^+, \cdot) زمرة جزئية منتهية بخلاف الزمرة $\{1\}$.

١١- أثبت انه في اي حلقة $\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص}$ ، $(\text{ص}) = \text{ص}$ ، $\text{ص} = \text{ص}(\text{ص}) = \text{ص}(\text{ص}) = \text{ص}$. وكذلك $(\text{ص}) = \text{ص}$.

١٢- [نظرية ذات الحدين]: في اي حلقة اكتب $\text{ص}^2 = \text{ص} + \text{ص}$ ، $\text{ص}^3 = \text{ص}^2 + \text{ص} + \text{ص}$ ، الخ . و $\text{ص}^4 = \text{ص}^3 + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$ ، $\text{ص}^5 = \text{ص}^4 + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$ ، وهكذا ، كمثال $(\text{ص} + \text{ص})^2 = \text{ص}^2 + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}(\text{ص} + \text{ص}) = \text{ص}^2 + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$. اذا كان $\text{ص} = \text{ص}$ فان $(\text{ص} + \text{ص})^2 = \text{ص}^2 + \text{ص}^2 + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$.

وبشكل عام اذا كان $\text{ص} = \text{ص}$ نحصل على نظرية ذات الحدين الهامة :

$$(\text{ص} + \text{ص})^n = \text{ص}^n + \binom{n}{1} \text{ص}^{n-1} + \binom{n}{2} \text{ص}^{n-2} + \dots + \text{ص}^n$$

حيث \exists N و $\binom{n}{r}$ هي معامل ذات الحدين ويعرف بـ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ حيث $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. ونعتبر $(0!) = 1$. يمكن كتابة نظرية ذات الحدين باستخدام الحرف

الاغريقي \sum (سيجما) مقلوبا ، اشارة للمجموع

$$(\text{ص} + \text{ص})^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \text{ص}^r \text{ص}^{n-r}$$

حيث $\sum_{r=0}^n$ تعني اننا نضع $r = 0, 1, \dots, n$ بالتتابع ثم نجتمع النتائج .

استخدمنا أيضاً n -عنصر صفر = n و n -عنصر n = n . وسنشرح هذه الطريقة بالتفصيل فيما بعد .

يمكن إيجاد معاملات ذات الحدين لـ $s + s^2$ ، $(s + s^2)^2$ ، $(s + s^2)^3$ ، $(s + s^2)^4$ ، $(s + s^2)^5$ ، ... من الشكل التالي (المعروف بمثلث باسكال)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

١٣ - [حلقة المصفوفات 2×2]

لتكن S حلقة لها عنصر محايد 1 . ولنفرض ان $M_2(S)$ هي مجموعة المصفوفات من الرتبة 2×2 التي مدخلاتها من S : وكل عنصر $A \in M_2(S)$ هو المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in S$.

نعرف $A = B$ اذا وفقط اذا كان $A = B$ ، $r = 1, 2, 3, 4$ ونعرف الجمع على $M_2(S)$ بالمصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = A + B$$

والضرب على $\mathbb{M}_2(\mathbb{M})$ بالمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1, 1 + 1, 1 & 1, 1 + 1, 1 \\ 1, 1 + 1, 1 & 1, 1 + 1, 1 \end{pmatrix}$$

اثبت ان $\mathbb{M}_2(\mathbb{M})$ هي حلقة صفرها هو $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ويدعى بالمصفوفة الصفرية. وعنصرها المحايد هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ويدعى المصفوفة الاحادية.

حلقة الاعداد الصحيحة \mathbb{Z} تبديلية ولكن عند ضرب $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

اثبت ان الحلقة $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ غير تبديلية.

١٤- اثبت ان الحلقة $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ (انظر التمرين ١٣) ليست حقلا. واذا كانت \mathbb{C} هي المجموعة الجزئية من $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ التي تتكون من المصفوفات التي

$$\text{على شكل } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ اثبت ان \mathbb{C} حقلا.

اعتبر الاقتران $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ المعرفة بـ

$$\phi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ واثبت ان } \phi \text{ متشاكل مع حقل الاعداد المركبة } \mathbb{C}$$

١٥ - لنأخذ المجموعة الجزئية $Q (\sqrt{2})$ من R حيث $Q (\sqrt{2}) = \{1 + b\sqrt{2} | a, b \in Q\}$.
 أثبت ان $Q (\sqrt{2})$ هي حقل تحت عملية الضرب والجمع في R . اي ان $Q (\sqrt{2})$ هي حقل جزئي من R .

١٦ - اذا كان S حقلاً جزئياً من Q فاثبت ان $Q = S$.

١٧ - ثبت ان $\exists N$. كما عرفنا من قبل فان R^N هي مجموعة النواتج الحقيقية المرتبة $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ حيث $s_i \in R$ وهكذا على سبيل المثال فان $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}) \in R^N$.
 اثبت ان R^N هو فضاء خطي حقيقي، اي فضاء خطي على R .
 اُس = (اُس١، اُس٢، ...، اُس٣) = (س١ + س٢، س١ + س٣، ...، س١ + س٣) = (س١، س٢، ...، س٣) عرف اُس = (اُس١، اُس٢، ...، اُس٣).

تحت هذه العمليات+ و اثبت ان R^N هو فضاء خطي حقيقي، اي فضاء خطي على R .
 ما المتجه الصفري هنا وما هو -س ؟

١٨ - في التمرين ١٧: لنفرض ان $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ، ولنفرض ان $A = (-1, 0, 1)$ ، $B = (2, 3, 4)$.
 حل المعادلة $16 + 5S = B$ في الفضاء الخطي الحقيقي R^3 .

١٩ - عرف $f: R^3 \rightarrow R^3$ بـ $f(s) = (s_1, s_2, s_3)$ حيث $s = (s_1, s_2, s_3)$.
 اثبت ان f تشكل من الفضاء الخطي R^3 الى نفسه.

٢٠ - باستخدام العمليات المعرفة في التمرين ١٧ تعرف ان R^N هو فضاء خطي حقيقي. الآن
 $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ عرف $f(S) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ في R^N عرف الضرب $S \cdot S = (s_1 s_2, s_1 s_3, \dots, s_1 s_n)$.

اثبت ان R^N هي جبرية تبديلية حقيقية ولها عنصر محايد و[ما هو؟]. اذا كانت $n < 1$.
 جد عنصراً $s \in R^N$ بحيث ان $s \cdot s = 1$ ولكل $s \in R^N$.

٢١ - لتكن S جبرية على الحقل \mathbb{C} ، حيث S ليس لها عنصر محايد. اعتبر الضرب

الديكارتية $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. اثبت ان \mathbb{C} تصبح فراغا خطيا على \mathbb{C} اذا اخذنا التعريف

$$ص + ص' = (أ + أ', س + س') \quad و \quad ب \cdot (أ, س) = (ب \cdot أ, ب \cdot س)$$

حيث $ص = (أ, س)$ \in \mathbb{C} ، الخروب $\in \mathbb{C}$.

عرف الآن عملية ضرب على \mathbb{C} كما يلي:

$$(أ, س) (أ', س') = (أ أ' - س س', أ س' + س أ')$$

اثبت ان \mathbb{C} هي جبرية لها عنصر محايد، [ما هو؟].

افصل لثاني

انظمة الاعداد

١ - الاعداد الطبيعية

يجب ان تحتوي اي مقدمة للتحليل الرياضي على مناقشة حقل الاعداد الحقيقية R . هذا لأن التحليل الاولي يناقش انواعاً مختلفة من الاقترانات (الاقترانات المتصلة والاقترانات القابلة للاشتقاق الخ) التي هي اقترانات من R الى R اي انها اقترانات في متغير حقيقي وتأخذ قيماً حقيقية . ولدراسة الموضوع بطريقة صحيحة يجب ان نعرف ان R هو حقل تام ومرتب كلياً (انظر الفصل الثالث - البند الاول)، وكثير من المؤلفين يبدأون بفرض معرفة ذلك ويفترضون ايضاً ان الطالب على معرفة ببعض خواص الاعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ والاعداد الصحيحة $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ والاعداد النسبية (الاعداد الكسرية) مثل $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.

ونستخدم الرموز N, Z, Q, R في هذا الكتاب، واستخدام الحرف Z للدلالة على الاعداد الصحيحة جاء من الكلمة الالمانية Zahlen التي تعني اعداداً صحيحة، وهذا يشير بطريقة

بسيطة الى المساهمة الكبيرة للرياضيين الالمان في موضوع التحليل .

هناك طريقة اخرى لدراسة التحليل هي افتراض المعرفة بـ N , Z , Q ثم بناء R عادة باستخدام طريقة مقاطع «ديدكاند» هذه الطريقة مستخدمة على سبيل المثال في كتاب هاردي المعروف وعلى اي شخص يرغب في دراسة هذا الاسلوب ان يقرأ البحث الاصيل للعالم الالماني الشهير ريتشارد ديدكاند (١٨٣١ - ١٩١٦) . هذا البحث مترجم الى الانكليزية وفيه يلاحظ الفرد وضوح طريقة العرض التي قدمها ديدكاند ويشاهد احدى الحلقات الهامة في الابداع الرياضي في القرن التاسع عشر . ونحن ننوي البدء من مستوى اقل إذ سنبدأ بمجموعة مسلمات لـ N ثم نبني بالتتابع Z , \bar{Q} و R . ومن ثم نبني حقل الاعداد المركبة \mathbb{C} في البند ٦ ، هذا أمر سهل عندما نفترض وجود \bar{R} . وسنرى ان الانتقال من N الى Z ومن Z الى Q ليس بتلك الصعوبة . والمشكلة الرئيسية هي الانتقال من Q الى R .

سنناقش الآن مسائل سهلة لتعطينا الحافز للوصول الى R :

لنفرض اننا نعرف انه لا يوجد $s \in N$ بحيث $s + 1 = 2$ ، اي انه لا حل لهذه المعادلة في N . لكننا ما زلنا نرغب في حل هذه المعادلة ومعادلات شبيهة ، لهذا علينا ان نوسع N بأن نقدم اشياء جديدة تكون فيها بطريقة معرفة تماماً ، حلولاً .

سنسعدو هذه الاشياء اعداداً صحيحة وسنرى ان مجموعة الاعداد الصحيحة Z هي حلقة . كذلك سنرى ان Z هي توسيع لـ N ونعني بذلك انه يمكن النظر الى N على انها مجموعة جزئية من Z . في هذه الحلقة الجديدة Z سنجد حلول معادلات مثل $s + 1 = 2$ ب لكل $a, b \in Z$.

وبالانتقال الى معادلات بسيطة مثل $s + 1 = 2$ سنرى انه لا حل لها في \bar{Z} . ومرة ثانية نوسع Z لنحصل على Q ، حقل الاعداد النسبية . لاحظ ان Q هي حقل في حين ان Z هي حلقة فقط . في Q نجد حلول معادلات مثل $s = 2$ حيث $a \neq 0$ ، a ، $b \in Q$. ولا حل للمعادلة $s^2 = 2$ في \bar{Q} ، لقد اثبت الاغريق القدامى هذه الحقيقة ، وسببت لهم بعض الحرج .

تنشأ هذه المعادلة عند دراسة مثلث قائم الزاوية طول كل من قاعدته وارتفاعه الوحلة .

من نظرية فيثاغورس فإن $س^2 = ١^2 + ١^2$ حيث $س$ هو طول الوتر. أى أن $س^2 = ٢$. بما أن الاغريق عرفوا الاعداد النسبية فقط فكل ما استطاعوا عمله هو إيجاد تقريب نسبي للحل. فعلى سبيل المثال $(\frac{١٧}{١٢})^2 > ٢ > (\frac{١٣}{١٢})^2$ ، ومنه $\frac{١٧}{١٢}$ و $\frac{١٣}{١٢}$ هما تقريبان غير دقيقين للحل، من اعلى ومن أسفل.

سيبدو ان فكرة تقريب الحل يمكن ان تصل الى درجة كافية من الدقة (باستخدام متاليات كوشي والمتاليات التقاربية للاعداد النسبية) ليتم بناء R من Q . ولم يتم ذلك الا في القرن التاسع عشر على يد كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨).

وسوف نستخدم طريقة كانتور، بأسلوب حديث. وما تفعله الطريقة هو دراسة مجموعتين من المتاليات اللانهائية المكونة من عناصر في Q . فالمجموعة الاولى هي حلقة متاليات كوشي، $س$ ، والثانية هي المتالية $م$ المكونة من المتاليات التي تقرب من الصفر. ومن ثم نكون الحلقة الكسرية $س/م$. هذه الحلقة هي الاعداد الحقيقية R ، وهي حقل يحتوي على حل $س^2 = ٢$ ، وحيث Q تشكل حقلًا جزئيًا من R .

سنبي هذه المقدمة بذكر انه لا حل للمعادلة التربيعية $س^2 + ١ = صفرًا$ في R . هذا يعني لبناء حقل الاعداد المركبة \mathbb{C} حيث يوجد حل لهذه المعادلة. ونجد ان كل معادلة $أ. + أ١س + ... + أنس^n = صفرًا$ حيث $n \in N$ لها حل في \mathbb{C} . من هذا يتضح ان توسيع R الى \mathbb{C} هو نهائي بمعنى ما.

وقبل ان نبدأ نذكر ان معالجتنا للاعداد الطبيعية ستكون بشكل مختصر وذلك لان اثبات جميع خواص N يستغرق وقتاً طويلاً (انظر كتاب لاندو). نصح القاريء الذي لا يرغب في تأمل مسلمات N الخمس ان يتقل الى نظرية ١ حيث ذكرنا خواص N التي نحتاج اليها.

مجموعة الاعداد الطبيعية : N

هي مجموعة غير خالية من اشياء تحقق المسلمات التالية، وتعرف باسم مسلمات بيانو

نسبة الى الرياضي الايطالي بيانو (١٨٥٨ - ١٩٣٢).

N : يوجد عنصر في N يرمز له بالرمز ١ .

N : يوجد اقتران ق : $N \leftarrow N$ يسمى الاقتران التالي.

نكتب ق(أ) = \bar{A} لكل $A \in N$

ندعو \bar{A} تابع A .

N : $\bar{A} \neq 1$ لكل $A \in N$

N : الاقتران التالي هو واحد لواحد اي ان \bar{B} تتضمن $A = B$

N : (مسلمة الاستقراء) : لتكن S مجموعة جزئية من N فاذا كان $1 \in S$ و $\bar{A} \in S$ من لكل

$A \in S$ فان $S = N$. ويمكن استنتاج علم الحساب من مسلمات بيانو الا ان الأمر صعب.

وما سنحاول عمله هو ان نبين كيف يمكن الحصول على بعض خواص N الهامة.

من N فان $1 \in N$ ومن N فان $1 \neq \bar{1}$.

سنرمز لـ $\bar{1}$ بالرمز 2 ، لهذا فان $1 \neq 2$. من الطبيعي ان نفكر بـ 1 «كأول» عنصر في N وبـ 2

«كثاني» عنصر. بما ان $2 \in N$ فمن N ينتج ان $\bar{2} \in N$. من N نحصل على $\bar{1} + \bar{2}$.

لوفرضنا ان $\bar{2} = 1$ فان N تعطي $1 = 2$ وهذا يناقض $1 \neq 2$. اذن الفرض $\bar{2} = 1$ هو

خطأ، لهذا فان $\bar{2} \neq 1$. سنرمز لـ $\bar{2}$ بالرمز 3 . لقد اثبتنا ان $1, 2, 3$ هي ثلاثة عناصر

مختلفة في N . وبمتابعة هذه الطريقة يمكن ان نكتب عناصر N بالطريقة المعتادة: $1, 2, 3, \dots$

من مسلمات بيانو فقط يمكن اثبات انه يوجد اقتران ج : $N \times N \leftarrow N$ بحيث ان ج(أ)

$1, 2, \dots$ = \bar{A} لكل $A \in N$ وبحيث ج(أ، ب) = ج(أ، ب). هذا الاقتران يسمى عملية

الجمع ونكتب ج(أ، ب) = $A + B$. اذن يمكن كتابة خاصيتي ج على شكل:

$$1 + \bar{A} = \bar{A} + 1 \text{ و } 1 + (A + B) = (1 + A) + B$$

من الواضح ان هذه النتائج تشكل اسس خاصية التجميع لعملية الجمع، اي ان $A +$

(ب + ج) = (أ + ب) + ج لكل $A, B, C \in N$. نجد البرهان في نظرية ١.

وبعد ان تم التوصل الى عملية الجمع يمكن اثبات انه يوجد عملية ضرب وحيدة

بحيث ان

$$1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 0 \cdot 0 = 0$$

سوف نحذف النقطة ونكتب $0 \cdot 1 = 0$ ب = أ ب . وتفاصيل كيفية استنتاج عمليتي الجمع والضرب من مسلمات بيانو تجدوها في كتاب لاندو.

وفكرة ترتيب بعض العناصر هي فكرة هامة في التحليل . ففي N نعرف الترتيب بان نقول $a < b$ اذا وفقط اذا كانت $a = b + c$ حيث $c \in N$. نقرا $a < b$ « a اكبر من b » ويكافي ذلك $b < a$ من « a تكتب ايضاً $b > a$ ، لهذا فان $a < b$ وب $a > b$ هما طريقتان مختلفتان لكتابة نفس الشيء . $a \leq b$ تعني $a < b$ او $a = b$. لهذا يمكن ان نقول $1 \leq 1$ و $1 \leq 2$.

والنظرية التالية تلخص خواص عديدة وهامة لـ N . ودراسة البراهين المقدمة مهمة ولكنها ليست ضرورية لفهم ما يأتي بعدها .

النظرية ١ : لتكن a, b, c عناصر في N . فان

$$(1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{و} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) .$$

$$(2) \quad a + b = b + a \quad \text{و} \quad a \cdot b = b \cdot a .$$

$$(3) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) .$$

$$(4) \quad \text{اذا كان } a + b = a \text{ فان } b = 0 .$$

$$(5) \quad \text{اذا كان } a \cdot b = a \text{ فان } b = 1 .$$

(٦) (قانون التثليث) : لأي a, b تتحقق واحدة وواحدة فقط من الحالات الثلاث التالية :

$$a = b \quad \text{و} \quad a < b \quad \text{و} \quad b < a$$

$$(7) \quad 1 \leq a \quad \text{لكل } a \in N .$$

$$(8) \quad \text{اذا كان } a > b \text{ و } b > c \text{ فان } a > c .$$

$$(9) \quad \text{اذا كان } a < b \text{ فان } a + c < b + c \quad \text{و} \quad a \cdot c < b \cdot c .$$

$$(10) \quad \text{اذا كان } a < b \text{ فان } a \leq b + 1 \quad \text{أي ان}$$

$$a < b + 1 \quad \text{او} \quad a = b + 1$$

(١١) خاصية الترتيب الحسن

كل مجموعة جزئية غير خالية من N تحتوي على اصغر عنصر. اي انه يوجد عنصر $v \in N$ بحيث ان $v \leq a$ لكل $a \in N$.

البرهان: سنقدم عينة من البراهين

لنأخذ العبارة الاولى في (١) وهي خاصية التجميع للجمع؛ لنثبت A ، B ولنفرض ان $v = \{ a \in N \mid (a+b) = a+b \}$ الآن $(a+b) = 1 + (a+b) = 1 + a + b$ هي احدى خواص $+$ ، لهذا فان $v \neq \emptyset$. لنفرض ان $v \neq \emptyset$. اذن $(a+b) = \bar{a} + \bar{b} = (\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})$ $\bar{a} + \bar{b} = (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{b}$ لهذا فان $v \neq \emptyset$.

من N ، مسلمة الاستقرار، نجد ان $v \neq \emptyset$. لهذا فان $v \neq \emptyset$ N تعطي $v \neq \emptyset$ اي ان $(a+b) = \bar{a} + \bar{b} = (\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})$ لكل $a \in N$.

الآن نبرهن (٤). لنفرض ان $a+b = \bar{a} + \bar{b}$ ولكن $b \neq \bar{b}$. لنفرض ان $v = \{ a \in N \mid (a+b) = \bar{a} + \bar{b} \}$. من N نحصل على $\bar{b} \neq \bar{b}$ ، اي ان $b + 1 \neq \bar{b} + 1$. لهذا فان $v \neq \emptyset$. لنفرض ان $v \neq \emptyset$. اذن $a+b \neq \bar{a} + \bar{b}$ ومنه $(a+b) \neq (\bar{a} + \bar{b})$ فاذن $\bar{a} + \bar{b} \neq \bar{a} + \bar{b}$ ، اي ان $\bar{a} \neq \bar{a}$ من N ، فان $\bar{a} + \bar{b} \neq \bar{a} + \bar{b}$ لكل $a \in N$. وهذا يناقض الفرض $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$. لهذا يجب ان يكون $b = \bar{b}$.

وكعينة اخيرة سنبرهن (٨) اذا كان $a > b$ فان $b = \bar{a} + d$. واذا كان $b > a$ فان $b = a + d$. ومن (١) $(a+d) = a + d = (a+d) = (a+d)$ وهذا يعطي $a > b$.

قد يكون القاريء على معرفة بمسلمة الاستقرار بصورة مكافئة. وهي: اذا كانت ج(ن) جملة مفتوحة تعتمد على $a \in N$ واذا كانت ج(١) صحيحة. وكانت ج(١+ن) صحيحة عندما تكون ج(ن) صحيحة، فان ج(ن) تكون صحيحة لكل $a \in N$.

من الآن فصاعداً سنفرض ان معنى a معروف حيث $a \in N$. سنعرف $a^0 = 1$ و $a^1 = a$ ، الخ، ولكننا بحاجة لاستخدام N لاثبات وجود اقتران وحيد، q ، بحيث ان $q(n) = 1 + a^q(n)$ لكل $n \in N$ ، اي ان $q(n) = a^n$ ، حيث a^1 تعني a .

المثال ١ .

لثبت باستعمال الاستقراء ان $\forall n < \infty \exists N$.

لنفرض ان ج (ن) هي الجملة المفتوحة $\forall n < \infty$. الآن $\forall n < \infty \exists N$ (١) صحيحة .
لنفرض ان ج (ن) صحيحة . فالجزء (٩) من النظرية ١ يعطي $\forall n < \infty \exists N$. لكن تعريف
الضرب يعطي $\forall n < \infty \exists N$ ومنه $\forall n < \infty \exists N$. من الجزء (٧) من النظرية ١ نحصل
على $\forall n < \infty \exists N$ فباستخدام (٩) من النظرية ، نحصل على $\forall n < \infty \exists N$. لهذا فان
 $\forall n < \infty \exists N$ ، و $\forall n < \infty \exists N$ وهذا يعطي $\forall n < \infty \exists N$ من الجزء (٨) النظرية ١ . هذا
يثبت ج (ن) (١ + ن) صحيحة ومن الاستقراء نستنتج ان ج (ن) صحيحة لكل $\exists N$ ، اي ان
 $\forall n < \infty \exists N$.

المثال ٢

باستعمال الاستقراء يمكن اثبات ان اي عدد طبيعي يكون اما زوجياً او فردياً ولا يمكن
ان يكون الاثنين ، اي انه يمكن كتابة اي A اما على صورة $A = 2n$ لنعصر ما $\exists n$ ، واما
على صورة $A = 2m + 1$ لنعصر ما $\exists m$ الا عندما يكون $A = 1$. سنعتبر العدد ١ عدداً
فردياً . مثبت الآن انه لا يوجد A ، $\exists N$ بحيث ان $A = 2n$. (باستخدام فكرة
الاعداد النسبية فان هذا سيثبت انه لا يوجد حل موجب على صورة $\frac{1}{2}$ للمعادلة $2 = \frac{1}{2}$) .
لنفرض انه يوجد A ، $\exists N$ بحيث ان $A = 2n$. من الواضح ان $A < 1$. فإذا
كان A فردياً فان $A = 2m + 1$ ومنه $2m + 1 = 2n$ وهذا مستحيل . اذن يجب ان يكون A
زوجياً ، $A = 2$. لهذا فان $A = 2$ ومنه $A = 2n$ ومنه نستنتج ان A زوجي ، $A = 2$.
 $\forall n < \infty \exists N$. لتأخذ الجملة المفتوحة ج (ن) التي تنص على ان $A = 2n$ ، $\forall n < \infty \exists N$ ر
 $\exists N$. لقد اثبتنا ان ج (١) صحيحة . لنفرض ان ج (ن) صحيحة . اذن $\forall n < \infty \exists N$ ، $\forall n < \infty \exists N$
ر ، $A = 2n$. وهذا يعطي $A = 2r$ ومنه نستنتج ان r وهما عدداً زوجيان ، و $A = 2$ ، $r = 1$
 $\forall n < \infty \exists N$. وهذا يعطي $A = 2$ ، $\forall n < \infty \exists N$ ، ومنه نستنتج ان ج (١ + ن) صحيحة . ومن

الاستقراء ينتج ان $\exists \epsilon > 0$ ، ولكل $N \geq 1$ وبشكل خاص فان $\epsilon > 0$ ولعصرما، و $\exists N$ ولكننا اثبتنا في المثال ١ ان $\epsilon > 0$ واما ان $\epsilon \leq 0$ ، نحصل على $\epsilon = 0$ و $\epsilon < 0$ وهذا تناقض لان $\epsilon = 0$ ولا يمكن ان يكون $\epsilon < 0$ ، من الجزء ٦) من النظرية ١. اذن لا يوجد $\epsilon > 0$ بحيث ان $\epsilon = 0$ و $\epsilon < 0$.

تمارين ٢ - ١

(نجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين)

١ - باستخدام مسطرة الاستقراء على

$$S_N = \{a \mid N \exists a \leq 1\}, \text{ حيث ان } a \leq 1 \text{ لكل } a \in N.$$

٢ - أثبت خاصية الترتيب الحسن، (١١)، من النظرية ١.

کارشاد : $\{a \mid a \geq 1 \text{ کل عنصر من } S\}$.

۳۔ بدراسة من $\{1\} \cup \{a \mid a = 2b \text{ أو } a = 2b + 1\}$

اثبت ان كل عدد طبيعي يكون اما زوجياً واما فردياً

اثبت انه من المستحيل ان يكون $2 = 1 + 1$

۴- اثبت انه لا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث ان $1 > n > 2$

٥- اثبت ان $2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)/2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

٦- ثبت $\exists N$. اثبت ان $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + \frac{1}{n}$ لكل $n \geq N$.

٧- هناك صورة ماذجة للاستقراء تنص على انه اذا كانت ج (ن) صحيحة لـ $n = 1, 2, \dots$

... (الى ان يتعب الفرد من التحقق) فان ج (ن) صحيحة لكل ن $\exists N$. ادرس هذا على

ج (ن) المعطاة بـ $2^N < (1 + N)^3$.

٨- اثبت ان $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \geq a, b$.

اذا كان $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ ، N

اثبت باستخدام الاستقراء ان

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

٩- نقول ان $a \in N$ يقبل القسمة على $b \in N$ اذا كان $a = b \cdot c$ لعنصر ما $c \in N$.

اثبت ان $n(5 + n)$ يقبل القسمة على ٦ لكل $n \in N$.

١٠- اثبت انه لا يوجد $a, b \in N$ بحيث ان $a^2 = b^3$.

٢- الاعداد الصحيحة

سوف نبين الآن كيف نبني الاعداد الصحيحة Z من الاعداد الطبيعية N : لنأخذ $X \times N$

N ولنرمز لعناصرها بـ (a, b) ، (c, d) الخ، حيث $a, b, c, d \in N$. ولنعرف

العلاقة \sim على $N \times N$ كما يلي:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ اذا وفقط اذا كان } a + d = b + c \dots (1)$$

سنثبت في النظرية ٢ ان \sim هي علاقة تكافؤ. سنبسط الرموز بان نكتب $[a, b]$

$$= [a, b], \text{ حيث } [a, b] \text{ هو صف التكافؤ الذي يحتوي على } (a, b).$$

يسمى كل صف تكافؤ عدداً صحيحاً، وترمز Z الى مجموعة صفوف التكافؤ هذه.

ونعرف عمليات الجمع والضرب على Z كالآتي

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \dots (2)$$

$$[a, b] \times [c, d] = [ac, ad + bc - ac] \dots (3)$$

والنتيجة التالية تثبت ان $(Z, +, \times)$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

النظرية ٢: استناداً الى العمليات المعرفة في (٢)، (٣) تصبح Z حلقة تبديلية ذات عنصر

محايد، وصفرها هو $[1, 1]$ ويرمز له بالرمز 0 ، والعنصر المحايد هو $[2, 1]$ ويرمز له بالرمز 1

(سنعرف السبب فيما بعد). كما ان قانون الاختزال يتحقق في Z :

$$a \times b = c \times b, b \neq 0 \text{ تعطي } a = c.$$

البرهان

البرهان مباشر ولكنه يكون مملأ إذا كتب بجميع تفاصيله . فستثبت بعض النتائج ونترك الباقي كتمرين :
 أولاً نثبت ان (١) تعرف علاقة تكافؤ : بما ان $a + b = b + a$ فان (أ ، ب) \sim (أ ، ب). الآن اذا كان (أ ، ب) \sim (ج ، د) فان $a + b = d + c$ وبمنه $c + b = d + a$ اي ان (ج ، د) \sim (أ ، ب). واختيراً ، لنفرض ان (أ ، ب) \sim (ج ، د) و (ج ، د) \sim (ي ، ز). اذن $a + d = b + c$ و $c + z = d + y$ وباستخدام خواص الاعداد الطبيعية المعروفة (النظرية ١) نحصل على $a + d + z = b + c + y$ و $c + d + y = r + b + z$. لهذا فان $a + r = b + y$ اي ان (أ ، ب) \sim (ي ، ز) .
 اذن \sim هي علاقة تكافؤ على $N \times N$.
 يجب ان نثبت ان العمليتين (٢) ، (٣) صحيحتا التعريف . سوف نتحقق من (٢) فقط . وذلك بان نثبت انه اذا كان [أ ، ب] = [أ' ، ب'] و [ج ، د] = [ج' ، د'] فان
 $[أ + ج ، ب + د] = [أ' + ج' ، ب' + د']$.
 الآن اذا كان $a + b = a' + b'$ و $c + d = c' + d'$ فان
 $a + c + b + d = a' + c' + b' + d'$ وبمنه
 $(a + c ، b + d) \sim (a' + c' ، b' + d')$. ولهذا فان [أ + ج ، ب + د] = [أ' + ج' ، ب' + د'] .

وتنتج خاصيتا الجمع والتبديل على (Z ، +) بسهولة من (٢) ومن الخواص المشابهة على (N ، +) .

والصفر في (Z ، +) هو [١ ، ١] لان

$$[أ ، ب] + [١ ، ١] = [أ + ١ ، ب + ١] = [١ ، ١] \text{ من (٢). وكذلك فإن}$$

$$[أ + ١ ، ب + ١] = [١ ، ١] \text{ من (١). اذن ويكتابة } [١ ، ١] \text{ نحصل على } [أ ، ب] + [١ ، ١] = [أ ، ب] .$$

$$\text{بما ان } [أ ، ب] + [ب ، أ] = [أ + ب ، ب + أ] = [١ ، ١] = ٠ ،$$

نجد ان [ب ، أ] هو نظير [أ ، ب]. لهذا اذا كان $\text{ح} = [أ ، ب]$ عدداً صحيحاً فان $\text{ح} = [ب ، أ]$ وح + (ح) = ٠ ونكتب هذه العبارة الاخيرة على صورة $\text{ح} - \text{ح} = ٠$

باستخدام (٣) و(١) من السهل ان نرى ان [١ ، ٢] هو العنصر المحايد لعملية الضرب. اي ان $[أ ، ب] \times [١ ، ٢] = [أ ، ب]$.

والتأكد من باقي شروط الحلقة لـ Z هو تمرين سهل. سنثبت الآن خاصية الاختزال (٤):

نفرض ان $\text{س} = [أ ، ب]$ ، $\text{ص} = [أ' ، ب']$ ، $\text{ع} = [ج ، د]$. اذن $\text{س ع} = \text{ص ع تعطي}$:

$$[أ ح + ب د ، أ د + ب ح] = [أ ح + ب' د ، أ' د + ب' ح] ،$$

$$أ ح + ب د + أ' د + ب' ح = أ د + ب ح + أ' د + ب' ح ،$$

$$\text{ح}(أ + ب) + \text{د}(أ' + ب') = \text{ح}(أ + ب) + \text{د}(أ' + ب')$$

لنقل $\text{ح و د} = \text{دي} = \text{حي} + \text{دو}$ (حيث $\text{و} = أ + ب'$ ، $\text{ي} = أ' + ب$) (٥)

بما ان $[ج ، د] \neq ٠$ نحصل على $\text{ح} \neq \text{د}$. ومن (٦)، النظرية ١، يكون $\text{ح} < \text{د}$ أو

$\text{د} < \text{ح}$ اذا كان $\text{ح} = \text{د} + \text{ن}$ لعنصر ما $\text{ن} \in N$ فان (٥) تعطي

$$\text{د و} + \text{و د} = \text{دي} = \text{دي} + \text{ني} + \text{د و}$$

$$\text{ن و} = \text{ني} ،$$

$$\text{و} = \text{ي} \quad \quad (٦)$$

اذا كان $\text{ح} > \text{د}$ نحصل على (٦) بطريقة مشابهة. اذن $\text{و} = \text{ي}$ اي ان $\text{أ} + \text{ب}' = \text{أ}' + \text{ب}$

لهذا فان $(أ ، ب) \sim (أ' ، ب')$ ومنه $[أ ، ب] = [أ' ، ب']$ اي ان $\text{س} = \text{ص}$. هذا يثبت خاصية

الاختزال وينهي برهان النظرية.

تعرف فكرة الترتيب على Z بالتالي:

$[أ ، ب] < [ج ، د]$ اذا وفقط اذا كان $\text{أ} + \text{د} < \text{ب} + \text{ج}$ (٧)

فعلاقة الترتيب معرفة تعريفاً حسناً ، وثلاثية التقسيم. ونعني بذلك انه اذا كان $\text{س} \in Z$

فان واحدة فقط من الحالات الثلاث التالية تتحقق: $\text{س} = \text{ص أو س} < \text{ص أو ص} < \text{س}$

وكالعادة نكتب $\text{ص} > \text{س}$ لتعني $\text{ص} < \text{س}$.

المثال ٣.

لاي $\text{س} \in \mathbb{Z}$ فان $\text{س}^2 \leq 0$. لبرهنة ذلك نفرض ان $\text{س} = [\text{أ} , \text{ب}]$ ، حيث $\text{أ} , \text{ب} \in \mathbb{N}$. اذن $\text{س}^2 = [\text{أ}^2 + \text{ب}^2 , 2\text{أب}]$. اذا استطعنا اثبات ان

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 \leq 2\text{أب} \quad (A)$$

فاننا سنحصل على $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + 1 \leq 2\text{أب} + 1$ ومنه $\text{س}^2 \leq [1 , 1] = 0$.

لاثبات (A) ، نفرض أولاً ان $\text{أ} = \text{ب}$. اذن $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 2\text{أ}^2 = 2\text{أب}$ ، اذن (A) تتحقق.

ثانياً لنفرض ان $\text{أ} < \text{ب}$ اذن $\text{أ} = \text{ب} + \text{ن}$ لعنصر ما $\text{ن} \in \mathbb{N}$. اذن $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = (\text{ب} + \text{ن})^2 + \text{ب}^2 = 2\text{ب}^2 + 2\text{ب}\text{ن} + \text{ن}^2 = 2\text{ب}(\text{ب} + \text{ن}) + \text{ن}^2 = 2\text{أب} + \text{ن}^2 > 2\text{أب}$ ، اذن (A) تتحقق . والحالة $\text{أ} > \text{ب}$ تعطي (A) بطريقة مشابهة .

لقد اثبتنا ان مربع اي عنصر في \mathbb{Z} يكون دائماً غير سالب ، اي انه اكبر من ، او يساوي الصفر . ومن الواضح انه اذا كان $\text{س} \neq 0$ فان $\text{س}^2 < 0$.

والنظرية التالية تعبر عن خاصيتين من خواص الاعداد الصحيحة . وفي الحقيقة ان هاتين الخاصيتين تتحققان في اي حلقة . وهما : «حاصل ضرب اي عدد صحيح في الصفر يساوي صفراً» ، و«السالب مضروباً في السالب موجب» .

النظرية ٣.

اذا كان $\text{س} , \text{ص}$ عددين صحيحين فان

$$(1) \quad \text{س} \times 0 = 0 ,$$

$$(2) \quad (-\text{س}) \times (-\text{ص}) = \text{س} \times \text{ص} .$$

البرهان :

(١) $0 = 0 + 0$ ، فمن خاصية التوزيع نحصل على $0 \times 0 = 0 \times 0 + 0 \times 0$.
 لنفرض ان $0 \times 0 = 0$ ، لهذا $0 = 0 + 0$. لكن 0 له نظير جمعي -0 يحقق $0 + (-0) = 0$. ومنه $0 = 0 + (-0) = (0 + 0) + (-0)$ ، فخاصية التجميع تعطي $0 = 0 + (0 - 0) = 0$. لهذا فان $0 \times 0 = 0$ وهذا يثبت (١) .

(٢) من (١) نحصل على

$0 = 0 \times 0 = (0 - 0) = (0 + (-0)) = (0 - 0) + (-0) = 0 + (-0)$ ، باضافة 0 الى طرفي هذه المعادلة ينتج :

$0 + 0 = 0 + 0 + (-0) = 0 + (0 - 0) = 0 + 0 = 0$ ، اذن من (١) نحصل على $0 = 0 + (-0)$ ، وهذا يثبت النظرية .

ويمكن ان نوضح الاعداد الطبيعية N على شكل اقتران واحد لواحد يحافظ على الترتيب من N الى مجموعة جزئية من Z ، وهذا يمكننا من اعتبار N كمجموعة جزئية من Z .
 وسنوضح هذا الاقتران في النظرية التالية ، وهو ينقل 1 الى N في $[1, 2]$ ، وهذا يفسر سبب استخدامنا للرمز 1 ليدل على $[1, 2]$ في النظرية ٢ .

النظرية ٤ .

لتكن $S = \{ [1, 2], [1, 3], [1, 4], \dots \}$. اذن يوجد اقتران تقابل ق :
 $N \leftarrow S$ يحافظ على الجمع والضرب والترتيب .
 تسمى المجموعة S مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة وسنعاملها في المستقبل كأنها N

البرهان :

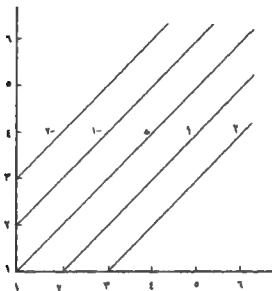
عرف ق بـ $q(n) = [1, 1 + n]$ لكل $n \in N$. من الواضح ان ق اقتران شامل .

الآن اذا كان ق(ن) = ق(م) فان $(ن، ١ + ١) \sim (م، ١ + ١)$ ومنه $٢ + ن = ٢ + م$ ، واذن $ن = م$. لهذا فان ق واحد لواحد .

الآن لتأخذ اي عنصرين $ن، م \in N$. اذن ق(ن) + ق(م) = $[٢ + م + ٢، ١] = [٢ + ن + ٢، ١]$. وبطريقة مشابهة فان ق(م) = ق(ن) ، اي ان ق يحافظ على عمليتي الجمع والضرب .

اخيراً، لنفرض ان $ن < م$. اذن $٢ + ن < ٢ + م$ ، ومنه $[١ + ١، ١] < [١ + ١، ١]$ من (٧) ، لهذا فان ق(ن) < ق(م) . اي ان ق يحافظ على الترتيب . وبذا يتم برهان النظرية .

الخطوط المائلة في الشكل التالي تمثل الاعداد الصحيحة



فالخط المستقيم الذي ميله ١ ويمر في (أ ، ب) يمثل العدد الصحيح [أ ، ب] . لهذا فان الخط الذي يمر بـ (١ ، ١) يمثل ٠ ، والخط الذي يمر بـ (٢ ، ١) يمثل ١ ، والخط الذي يمر بـ (١ ، ٢) يمثل ١- ، وهكذا .

من الآن فصاعداً سنكتب عناصر Z على شكل $0, 1, -1, 2, -2, \dots$.
وسندعو $\{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية أو الأعداد الصحيحة الموجبة،
 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة، و $\{-1, -2, -3, \dots\}$
هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة، حيث نعرف $-n = [1, n]$.

المثال ٤.

المعادلة $1 = 2 + 1$ التي لا حل لها في N ، لها حل في Z . لأنه باستخدام $[1, 2]$ ،
 $2 = [1, 3]$ نحصل على $[1, 3] = [2, 1] + [1, 3]$ ، أي أن $[1, 2] = 1 + 2$ ، ومنه
 $1 = [2, 1] - 1$ هو حل.

تمارين ٢-٢

(تجد في آخر الكتاب إرشادات لحل بعض من هذه التمارين)

- ١- إذا كان $1^2 = 1$ في Z ، فاثبت أن $0 = 1$ أو $1 = 1$.
- ٢- جد اقتران تناظري: $N \rightarrow Z$. هذا الاقتران يثبت أن N و Z متكافئتان كمجموعتين.
- ٣- اثبت قانون الانقسام الثلاثي في Z . اثبت كذلك خاصية التمددي، أي أن $a > b$ و
 $b > c$ تعطي $a > c$.
- ٤- اثبت أنه في Z ، $a < b$ إذا وفقط إذا كان $a + c < b + c$. ومنه اثبت أن $a < b$
إذا وفقط إذا كان $-a > -b$.
- إذا كان $c < 0$ ، اثبت أن $a < b$ إذا وفقط إذا كان $a < b$.
- ٥- عرف اقتران القيمة المطلقة $q: Z \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بـ $q(a) = |a|$ إذا كان a
 ≤ 0 و $q(a) = -a$ إذا كان $a > 0$. وعادة نكتب $q(s) = |s|$. اثبت أنه في Z ، $|a| + |b|$
 $= |a + b|$ و $|a| + |b| \geq |a| + |b|$. أعط مثالا حيث $|a + b| > |a| + |b|$.
- ٦- إذا كان $a, b \in Z$ و $1^2 < b^2$ هل نستطيع أن نستنتج أن $a < b$ ؟

٧- في Z ، اثبت ان $a^2 + ab + b^2 \leq 0$. ومنه اثبت ان $a < b$ تعطي $a^3 < b^3$.

٣. الأعداد النسبية

ليس هناك جديد في عملية بناء حقل الأعداد النسبية من الحلقة Z . لهذا سنوِّج البحث .

لنكتب

$$\text{م} = \{ (a, b) \mid a, b \in Z, b \neq 0 \} .$$

لتعرّف $(a, b) \sim (c, d)$ اذا وفقط اذا كان $ad = bc$. ان \sim هي علاقة تكافؤ على م . وسوف نكتب

$$ك_{(a,b)} = \frac{a}{b}$$

حيث $ك_{(a,b)}$ هو صف التكافؤ الذي يحتوي على (a, b) . يسمى كل صف تكافؤ عددا نسبيا، Q ترمز الى مجموعة جميع الأعداد النسبية .

نؤكد هنا على انه في اي عدد نسبي $\frac{a}{b}$ فان المقام $b \neq 0$. ويمكن للبسط a ان يساوي الصفر .

نعرف عمليتي الجمع والضرب على Q بالطريقة المألوفة :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} (٩)$$

وانه لأمر مباشر اثبات ان هاتين العمليتين هما صحيحتا التعريف وان Q مع العمليتين

في (٩) هي حلقة تبديلية صفرها $\frac{0}{1}$ وعنصرها المحايد $\frac{1}{1}$. ولكي تثبت ان Q هي حقل،

لنفرض ان $\frac{1}{b}$ هو عنصر في Q لا يساوي الصفر. اذن $a \neq 0$ ومنه $\frac{a}{1} \in Q$. اذن من (٩)

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{a}{1} = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

اي ان نظير $\frac{1}{b}$ في عملية الضرب هو $\frac{1}{1}$ ، لكل عنصر $\frac{1}{b}$ لا يساوي الصفر.

من الواضح انه يمكن ان تطابق Z مع $\{\frac{a}{1} \mid a \in Z\}$ ، وسوف نكتب $0 = \frac{0}{1}$ و

$1 = \frac{1}{1}$ حيث 0 هو صفر Q ، 1 هو عنصرها المحايد.

وسنرى الآن كيف نعرف الترتيب في Q : اذا كان $a < 0$ ، و $b < 0$ فاننا نرغب في

ان يكون $\frac{a}{b} < 0$ ولكن $\frac{a}{b} = \frac{(-a)}{(-b)}$ ، لذلك اذا كان $a > 0$ ، و $b > 0$ فان $(-a) < 0$ و

$(-b) < 0$. اذن من الطبيعي ان نعرف $\frac{a}{b}$ كمعد موجب، اي ان $\frac{a}{b} < 0$ ، كما يلي:

$\frac{a}{b} < 0$ اذا فقط اذا كان $ab < 0$. (١٠)

ثم نعرف $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ لتعني ان $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$ ، اي ان $\frac{ad-bc}{bd} < 0$.

ومن (١٠) نحصل على

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ اذا فقط اذا كان $(ad-bc)bd < 0$. (١١)

وكالمادة اذا كان s ، $s \in Q$ فاننا سنكتب $s > s$ لتعني $s < s$.
 مستتب الآن ان Q حقل مرتب كلياً .

النظرية ٥ .

الاعداد النسبية Q هي حقل . هذا الحقل مرتب كلياً ، اي انه يحقق :
 ت١ . (قانون التثليث) اذا كان s ، s عنصرين في Q ، فان واحدة فقط من الحالات التالية صحيحة : $s = s$ أو $s < s$ أو $s > s$.
 ت٢ . (التعدي) $s > s$ و $s < s$ تعطي $s > s$.
 ت٣ . (وتيرية الجمع) $s > s$ تعطي $s + s > s + s$.
 ت٤ . (وتيرية الضرب) $s > s$ و $s < s$ تعطي $s \cdot s > s \cdot s$.
 البرهان .

لقد ذكرنا ان Q هي حقل . لنبرهن ت١ ، لنفرض ان $s = \frac{a}{b}$ ، $s = \frac{c}{d}$. فاذا كان $s \neq s$ فان $a \neq b$ ، ومنه $a \neq b$ و $a \neq b$ من خاصية الاختزال في Z . اذن قانون الانقسام الثلاثي في Z يعطي $a \neq b$ أو $a \neq b$ أو $a \neq b$. ففي الحالة الاولى نحصل على $a \neq b$ - $a \neq b = (a - b) \neq b < 0$ ، ومن (١١) نحصل على $s < s$. وفي الحالة الثانية نحصل على $s > s$. هذا يثبت ت١ . ونترك برهان ت٢ ، ت٣ ، ت٤ كتمرين .
 لاثبات ت٢ لنفرض ان $s > s$ و $s < s$. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (١١) تعطي $a \neq b$ و $a \neq b$ ، ومنه $a \neq b$ و $a \neq b$ ، وبما ان $a < 0$ فمن المثال ٣ نحصل على

(ب حوى - أدوى) ب دى $2 < 0$ ،

وهذا يكافئ ص ع $<$ س ع من (١١). هذا يعني برهان النظرية .

وبما ان Q حقل فانه لكل $s \neq 0$ يوجد نظير s^{-1} بحيث ان $s \cdot s^{-1} = 1$. واذا كان

$$s = \frac{a}{b} (a \neq 0, b \neq 0) \text{ فان } s^{-1} = \frac{b}{a} .$$

سوف نكتب ايضاً

$$s^{-1} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s \text{ لكل } s \neq 0} \text{ في } Q .$$

$\frac{ص}{س}$ أو $ص/س$ تعني العدد النسبي $ص/س$. فالذن اذا كان $s = \frac{a}{b} \neq 0$ وص $= \frac{ح}{د}$ فان

$$\frac{ص}{س} = \frac{ح/د}{a/b} = \frac{ص \cdot ب}{ا \cdot د}$$

اذا اعطينا زوجاً مرتباً $(س_1, س_2)$ من عددين نسبيين $س_1, س_2$ فاننا كثيراً ما نحتاج الى اخذ العدد الاكبر $(\overline{ا ك})$ والعدد الاصغر $(\overline{ا ص})$ من هذا الزوج المرتب . فمن قانون التثليث فان واحدة فقط من الحالات التالية تتحقق :

(١) $س_1 = س_2$ ، (٢) $س_1 > س_2$ ، (٣) $س_1 < س_2$.
نعرف «اكبر» كما يلي ففي (١) $\overline{ا ك} (س_1, س_2) = س_1$ ؛ وفي (٢) $\overline{ا ك} (س_1, س_2) = س_2$ ؛
وفي (٣) $\overline{ا ك} (س_1, س_2) = س_1$. اذن ، في جميع الحالات فان $\overline{ا ك} (س_1, س_2)$ هو
احد عناصر الزوج المرتب $(س_1, س_2)$ او
 $س_1 \geq \overline{ا ك} (س_1, س_2) \geq س_2$ حيث $س_1 \geq س_2$.

$$\text{فعلى سبيل المثال، } \overline{ا ك} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} .$$

وبالمثل : نعرف $\overline{ا ص} (س_1, س_2) = س_1$ في (١) ، $س_1$ في (٢) ، و $س_2$ في (٣) . واذن

فان $\overline{أص}$ (س_١ ، س_٢) هو احد عناصر الزوج المرتب (س_١ ، س_٢) وان

$$س_٢ \leq \overline{أص} (س_١ ، س_٢) \text{ حيث } ١ \geq ر \geq ٢.$$

فعلى سبيل المثال $\overline{أص}$ (٠ ، ١) = ١ - .

واذا اخذنا عنصراً مكوناً من ثلاثة اعداد نسبية مرتبة (س_١ ، س_٢ ، س_٣) فاننا نكتب

$$= \overline{أك} (س_١ ، س_٢ ، س_٣) = م ، \overline{أك} (١ ، س_٣) . اذن نرى ان م هو احد عناصر (س_١ ، س_٢ ، س_٣)$$

وان س_٣ \geq م حيث ١ \geq ر \geq ٣ . اذا عرفنا م = $\overline{أك}$ (س_١ ، س_٢ ، س_٣) فاننا نحصل على

$$س_٣ \geq \overline{أك} (س_١ ، س_٢ ، س_٣) \text{ حيث } ١ \geq ر \geq ٣.$$

وبطريقة مشابهة تعرف $\overline{أص}$ (س_١ ، س_٢ ، س_٣) .

ويشكل عام ، اذا كان (س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن) نوياً مرتباً من الاعداد النسبية ،

فانه يوجد اكبر واصغر عنصر بحيث ان ، ١ \geq ر \geq ن ،

$$س_٣ \geq \overline{أك} (س_١ ، س_٢ ، ... ، س_٣)$$

$$س_٣ \leq \overline{أص} (س_١ ، س_٢ ، ... ، س_٣).$$

$$\text{على سبيل المثال } \overline{أك} (٣ ، ٢ ، ١ ، ٤ ، \frac{1}{4}) = ٣ ، \overline{أص} (٥ ، -\frac{1}{٧} ، -\frac{1}{٣} ، ٢) = -\frac{1}{٣٠}.$$

وفي الحقيقة فانه اذا كان س > فان ع = $\frac{س+ص}{٢}$ هو عدد يحقق س > ع > ص .

بالاضافة الى احتواء Q على حل المعادلة ٢س = ١ ، أي س = $\frac{1}{٢}$ ، فان Q تتمتع

بخاصية لا تتمتع بها Z أو N . انها نوع من خاصية الكثافة حيث انه بين اي عددين نسبيين

مختلفين س و ص يوجد عدد نسبي ثالث ع لهذا فاذا كان س > ص فانه بالامكان إيجاد

بحيث ان س > ع > ص . باستخدام هذه الخاصية ثانية فانه يمكن إيجاد أ ، ب بحيث ان

س $> \text{أ} > \text{ع} > \text{ب} > \text{ص}$. ويتكرر ذلك فانه يمكن ان نجد اي عدد نريده من الاعداد النسبية بين س ، ص .

على سبيل المثال، س $>$ ص تعطي $\frac{2}{3}$ س $>$ ص + ص من $\frac{1}{3}$ ، ولهذا س $> \frac{(ص + س)}{4}$ من

ت . لهذا فان س $> \text{ع}$ ، وبطريقة مشابهة ع $> \text{ص}$.

والنظرية التالية تتحدث عن حقيقة واضحة ولكن مفيدة . هذه النتيجة معروفة منذ القدم واصبحت تعزى الى ارخيدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق.م.) ، مع انه يسدوانها تعود الى يودكس (٤٠٨ - ٣٥٥ ق.م.) . وسوف ندعوها كما هو متعارف عليه مسلمة ارخيدس . الا انها بالنسبة لنا نظرية وليست مسلمة .

النظرية ٦ [مسلمة ارخيدس] .

لنفرض ان أ ، ب اعداد نسبية موجبة فانه يوجد ن $\in \mathbb{N}$ بحيث ان $\text{أ} < \text{ب}$.

البرهان .

إذا كان $\text{أ} \leq \text{ب}$ فاننا نأخذ ن = ١ . الهدف هو انه إذا كان $\text{أ} < \text{ب}$ ، ووب عدد أكبر من أ بكثير، فانه يمكن تحطيط ب باخذ مضاعفات كثيرة لـ أ ؛ خطوات صغيرة تتخطى خطوة واحدة كبيرة .

لبرهنة ذلك لنفرض ان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}}$ ، ب = $\frac{\text{د}}{\text{ح}}$ ، و، د $\in \mathbb{N}$. ان

ن = د + و ١ تحقق العلاقة، لان

$$\text{ن} = \text{أ} = (\text{د} + \text{و}) \cdot \frac{\text{ح}}{\text{د}} < \frac{\text{ح}}{\text{د}} + \text{د} = \frac{\text{ح}}{\text{د}} + \text{و} \cdot \frac{\text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}} + \text{و} \leq \frac{\text{د}}{\text{ح}} = \text{ب} .$$

اننا مدنيون بكثير مما نعرفه عن الاعداد النسبية للرياضيين الاغريق القدماء . لقد عبروا عن معظم افكارهم هندسياً . وكثيراً ما يكون ذلك مفيداً ، وبناء على ذلك يمكن تمثيل الاعداد النسبية كنقاط على خط مستقيم حيث يقع العدد ٠ في المركز .



ثم يتم اختيار وحدة طول وتوضع الاعداد الصحيحة الموجبة على يمين ٠ ، والسالبة على يساره . والاعداد النسبية غير الصحيحة مثل $\frac{1}{3}$ هي اجزاء من وحدة الطول . لهذا فانه يمكننا التحدث عن بُعد النقطة عن المركز (عدد نسبي) او المسافة بينهما . على سبيل المثال المسافة بين ١ و ٠ هي ١ ، والمسافة بين -٢ و ٠ هي ٢ ، أي اننا نقيس المسافة دون الاهتمام بالاشارة .

ترمز للمسافة بين s و s بالرمز $|s - s|$. وجرت العادة على تسمية $|s|$ القيمة المطلقة لـ s . والتعريف الدقيق كما يلي :

القيمة المطلقة .

إذا كان $s \geq 0$ فان القيمة المطلقة لـ s تعرف بـ $|s| = s$ اذا كان $s \leq 0$.
 $|s| = -s$ اذا كان $s < 0$.

نظرية ٧ .

إذا كان s ، s ≥ 0 . فان $|s| \geq 0$ و

$$(1) \quad |s| \leq 0 \Leftrightarrow s = 0 \text{ اذا وفقط اذا كان } s = 0 .$$

$$(2) \quad |s| = |-s| \quad |s| = |s| \quad |s| = s .$$

$$(٣) - |س| \geq |س| \geq |س|$$

$$(٤) |س ص| = |س| \vee |س ص| = ٠$$

$$(٥) \text{ [المتباينة الثلاثية] } |س ص| \geq |س| + |ص|$$

$$(٦) |س - ص| \leq ||س| - |ص||$$

$$(٧) \left| \frac{س}{ص} \right| = \left| \frac{س}{ص} \right| \text{ بشرط ان } ص \neq ٠$$

$$(٨) \text{ اذا كان } ص < ٠, \text{ فان } |س| > ص \text{ اذا وفقط اذا كان } -ص > ص > ص$$

البرهان .

$$(١) \text{ اذا كان } س \leq ٠ \text{ فان } |س| = س \leq ٠ \text{ واذا كان } س > ٠ \text{ فان } |س| = س > ٠$$

. لنفرض ان $س = ٠$. اذن $|س| = س = ٠$. وبالعكس : لنفرض ان $|س| = س = ٠$ ، فمن قانون التلث فان $س = ٠$ او $س < ٠$ او $س > ٠$. في آخر حالتين فان $|س| < س$ ، اذن $|س| = س = ٠$ تعطي $س = ٠$

$$(٢) \text{ اذا كان } س \leq ٠ \text{ فان } |س| = س \text{ وبما ان } -س \geq |س| \text{ فان } |س| = -(-س) = س$$

، ومنه $|س| = |س| = -س$. واذا كان $س > ٠$ فان $|س| = س$ و $-س = |س| = -س$ ، واذن $|س| = |س| = -س$. وكذلك $س \leq ٠$ تعطي $|س| = س = س^٢$ ، و $س > ٠$ تعطي $|س| = س = (-س)^٢ = س^٢$.

$$(٣) \text{ نأخذ حالات أخرى : على سبيل المثال } س \leq ٠ \text{ تعطي } |س| = س \text{ او } س > ٠ \text{ تعطي } -س < ٠ \text{ لهذا فان } س > ٠ > -س = |س| \text{ . اذن } س \geq |س| \text{ وبطريقة مشابهة } -|س| \geq س$$

$$(٤) \text{ من الجزء الثاني في (٢) نحصل على } |س ص| = (س ص)^٢ = (س|س| \vee |س ص|)^٢$$

ولكن $|س ص| \leq ٠$ و $|س| \vee |ص| \leq ٠$ من (١) ، اذن $|س ص| = |س| \vee |ص|$ من التلث .

(٥) هذه الخاصية مفيدة جداً في التحليل . وسنعرف سبب تسميتها بالمتباينة المثلثية عندما نعممها على الاعداد المركبة في البند ٦ .

ولاثباتها نأخذ $|س + ص| = \sqrt{(س + ص)(س + ص)} = \sqrt{س^2 + ص^2 + ٢سص} = \sqrt{س^2 + ص^2} + \sqrt{٢سص}$ ، باستخدام
اجزاء سابقة من النظرية . وبما ان $|س + ص| \leq |س| + |ص|$ ، فان النظرية تتبع من الثلاث .

(٦) هذه هي «المتباينة المثلثية معكوسة» . وهي نتج بسهولة من (٥) عندما نكتب $|س| = |(س - ص) + ص| \geq |س - ص| + |ص|$.

(٧) من (٤) نحصل على $|س| = \left| \frac{س}{ص} \right| |ص|$. لكن $|ص| = ١$ ، ولهذا ، ومن

(٤) ثانية يكون $|ص| = \left| \frac{١}{ص} \right|$. واذن $\left| \frac{١}{ص} \right| = \frac{١}{|ص|}$ وهذا يعطي النتيجة المطلوبة .

(٨) لنفرض ان $|س| > ص$ ، فاذا كان $ص \leq ٠$ ، فان $|س| > ص$ ، اي ان $ص > ص$. واذا كان $ص > ٠$ ، فان $|س| = -ص > ص$ ، ومنه $ص > ص$. لهذا اذا كان $|س| > ص$ ، فان $ص$ تقع بين $-ص$ و $ص$.

ويمكن اثبات العكس بطريقة مشابهة اذا اخذنا الحالتين $ص \leq ٠$ و $ص > ٠$. واذا فكرنا بالاعداد النسبية كنقاط على خط فانه لأي $ص < ٠$ ثابت ، فان كل قيم $ص$ ، بحيث ان $|س| > ص$ ، تكون فترة من الاعداد النسبية التي تقع بين $-ص$ و $ص$.



$$\sum_{i=1}^n s_i = s_1 + s_2 + \dots + s_n. \quad (12)$$

في الطرف الايمن لـ (12) فان الحرف الاغريقي سيجا المقلوب $\overline{\Sigma}$ يعني اننا نضع $r = 1, 2, \dots$

\dots ، ن ثم نجمع $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$. فتعم المتباينة الثلاثية الى

$$\sum_{i=1}^n |s_i| \geq \sum_{i=1}^n |s_{r_i}| \quad (13) \dots$$

وبالكلمات فان (13) تقول «القيمة المطلقة للمجموع اقل من ، اوتساوي مجموع القيم المطلقة للأفراد» .

وكمثال على استخدام (13) فاننا سنجد عدداً ما أ بحيث ان

$$ق (س) = |س^3 + س^2 - س - 1| \geq |س - 3| \text{ حيث } 3 \geq س \geq 1.$$

الآن من (13) ، و(4) نظرية ٧ ، نحصل على :

$$ق (س) \geq |س| |س^2 + 3| \geq |س| |س^2 + 3| + 1.$$

ولكن $3 \geq س \geq 1$ تعطي $3 - س \geq 3$ ، ومنه $|س| \geq 3$. اذن

$$ق (س) \geq 3 + 3 \times 3 + 3^2 \times 2 + 3^3 = 55$$

تمارين ٢ - ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١- أثبت أنه لا يوجد $س \ni \Omega$ بحيث ان $س^2 = ٢$. ولكن اذا كان $أ = \frac{1}{n}$ حلاً تقريبياً

فأثبت ان $\frac{m+2n}{m+n}$ هو تقريب افضل، المقصود بذلك ان $|b-2| > |a-2|$.

مبتدئاً بـ $a=1$ ، جدي $\exists Q$ بحيث ان $|y-2| > \frac{1}{840}$

٢- أثبت ان $s \leq 0$ لكل $s \in Q$.

٣- لنفرض ان $s = \frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عناصر في Q ، بحيث ان $b < 0$ و $d < 0$. اذا كان

$s > \frac{c}{d}$ فاثبت ان $\frac{a+c}{b+d}$ يقع بين s و $\frac{c}{d}$.

٤- لنفرض ان s عدد نسبي ثابت، ولنفرض ان $|s| \geq \frac{1}{n}$ لكل $n \in N$. استخدم

مسلمة ارخيدس لاثبات ان $s = 0$.

٥- اذا كان $s \in Q$ و $s \leq -1$ ، فاثبت باستخدام الاستقراء ان

$$(1+s)^n \leq 1+n \text{ لكل } n \in N$$

٦- لنفرض ان s ، أعدادان نسبيتان ثابتان بحيث ان $|s| > 1$ و $|a| < 0$. استخدم

السؤال ٥ ومسلمة ارخيدس لاثبات انه يوجد $\exists N$ ، تعتمد على s ، a ، بحيث ان

$$|s|^n > \frac{1}{n} \text{ لكل } n < m. \text{ كارشاد اكتب } |s| = \frac{1}{n} \text{ حيث } s < 0.$$

٧- حل المتباينة $|s+2| \leq |s+1|$ في Q .

٨ - قرب القيمة المطلقة لـ $s^4 - s^9 + s^3 - 1$ ، حيث s عدد نسبي و $-1 \leq s \leq 2$

٩ - اوجد اكبر عدد نسبي m بحيث ان $|s^2 - 2s| \leq m$ لكل s ، $s \in \mathbb{Z}$.

١٠ - اذا كان A, B ، C اعداداً نسبية موجبة وكان $A + B + C = 1$ ، فاثبت ان

$$(1-A)(1-B)(1-C) \leq 8ABC$$

$$A = B = C = \frac{1}{3}$$

١١ - اذا كان $A, B \in \mathbb{Q}$ ، فاثبت ان $(B-A)^2 \geq (\frac{B}{A})^2$. استنتج ان $B! \geq \frac{B}{A} - \frac{1}{A}$

لكل $N \in \mathbb{N}$.

١٢ - اذا كان $A, C \in \mathbb{Q}$ و $0 < A < C$ ، حيث $B = (A + \frac{C}{A})^2$. فاثبت ان

$$A > B > C$$

٤ - متتاليات الأعداد النسبية

ان الأعداد النسبية تفي بكثير من الأغراض، كالحسابات اليومية، والقياسات المخبرية الفيزيائية والهندسية. ولكن معادلات مثل $s^2 = 2$ ، التي ليس لها حل في الأعداد النسبية، تظهر على غير انتظار، ونرغب ان نجد لها حلاً، والبحث عن الحل يؤدي الى بناء حقل الأعداد الحقيقية \mathbb{R} . ويتحقق به اكثر من مجرد ايجاد الحل لمعادلة مثل $s^2 = 2$. لان $\bar{\mathbb{R}}$ ، وهو حقل تام ومرتب كلياً، يعطينا اسلحة قوية نهاجم بها مجالا واسعاً من المسائل الرياضية والفيزيائية.

نبدأ بالبحث عن تقريب نسبي «للحل الموجب» للمعادلة $s^2 = 2$. وبما انه لا يوجد

حل في الاعداد النسبية فاننا نريد ان نجد عدداً نسبياً s بحيث ان $|s - \frac{1}{2}|$ صغير الى الدرجة التي نريدها ونحن نعلم انه لن يكون صفراً. ومن الاساليب التي سندرسها في النظرية (١٠) تكوين متتالية من الاعداد النسبية (s_1, s_2, s_3, \dots) بحيث ان

$$s_{n+1} = \frac{s_n + 2}{s_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ابتداء بـ $s_1 = 1$. فباجراء العمليات الحسابية نجد ان $(s_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots)$ ،

وكلما حسبنا حدوداً اكثر في المتتالية سيبدوانا تقترب من الحل الذي تخيلناه للمعادلة $s^2 = 2$.
 إن فكرة «متتالية من الاشياء» (ليست بالضرورة اعداداً) هي من الافكار الرئيسية ذات الاهمية الكبيرة. واليك التعريف الدقيق للمتتالية:

لتكن S مجموعة غير خالية. تعرف المتتالية في S على انها اقتران من $S \rightarrow \mathbb{N}$ حيث

N هي مجموعة الاعداد الطبيعية. سوف نكتب $s = (s_n) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ ونسمي s_n الحد النوني للمتتالية (s_n) .

اذا كانت $s = N$ فان s تسمى متتالية من الاعداد الطبيعية. واذا كانت $s = Q$ فان s تسمى متتالية نسبية . . . الخ. نذكرها انه ليس من الضروري ان تكون حدود المتتالية مختلفة، اي انه لا ضرورة لأن يكون s واحداً لواحد.

ونستعمل الاقواس المستديرة للمتتالية لكي نميزها عن المجموعة لهذا فان $s = (s_n)$ ،
 $\{s_n\} = (s_n)$ التي هي مجموعة الحدود s_n ، هما شيان مختلفان تماماً.

المثال ٧.

(١) $a \in Q, s_n = a$ لكل n تعرف المتتالية الثابتة $s = (a, a, a, \dots)$.

(٢) $\exists ! q, m, N \exists m < 1$. عرف $s_n = \text{الكل } n \leq m$. اكتب اي $s_1 = s_2, \dots, s_{m-1}, s_m = (s_n)$ تسمى ثابتة النهاية:
 اي ان $s = (s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m) = (s_n)$ هي متتالية من الاعداد الصحيحة.
 (٣) $s = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ هي متتالية من الاعداد الصحيحة.
 يمكن تعريف الحد النوني بالعلاقة التالية:

$$s_n = \frac{(1-n) + 1}{2} = \frac{1-n}{2}$$

في هذه الحالة $s(N) = \{1, 0\}$.
 (٤) $s = (n) = (1, 2, 3, \dots)$ هي متتالية من الاعداد الطبيعية و $s(N) = N$.
 (٥) $s = (0, -1, -2, -3, \dots)$ هي متتالية اعداد صحيحة.

$$(6) s = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \text{ هي متتالية نسبية.}$$

(٧) $s = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ هي متتالية الاعداد الاولى.
 وهنا لا يوجد صيغة سهلة معروفة لـ s_n .
 (٨) $s_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ يسمى مضروب n . هذا يعطي متتالية
 $s = (1, 2, 6, 24, 120, \dots)$.

$$(9) s_1 = 1, s_{n+1} = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ لكل } n \leq 1 \text{ هذا يعطي}$$

متتالية الاعداد النسبية $s = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ ؛ ولهذا المتتالية علاقة بـ $\{e\}$

اساس اللوغاريتم الطبيعي . (انظر الفصل ٩ ، البند ١) .

(١٠) [متتالية فيبوناتشي] . يمكن الحصول على المتتالية (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ،

١٣ ، . . .) بجمع كل حدين متتالين للحصول على الحد التالي لهما . كتطبيق على هذا انظر التمارين ٢ - ٤ .

سيكون اهتمامنا من الآن فصاعداً ، اذا لم نذكر غير ذلك ، محصوراً بالمتتاليات النسبية $s = (s_n)$ ، وهي تضم بالطبع متتاليات الاعداد الصحيحة والاعداد الطبيعية . والتعاريف التالية تعطي تصنيفات هامة للمتتاليات .

المتتالية المحصورة .

(١) يقال ان المتتالية $s = (s_n)$ محصورة من اعلى اذا وفقط اذا وجد عدد نسبي M لا يعتمد على n بحيث ان $s_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(٢) يقال ان المتتالية $s = (s_n)$ محصورة من اسفل اذا وفقط اذا وجد عدد نسبي m و $s_n \geq m$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(٣) يقال ان المتتالية $s = (s_n)$ محصورة اذا وفقط اذا كانت محصورة من اعلى ومن اسفل ، اي انه يوجد عدد نسبي $M > m$ بحيث ان $s_n \in [m, M]$ لكل $n \in \mathbb{N}$. يرمز لمجموعة المتتاليات المحصورة بالرمز \mathcal{M} .

المتتاليات التقاربية

يقال ان المتتالية $s = (s_n)$ تقاربية اذا وجد عدد نسبي M بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ ، في \mathbb{Q} ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ ، $N \geq M$ بحيث ان $|s_n - M| < \epsilon$ لكل $n \geq N$. نسمي M نهاية المتتالية ونقول ان (s_n) تقارب من M . ونكتب $s_n \rightarrow M$ ، أو $s_n \rightarrow M$ (∞) . و نرمز لمجموعة المتتاليات التقاربية بالرمز \mathcal{C} . تسمى المتتالية غير التقاربية بالمتتالية التباعدية .

المتتالية الصفرية

إذا كانت (s_n) متتالية تقاربية وكانت نها $s_n = 0$ ، فإننا نسمي (s_n) متتالية صفرية. ويرمز لمجموعة المتتاليات الصفرية بالرمز \mathcal{O} .

المتتالية الكوشية.

تسمى المتتالية (s_n) متتالية كوشية إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ ، $\exists N$ عدد نسبي، يوجد N بحيث أن $|s_m - s_n| < \epsilon$ لكل $m, n \geq N$ ، وإذا كانت s_n متتالية كوشية فسنكتب $s_n \rightarrow \infty$ (م، ن) ويرمز لمجموعة المتتاليات الكوشية بالرمز \mathcal{K} .

المتتاليات الوترية

(١) تسمى المتتالية $s = (s_n)$ وترية متزايدة إذا وفقط إذا كان $s_n \leq s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كان $s_n > s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإننا نسمي المتتالية وترية متناقصة فعلاً.
(٢) تسمى المتتالية $s = (s_n)$ وترية متناقصة (متناقصة فعلاً) إذا وفقط إذا كان $s_n \leq s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

التباعد إلى ∞ أو $-\infty$.

(١) نقول أن (s_n) تتباعد إلى ∞ إذا وفقط إذا كان لكل عدد نسبي $A < \infty$ يوجد N ،
ن. (أ) بحيث أن $s_n > A$ لكل $n \geq N$. ونكتب $s_n \rightarrow \infty$.
(٢) نقول أن (s_n) تتباعد إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان $(-s_n) \rightarrow \infty$ كما هو معرف في (١)، ونكتب $s_n \rightarrow -\infty$.

قبل ان نعطي أمثلة لتوضيح هذه التعريفات لا بد من ذكر بعض الشروح والتحذيرات. فمن الواضح ان عدداً من الرموز غير المفسرة قد ظهرت. ولبعض التعريفات، وخصوصاً فيما يتعلق بالمتاليات التقاربية، تعقيدات منطقية. وهذه التعقيدات تجعل بعض المبتدئين يخطئون في قراءة التعريفات مما يؤدي بهم الى الوقوع في الاخطاء التحليلية.

فبالنسبة للمتاليات المحصورة نشدد على ان الاعداد m ، وهي اعداد ثابتة ولا تعتمد على n . لهذا فمع انه صحيح ان $|n| > n + 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فان المتالية $(n) = (1, 2, 3, \dots)$ غير محصورة. والرمز ∞ متعارف عليه ولا يمكن تفسيره دون الرجوع الى تاريخ الرياضيات. فنطلب منك ان تقبله كما هو، مجرد رمز.

وتعريف المتالية التقاربية متوازن بطريقة دقيقة وبحاجة الى تفسير دقيق. واي انحراف بسيط عما هو مذكور في النص قد يؤدي الى اشياء لا معنى لها.

اولا، العدد m ، نهاية المتالية، مذكور قبل $\epsilon < 0$. لهذا فان m ستعتمد على طبيعة المتالية ولن تعتمد على ϵ . ثم نتحدث عن «لكل $\epsilon < 0$ » ونعني بهذا «لاي قيمة $\epsilon < 0$ » وبالتأكيد لا نعني «لقيمة ما» $\epsilon < 0$ أو «يوجد $\epsilon < 0$ ». وليست هناك اهمية خاصة لاستخدام الحرف الاغريقي ϵ (ابسلون) في التعريف، سوى انه متعارف عليه. كذلك لا حاجة لان نقول $\epsilon < 0$ عدد صغير لان مجموعة الاعداد الموجبة تحتوي على كل الاعداد الموجبة الصغيرة.

والجملة «يوجد $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ » تعني انه بعد ان اعطينا $\epsilon < 0$ فانه بإمكاننا ان نجد عدداً صحيحاً موجباً n يعتمد على ϵ بصورة عامة، وهذا الاعتماد يرمز له بالصيغة $n = n(\epsilon)$. وهناك طريقة اخرى لكتابة ذلك هي «يوجد اقتران $Q^+ : \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}$ ، حيث Q^+ هي مجموعة الاعداد النسبية الموجبة.

واخيراً نشترط ان يكون $|s_n - m| > \epsilon$ لكل $n < n$. نشدد هنا على «لكل». لاننا انما اذا حدث وكان $|s_n - m| > \epsilon$ لكل $n \leq 1$ ، فهذا ممكن، ولكن نادر الحدوث. ولا نمانع اذا كان $|s_n - m| > \epsilon$ لاعداد ما، أو لكل $n > n$.

ومستساعد الامثلة في توضيح الافكار التي نبي عليها المتتاليات التقاربية، ولكن من
يفشل في فهم التعريف الاساسي فهماً تاماً لن ينجح في فهم التحليل.
لا يحتاج الرمز n الى تفسير. ولكن نذكر هنا ان m قد لا تكون حداً من حدود
المتتالية، اي قد يكون $n \neq m$ لكل $n \in \mathbb{N}$. والسهم في $n \leftarrow m$ يساعد في فهم ذلك.
وتقرأ « n تقترب من m ». فمن العلاقة $|n - m| < \epsilon$ لكل $n \leq N$ يمكن ان نقول
ان n تقترب في النهاية من m ، اي لـ n كبيرة، ولكن لا نستطيع بشكل عام ان نقول ان n
تساوي m .

والرمز ∞ (لا نهاية) الذي نجده في $n \leftarrow \infty$ هو شيء خطير وغير
ضروري. لقد استخدم لعدة قرون في الرياضيات ولا ضرر منه اذا استخدم كرمز وليس في
الاستنتاج. وهو بالطبع يحمل فكرة ان n تقترب من m عندما تكبر n .
وبالنسبة لنا فان ∞ هي اشارة او رمز فقط نستخدمه فيما يتعلق بالمتتاليات، انه ليس
عدداً نسبياً. لهذا فلن نكتب ثنائية تعبيرات مثل $1 + \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{1}{\infty}$ ، ولن نحاول
حسابها او استنتاج اي شيء منها.

المتتالية الكوشية سميت نسبة الى عالم الرياضيات الفرنسي كوشي (١٧٨٩ - ١٨٥٧)
احد مؤسسي التحليل. وتعريف المتتالية الكوشية داخلي: بمعنى انه يستخدم حدود المتتالية
فقط، بينما تعريف المتتالية التقاربية يحتاج الى عدد m الذي قد لا يكون احد حدود المتتالية،
وقد يكون من الصعب معرفته صراحة.

وسوف نفحص متتاليات المثال (٧) لمعرفة هل هي تقاربية الخ:

من الواضح ان المتتالية (١) محصورة وتقاربية (نهايتها A) كما انها متتالية كوشية. وهي متتالية
صفيرية اذا وفقط اذا كان $A = 0$ كما انها متتالية وتيريه متزايدة، وايضاً وتيريه متناقصة، لكنها لا
تتبع الى ∞ أو $-\infty$.

والمتتالية (٢) لها نفس خواص (١) ما عدا الوتيرية. وفي (٣) نحصل على $0 \leq n$
 ≤ 1 لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لهذا فان $0 \leq l$. المتتالية ليست تقاربية ولا كوشية، على سبيل

المثال، اذا كان $s \leftarrow m$ فخذ $\frac{1}{p} = \epsilon$ ، فانه يوجد n ، $n \in (\frac{1}{p})$ بحيث ان $|s - m|$

$\frac{1}{p}$ لكل $n \leq n$. الآن لتأخذ اي $n \leq n$ ، فان $n + 1 < n$. ومن المتباينة الثلاثية

نحصل على

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_{n+1} - m + m - s_n| \geq |s_{n+1} - m| + |m - s_n| > \frac{1}{p}$$

لكن $|s_{n+1} - s_n| = 1$ لأن $s_n = 0$ تعطي $s_{n+1} = 1$ و $s_n = 1$ تعطي $s_{n+1} = 0$.
لهذا حصلنا على تناقض $1 > \frac{1}{p}$ ، ولذلك (س_n) \nrightarrow تق. وبالمثل يثبت ان $s \nrightarrow k$.

وبما ان (1، 0، 1، 0، 1، 0، ...) ليست تقاربية فهي بالتأكيد ليست صفيرية. وواضح انها ليست وتيرية ولا تتباعد الى ∞ أو $-\infty$.

وفي (4)، $s = (1, 2, 3, \dots)$ متتالية وتيرية متزايدة فعلا تتباعد الى ∞ .
ولا ثبات الاخيرة لنفرض ان $0 < \epsilon$ عدد معطى، اذن من مسلمة ارخميدس، يوجد n بحيث
ان $n < \epsilon$. لهذا اذا كان $n \leq n$ فان $s_n = n < \epsilon$ ، ومنه $s_n \leftarrow \infty$. فمن
الواضح ان (س_n) ليست محصورة من اعلى. ولكنها محصورة من اسفل لأن $1 \leq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$
من السهل ان نرى ان (ن) ليست تقاربية ولا كوشية.

بالنسبة لـ (5) من الواضح ان $1 - n \leftarrow -\infty$ ، وان (1 - ن) محصورة من اعلى
بالصفر، ولكنها ليست محصورة من اسفل، وكذلك (1 - ن) وتيرية متناقصة فعلا. انها ليست
تقاربية ولا كوشية.

في (6) سوف نثبت ان $\frac{1}{n} \leftarrow 0$ ، ونترك باقي التصنيفات كتمرين؛ لنفرض ان $\epsilon > 0$.

عدد معطى، علينا ان نجد n . بحيث ان $\left| 0 - \frac{1}{n} \right| < \epsilon$ لكل $n \leq n_0$ ، اي ان $\frac{1}{n}$

$\epsilon > \epsilon$ لكل $n \leq n_0$. $\epsilon < \epsilon$ تعطي $\frac{1}{\epsilon} < 0$ ومن مسلمة ارخميدس فانه يوجد $n_0 < \frac{1}{\epsilon}$

$\frac{1}{\epsilon}$. اذا كان $n \leq n_0$ فان $n < \frac{1}{\epsilon}$ ، ومنه $\frac{1}{n} < \epsilon$ ، وهذا يثبت ان $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (ن $\rightarrow \infty$).

لا يمكن التحدث كثيراً عن (٧) و (٨) سوى انها متباعدتان الى ∞ .

اما المتتالية (٩) فهي كوشية لكنها لا تتقارب الى اي عدد نسبي. لن نثبت ذلك لاننا سندرس هذا المثال بتفصيل عند دراسة المتسلسلات.

وأخيراً: متتالية فيوناتشي (التي سميت نسبة الى رياضي ايطالي عاش في القرن الثالث

عشر تباعد الى ∞ . ولكن سيجد القاري ان في متتالية النسب (١)، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{5}$ ،

$\frac{5}{8}$ ، ... ما يسترعي الاهتمام. هذه المتتالية هي كوشية لكنها لا تتقارب من اي عدد نسبي.

وفي تعريف المتتالية التقاربية تحدثنا عن نهاية المتتالية التقاربية (س). كان هذا يتضمن

ان المتتالية التقاربية لها نهاية واحدة فقط. وليس من الصعب اثبات ذلك.

النظرية ٨. [وحدانية النهاية].

اذا كانت (س) متتالية تقاربية من الاعداد النسبية فان نهايتها وحيدة، اي انه اذا

كانت س \rightarrow ١ م ك س \rightarrow ٢ م فان ١ م = ٢ م.

البرهان .

لنفرض ان $s_n \leftarrow m$ و $s_n \leftarrow m$. لنفرض ان امكن ان $m \neq m$. اذن $|m - m|$

$< \epsilon$. لنأخذ $\epsilon = \frac{|m - m|}{2}$ ، اذن $\epsilon > 0$. من تعريف $s_n \leftarrow m$ ، فانه يوجد n .

بحيث ان $|s_n - m| > \epsilon$ لكل $n < n$.

ومن تعريف $s_n \leftarrow m$ فانه يوجد n بحيث ان $|s_n - m| > \epsilon$ لكل $n \leq n$. وبما ان $m \neq m$ فالتوقع ان تكون $n \neq n$: لنأخذ $n = n + n$. من n هذه فالتوقع ان نحصل على $|s_n - m| > \epsilon$ و $|s_n - m| > \epsilon$ ، لان $n \leq n$ و $n \leq n$.

ومن المتباينة المثلثية نحصل على

$$|m - m| = |s_n - m + s_n - m| \geq |s_n - m| + |s_n - m| \geq \epsilon + \epsilon > \epsilon$$

ولكن $|m - m| = \epsilon$ من الفرض ، لهذا فقد اثبتنا ان $|m - m| > |m - m|$ ، وهذا تناقض . لهذا يجب ان يكون $m = m$ ، بما يثبت النظرية .

سنبحث الآن في علاقات أعم ، وخصائص لمجموعات مختلفة من المتتاليات .

النظرية ٩ .

تق \sup ك \sup لمتتاليات الاعداد النسبية ، وجميعها مجموعات جزئية فعلا .

البرهان .

تقول النظرية ان كل متتالية صفرية هي تقاربية وهذا بدهي ، وان كل متتالية تقاربية هي كوشية ، وان كل متتالية كوشية هي محصورة . وايضاً ، يوجد متتالية تقاربية غير صفرية ، ويوجد متتالية كوشية غير تقاربية ، الخ .

واضح ان \sup توجد لأن \exists توجد تعطي $s_n \leftarrow 0$ ، واذا $s \in \sup$. والمتتالية الثابتة $(1, 1, 1, \dots)$ \exists توجد n توجد ، لهذا فان \sup توجد مجموعة جزئية فعلا .

لنأخذ $s \in \sup$ توجد ولنفرض ان $s_n \leftarrow m$. اذا لاي $\epsilon > 0$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

ان $|s_n - m| > \epsilon$ لكل $n < n_0$. بما ان $\epsilon > 0$ فان $\frac{\epsilon}{4} > 0$ ، لهذا فانه يوجد

$n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث ان $|s_n - m| > \frac{\epsilon}{4}$ لكل $n \leq n_0$.

لنأخذ $r \leq n_0$. ون $\frac{\epsilon}{4} \leq n_0$. اذا $|s_r - m| > \frac{\epsilon}{4}$ و $|s_n - m| > \frac{\epsilon}{4}$

$\frac{\epsilon}{4}$. ومن المتباينة المثلثية نحصل على $|s_n - s_r| = |s_r - m + m - s_n| \geq$

$|s_r - m| + |s_n - m| > \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$ ،

ومنه (s_n) متتالية كوشية ، اي ان $s \in \sup$. كذا هذا يثبت الاحتواء الثاني باستثناء انه احتواء فعلي . واثبت ذلك صعب وستترك هذا الآن ، ونثبتته كنتيجة منفصلة (النظرية ١٠) .

واخيراً لنفرض ان $s \in \sup$ ، كذا ، لنأخذ $\epsilon = 1$ في تعريف المتتالية الكوشية لهذا فانه يوجد

$n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث ان

$|s_n - s_m| < 1$ لكل $n, m \geq n_0$.

من المتباينة المثلثية نحصل على $|s_n| \geq |s_n - s_m| + |s_m| > 1 + |s_m|$ لكل $n, m \geq n_0$. وبأخذ $m = n_0$ نحصل على $|s_n| \geq 1 + |s_{n_0}|$ لكل $n \geq n_0$.

ولياقي الاعداد n ، أي $1 \geq n \geq n_0$ ، يوجد اكبر عدد في المجموعة $\{s_n | 1 \leq n \leq n_0\}$

ن.ه ، لنقل ص = |س| ، ١ ≥ ر ≥ ن.ه . لنفرض الآن ان
 ح = أ ك (ص ، ١ + |س|) ، اي العدد الاكبر بين ص و ١ + |س| ، نرى ان
 |س| ≥ ح لكل ن ∈ N ،
 واذن س ∈ ل ∞ . اذن اثبتنا ان ك ⊃ ل ∞ . والاحتواء فعلي لان (١ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ...)
 هي متتالية محصورة وليست كوشية .

النظرية ١٠ .

الاحتواء تر ⊃ ك لمتتاليات الاعداد النسبية هو فعلي ، اي انه توجد متتالية كوشية غير
 تقاربية .

البرهان .

سوف نبرهن ان س = (س_ن) المعرفة بـ س_١ = ١ ، و

$$س_{١+٢} = \frac{س_٢ + ٢}{س_٢ + ١} \text{ لكل } ن ∈ N \quad (١٤)$$

هي متتالية تحقق الفرض .

اليك الآن فكرة عن سبب اختيارنا للمتتالية (١٤) . لنفرض انه لدينا حل تقريبي س_ن
 < ، للمعادلة س_٢ = ٢ . اذن سيكون س_٢ - ٢ صغيراً . ونأمل ان يكون التقريب الجديد
 س_{١+٢} = س_ن + ٢ - س_٢ تقريباً جيداً . ولكن اذا لم يكن س_{١+٢} يختلف كثيراً عن س_ن
 فبإمكاننا ان نستعيض عن س_٢ بـ س_ن . واذن يمكننا ان نأخذ س_{١+٢} = س_ن + ٢ -
 س_ن . وهذا يعطي (١٤) .

سوف نبين الآن ان س_٢ ← ٢ (ن ← ∞) : لنفرض ان ج (ن) هي الجملة المفتوحة

$$\left| 2 - \frac{2}{1+n} \right| \geq \frac{1}{4}. \text{ فمن (١٤) نحصل على } \left| 2 - \frac{2}{p} \right| = \left| 2 - \frac{2}{4} \right| = \frac{1}{2}, \text{ ولهذا}$$

فإن ج (١) صحيحة. وواضح من (١٤) أن $\frac{1}{4} \leq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وكذلك

$$\left| 2 - \frac{2}{2+n} \right| = \left| 2 - \frac{2}{1+n} \right| \geq \frac{1}{4},$$

فإن ج (١ + ن) صحيحة إذا كانت ج (ن) صحيحة. ومن الاستقراء نستنتج أن $\left| 2 - \frac{2}{1+n} \right|$

$$\geq \frac{1}{4} \text{ لكل } n \in \mathbb{N}.$$

لتكن $\epsilon < 0$ معطاة، وباستخدام مسلمة أرخميدس نختار $n < \frac{1}{\epsilon}$.

وإذا اخذنا $n < \frac{1}{\epsilon}$ نحصل من المثال ١ على

$$\left| 2 - \frac{2}{n} \right| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{1-n} > \frac{1}{1-2} > \frac{1}{1-4} \geq \frac{1}{n} > \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\frac{2}{n} \leftarrow \infty$. ومن النظرية ٩ نحصل على $\left(\frac{2}{n} \right) \rightarrow \infty$ ، أي أن $\left| \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \right| \leftarrow \infty$ (ن، م $\leftarrow \infty$).

ولكن إذا كتبنا $\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{m} \right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{m} \right) = \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} \right)$ فإن

$$\left| \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \right| \geq \frac{\left| \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \right|}{2} \leftarrow \infty \text{ (ن، م } \leftarrow \infty).$$

لهذا فإن $\left(\frac{2}{n} \right) \rightarrow \infty$ ،

بقي أن نثبت أن هذه المتتالية لا تقارب من أي عدد نسبي.

نفترض ان امكن ان $(س_١)$ في $تو$ ، اي $س_١ ← (ن ← ∞)$ حيث $ا ∃ Q$. من
الواضح ان $س_١ ← ا$ تعطي $س_٢ ← ا$. لاثبات ذلك نلاحظ ان $(س_١) ∃ (تو) ⊃ ل ∞$.
لهذا فان $|س_١| ≥ م$ لكل $ن$ ومنه
 $|س_١ - ا| ≥ |س_١ - (م + ا)| = |س_١ - ا|$. و

لنأخذ $ε < ٠$. اذن يوجد $م$ بحيث ان $|س_١ - ا| > \frac{ε}{و}$ لكل $ن < م$. ومنه

$$|س_١ - ا| ≥ |س_١ - ا| و > \frac{ε}{و} . و = ε ، لكل ن ≤ م . ،$$

لهذا فان $س_١ ← ا$ (ن ← ∞) . ولكننا كنا قد اثبتنا ان $س_٢ ← ا$. فاذن ، ومن النظرية
٨ ، نحصل على $ا = ا$ ، وهذا تناقض لانه لا يوجد $ا ∃ Q$ بحيث ان $ا = ا$. اذن $(س_١)$
في $تو$ مما يثبت النظرية .

ومن النظرية ٩ ، عرفنا ان مجموعة المتتاليات المحصورة ل $∞$ تحوي المجموعات $تو$ ،
تقو ك . سوف نبين بعد قليل انه يمكن تعريف عمليتي جمع وضرب على $∞$ مما يجعلها حلقة
تبديلية ذات عنصر محايد . وسنرى ان $تو$ ، ك هما حلقتان جزئيتان من $∞$ وان $تو$ هي مثالية
في ك . اذن يمكننا ان نطبق النتائج العامة للحلقات التي حصلنا عليها (الفصل الاول ، البند
٢) ونكون الحلقة الخارجة ك/تو . وهذه الحلقة الخارجة هي حقل الاعداد الحقيقية R
(انظر البند ٥) .

الطريقة الطبيعية لجمع وضرب اي متتاليتين من الاعداد النسبية $(س_١)$ ، $(ص_١)$
(سواء كانتا محصورتين ام لا) هي :

$$\begin{aligned} س + ص &= (س_١ + ص_١) ، س \cdot ص = (س_١ \cdot ص_١) \quad (١٥) \\ \text{مستكون (١٥) هي تعريفنا لعمليتي الجمع والضرب في } \infty . \text{ فعلى سبيل المثال اذا كانت} \\ س &= (١ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، \dots) \text{ و } ص = (٠ ، ١ ، ٠ ، ٠ ، \dots) \text{ فان } س + ص = \\ &= (١ ، ١ ، ٠ ، ٠ ، \dots) \text{ و } س \cdot ص = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، \dots) . \text{ وفي المستقبل سنحذف النقطة} \\ &\text{في } س \cdot ص . \end{aligned}$$

النظرية ١١.

متاليات الاعداد النسبية ($ل$) $(٠, +, \infty)$ هي حلقة تبديلية صفرها $ص = (٠, ٠, ٠)$ ،
 $٠, \dots$) وعنصرها المحايد $و = (١, ١, ١, \dots)$. هذه العمليات تصبح لك ، تو حلقات
 جزئية من $ل^\infty$ وتو ، مثالية في ك .

البرهان.

لتفرض ان $س$ ، $ص$ $\exists ل^\infty$. اذن يوجد عدنان موجبان $م١$ ، $م٢$ $\exists Q$ بحيث ان
 $|س_n| \geq م١$ و $|ص_n| \geq م٢$ لكل $ن \exists N$. فمن المتباينة المثلثية نحصل على $|س_n +$
 $ص_n| \geq |س_n| + |ص_n| \geq م١ + م٢$ لكل $ن \exists N$. اذن $(س_n + ص_n)$ محصورة اي
 ان $س + ص$ $\exists ل^\infty$ ومنه $+$ هي عملية ثنائية على $ل^\infty$. كذلك $|س_n ص_n| = |س_n| |ص_n|$
 $|س_n| \geq م١$ ، $|ص_n| \geq م٢$ لكل $ن$. اذن $س \cdot ص$ $\exists ل^\infty$ و \cdot عملية ثنائية على $ل^\infty$.
 من الواضح من (١٥) ان $س + ص = ص + س$ ، $س \cdot ص = ص \cdot س$ لان Q حقل .
 كذلك $س + ص = ص$ $(س_n + ص_n) = س$ وكذلك $س - س = ص$ $(س_n - س_n) = ص$. وبما
 ان $١ \neq ٠$ $س_n = س$ لكل $ن$ فان $وس = س$ لكل $س \exists ل^\infty$. ومن الواضح ان $ص = و$
 $ل^\infty$ و $ص \neq و$ لان $(س_n) = (ص_n)$ اذا فقط اذا كان $س_n = ص_n$ لكل $ن \exists N$.
 الخاصيتان (س) $ع = س(ص ع)$ و $س(ص ع) = س(ع + ع) = س + س$ ع تتيجان بسهولة
 من (١٥) ومن كون Q حقل . لهذا فان $ل^\infty$ هي حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .
 لاثبات ان ك هي حلقة جزئية يكفي ان نثبت ان $س - ص$ $\exists ل^\infty$ ، ك ، $س$ $\exists ل^\infty$ ك عندما
 يكون $س$ ، $ص$ $\exists ل^\infty$. لتفرض ان $س$ ، $ص$ في ك ولنطبق تعريف المتتالية الكوشية : اذا كان $ع$
 $< \frac{ع}{٢}$ فان $\frac{ع}{٢} < ٠$ ولهذا فانه يوجد $ن$ ، $ن \exists N$ بحيث ان $|س_n - س_r| < \frac{ع}{٢}$ لكل $ن$
 $، ر \leq ن$. وكذلك $|ص_n - ص_r| < \frac{ع}{٢}$ لكل $ن$ ، $ر \leq ن$. اذا اخذنا $ن$ ، $ر \leq ن$ ،
 ن نحصل على :

$| (s_r - s_r) - (s_r - s_r) | \geq | s_r - s_r | + | s_r - s_r |$ لهذا $\epsilon > \infty$ فان $(s_r - s_r) = s_r - s_r$ ك.

الآن s_r ، s_r \exists تعطى s_r ، s_r \exists لهذا فان $| s_r - s_r | \geq | s_r - s_r |$ لكل $N \exists$. اذا كتبنا $s_r - s_r = s_r - s_r + (s_r - s_r)$ نحصل على

$| s_r - s_r - s_r - s_r | \geq | s_r - s_r | + | s_r - s_r |$ ، $(n, r) \leftarrow \infty$ لهذا فان $(s_r - s_r) = s_r - s_r$ ك وهذا يثبت ان ك حلقة جزئية من ∞ .

ويمكن اثبات ان ∞ حلقة جزئية من ∞ بطريقة مشابهة . فاذا كان $s_r \leftarrow a$ ، $s_r \leftarrow b$

فان $| (s_r - s_r) - (a - b) | \geq | s_r - a | + | s_r - b |$ ، $(n, \infty) \leftarrow$

ومنه $s_r - s_r \leftarrow a - b$ ، اي ان $(s_r - s_r) = s_r - s_r$. كذلك بما ان ∞ نحصل على $| s_r - s_r | \geq m$ ، لكل $N \exists$.

لهذا فان :

$| s_r - s_r - a - b | = | s_r - s_r + (b - a) | \geq | s_r - a | + | s_r - b |$ ، $(n, \infty) \leftarrow$. . (١٦)
وهذا يثبت ان $s_r - s_r \leftarrow a - b$ اي ان $s_r - s_r = (s_r - s_r)$ \exists ∞ .

ويمكن بسهولة اعطاء برهان بطريقة ϵ ، للتاثير اعلاه : على سبيل المثال ، لنفعل

ذلك لـ $s_r - s_r \leftarrow a - b$ ، لنفرض ان $\epsilon > 0$. اذن $\frac{\epsilon}{m} < 0$ و $\frac{\epsilon}{m^2} < 0$ ، لهذا فانه

يوجد n ، r $\exists N$ بحيث ان $| s_r - a | > \frac{\epsilon}{m^2}$ لكل $n > N$ و $| s_r - b |$

$\frac{\epsilon}{m} < n < r$ لهذا اذا كانت $n < r$ نحصل من (١٦) على

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} > |a| - b$$

واخيرا يجب ان نثبت ان تقم مثالية في ك اي ان س - ص 3 تقم عندما يكون س ،
ص 3 تقم وحس 3 تقم عندما يكون حد 3 تقم وس 3 ك . لنفرض ان س ، ص 3 تقم
 . اذن س - ص 3 س 3 | \geq | س 3 | + | ص 3 | \leftarrow 0 (ن $\leftarrow \infty$) ، لهذا فان س - ص
3 تقم .

لنفرض ان $\alpha \in C$ و $\beta \in K$. اذن من $C \subseteq L^\infty$ ومنه $\alpha \in L^\infty$ | $s_n \geq m$ لكل $n \in N$

كذلك اذا كان $\epsilon < 0$ ، فانه يوجد n_0 بحيث ان $|x_n - \frac{\epsilon}{m}| < n_0$ ، ومنه $|x_n| < n_0$

سواء $| \geq | \text{حد} |$ م ϵ لكل $n < n_0$ ، مما يثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. وهذا ينهي برهان النظرية.

نحتاج في البند ٥ الى النظرية التالية. وهي تنص بشكل اساسي على ان بعض انواع المتاليات الكوشية لها نظير هو نفسه متتالية كوشية.

النظرية ١٢ .

لنفرض ان $s \geq k$ ولنفرض انه يوجد $a \in N$ وعدد نسبي $d < 1$ بحيث ان $|s| \leq d$

لكل $n < 1$. عرف f_n بـ $f_n = 1$ اذا كان $n \geq 1$ و $f_n = \frac{1}{n}$ لكل $n < 1$. اذن

ش ۳ ک.

البرهان

لنأخذ أي $\epsilon > 0$ بما أن $\epsilon \in \mathbb{D}^2$ ، فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث أن $|s_n - s| < \epsilon$

$\epsilon > 0$ دلكل ن، $r \leq n$. لتأخذ ن، $r < n$ ، اذن $|s_r| \leq |s_r| + |s_r| \leq 2|s_r|$ دونه

$$|s_r - s_{r+1}| = \frac{|s_r - s_{r+1}|}{|s_r|} \geq \frac{|s_r - s_{r+1}|}{|s_r|} \geq \frac{\epsilon}{2} > \frac{\epsilon}{2} \text{ لهذا فان } \exists \text{ ك مما ثبت النظرية.}$$

التمارين ٢ - ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - ولد حيوانان ذكر وانثى في ١ كانون ثاني . وبعد شهرين اي في ١ آذار ولدت الانثى توأمين (ذكراً وانثى) . واستمرت الانثى الام في انجاب توأمين (ذكر وانثى) في الاول من كل شهر . والتوأمين اللذان ولدا في ١ آذار انجبا توأمين ذكراً وانثى في ١ ايار واستمر الامر على هذا المنوال وعاش الجميع . ما علاقة هذا بمتتالية فيبوناتشي في المثال ٧ ؟ كم يكون عدد الازواج في الاول من آب ؟

٢ - لنفرض ان (s_n) متتالية اعداد نسبية . فاذا وجد $A > 0$ بحيث انه لكل عدد نسبي ϵ ، $0 < \epsilon < A$ يوجد N بحيث ان $|s_n - A| < \epsilon$ لكل $n \geq N$. اثبت ان $s_n \rightarrow A$.

٣ - اثبت ان $s_n \rightarrow A$ اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث ان $|s_n - A| < \epsilon$ $s_n > A + \epsilon$ لكل $n \geq N$.

٤ - استخدم الجزء المناسب من النظرية ٧ لثبت ان $s_n \rightarrow A$ تعطي $|s_n - A| < \epsilon$. اثبت ان العكس غير صحيح باعطاء مثال في متتالية s_n بحيث ان $|s_n - A| < \epsilon$ ولكن s_n تباعدية .

$$٥ - انقد العبارة $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$ (ن $\rightarrow \infty$)$$

٦ - اذا كانت (s_n) متتالية كوشية من الاعداد الصحيحة ، اثبت ان (s_n) توه . اعط مثالا لمتتالية s_n من الاعداد الصحيحة بحيث ان $s_n \rightarrow \infty$ ولكن s_n ليست وتيرية

متناقضة .

$$٧ - \text{اثبت ان } (١) \frac{٢+٣}{١+٣} \leftarrow \frac{٢}{٢}, (٢) \frac{٣}{١٣} \leftarrow \frac{٣}{٣}, (٣) \frac{٣}{٣} \leftarrow \infty .$$

٨ - بين هل المتتاليات المعطى حدها النوني، محصورة او تقاربية، الخ .

$$(١) \text{ من } \mathbb{N}, \text{ أثبتة } > \mathbb{A} \geq ١, (٢) \text{ من } \mathbb{N} \text{ ب } \mathbb{N}, \text{ ب ثابتة } \mathbb{B} < ١. (٣) \text{ من } \mathbb{N} = \mathbb{N} \text{ (عندما تكون } \mathbb{N} \text{ عدداً فردياً), من } \mathbb{N} = \mathbb{N} \text{ (عندما تكون } \mathbb{N} \text{ عدداً زوجياً), (٤) من } \mathbb{N} =$$

$$(١-١) + \mathbb{N}, (٥) \text{ من } ١ = ١, \text{ من } ١ + \mathbb{N} = \frac{٣ + \mathbb{N}}{١ + \mathbb{N}}, (٦) \text{ من } ١ = ١, \text{ من } ١ + \mathbb{N} =$$

$$\frac{٤ + \mathbb{N}}{١ + \mathbb{N}}$$

$$٩ - \text{اذا كان } \mathbb{N} \neq \emptyset, \text{ لكل } \mathbb{N}, \text{ من } \mathbb{N} \leftarrow \infty, \text{ فاثبت ان } \frac{١}{\mathbb{N}} \leftarrow ٠ .$$

اعط مثالا يبين ان العكس غير صحيح .

$$١٠ - \text{جد متتاليتين متباعدتين } \mathbb{S}, \text{ بحيث ان } \mathbb{S} + \mathbb{S} \ni \text{ قويم } .$$

$$١١ - \text{اذا كان } \mathbb{N} \leftarrow \infty, \mathbb{S} \ni \infty, \text{ فاثبت ان } \mathbb{N} + \mathbb{S} \leftarrow \infty .$$

$$١٢ - \text{لفرض ان } \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{A}, \mathbb{A} \neq \emptyset . \text{ اثبت انه يوجد } \mathbb{N} \ni \text{ بحيث ان } |\mathbb{N}| < \frac{||}{٢}$$

$$\text{لكل } \mathbb{N} \leq \mathbb{N} . \text{ ومنه اثبت انه اذا كان } \mathbb{N} \neq \emptyset, \text{ لكل } \mathbb{N} > \mathbb{N} . \text{ فان } \frac{١}{\mathbb{N}} \leftarrow \frac{١}{\mathbb{N}} .$$

$$١٣ - (١) \text{ في النظرية ١١ أثبتنا ان } \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{A}, \text{ من } \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{B} \text{ تعطي من } \mathbb{N} - \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{A} - \mathbb{B} . \text{ اثبت ان } \mathbb{N} + \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{A} + \mathbb{B} .$$

$$(٢) \text{ لفرض ان } \mathbb{N} \ni \text{ قواه يوجد } \mathbb{Q}, \mathbb{B} \ni \mathbb{N} \text{ بحيث ان } \mathbb{N} < \text{ لكل } \mathbb{D} < \mathbb{B} \text{ اثبت ان } \mathbb{A} = \mathbb{N} \text{ (نها } \mathbb{N} \leq \mathbb{D} . \text{ (ارشاد: افرض ان } \mathbb{A} > \mathbb{D} \text{ وطبق تعريف } \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{A} \text{ لتصل الى$$

تناقض).

(٣) جدع \exists تقييد حيث ان $\epsilon < 0$ لكل n ونعني $\epsilon = 0$.

(٤) في النظرية ١١ أثبتنا ان $s_n \leftarrow a$ ، $s_n \leftarrow b$ تعطي $s_n \leftarrow a, b$. اذن $s_n \leftarrow a$ ، $s_n \leftarrow a$ ويشكل عام $s_n \leftarrow a$ ، اذا كان رعدداً طبيعياً ثابتاً. بأخذ $s_n = 1 + \frac{1}{n}$ (حيث $s_n \leftarrow 1$) وباستخدام (٢) اعلاه لس بدلا من ϵ ، اثبت انه غير صحيح ان $s_n \leftarrow 1$.

٥. بناء كانتور للاعداد الحقيقية

لقد تم وضع الاساس الآن واصبح من السهل اثبات ان الحلقة الكسرية ك/توم هي حقل. سنسميه حقل الاعداد الحقيقية R . في النظرية ١٠ أثبتنا ان $\mathbb{Q} \subset R$ (للتاليات الاعداد النسبية) هي مجموعة جزئية فعلا. وسنبين انه، بعد تعريف الترتيب على R ، ستمكن من تعريف التقارب، والمتساليات الكوشية، الخ لـ R ، وسنثبت ان $\mathbb{Q} \subset R$ للمتاليات الحقيقية. لهذا فانه للمتاليات الحقيقية، كل متالية تقاربية هي كوشية، وبالعكس كل متالية كوشية هي تقاربية. وهذه الخاصية الهامة - خاصية التمام - اي $K = \mathbb{Q}$ هي التي تعطي ميزة للاعداد الحقيقية على الاعداد النسبية. وهذا يعني عملياً انه بالامكان فحص المتالية لمعرفة ما اذا كانت تقاربية ام لا، بفحص الفرق بين حدود المتالية دون الحاجة الى معرفة النهاية مقدماً. لهذا فانه من الممكن اعطاء متالية تقريبات لنهاية متالية تقاربية، مع ان النهاية قد لا تكون عدداً نسبياً يمكن حسابه لأي درجة من الدقة نريدها (لكنها عدد حقيقي).

النظرية ١٣. [الاعداد الحقيقية R].

ان الحلقة الكسرية ك/توم، حيث K حلقة المتاليات الكوشية للاعداد النسبية وتقوم هي المثالية المكونة من المتاليات الصفريّة، هذه الحلقة هي حقل يرمز له بالرمز R . ويرمز

للصفر وللعنصر المحايد في هذا الحقل بالرمزين ٠ ، ١ على التوالي.

البرهان .

من النظرية ١١ فإن K هي حلقة تبديلية صفرها $ص = (٠, ٠, ٠, ٠, \dots)$ وعنصرها المحايد $و = (١, ١, ١, ١, \dots)$ ، وتقوم هي حلقة جزئية مثالية في K . اذن وباستخدام نتيجة الفصل ١، البند ٣ نحصل على ان $K/تقوم$ هي حلقة. لتذكر ان $س \sim ص$ تعني $-س + ص \in تقوم$ ، اي ان $ص - س \leftarrow ٠$ أو $س - ص \leftarrow ٠$ لكل $س$ ، $ص \in ك$. بما ان $ك$ تبديلية فانه واضح من تعريف $ك$ ، $٠ = ك \sim ص$ ان R تبديلية. كذلك $ك \sim ٠ = ك$ ، $ك = ك$ لهذا فان $ك$ هو عنصر R المحايد. نكتب $١ = ك$ ، وبهذا نكون قد استخدمنا الرمز ١ كعدد طبيعي، وكعدد صحيح، وكعدد نسبي والآن كعدد حقيقي ولم ننته من استخدامه بعد لاننا سوف نستخدمه كعدد مركب، في البند ٦.

بما ان $ك \sim ٠ = ك$ ، $ك \sim ص = ك$ فاننا نرى ان $ك$ هو صفر R ويرمز له بالرمز ٠ . لهذا فان R هو حلقة تبديلية صفرها ٠ ، وعنصرها المحايد ١ (ومن الواضح ان $١ \neq ٠$ لانه اذا كان $١ = ٠$ فان $ك = ك$ ومنه $٠ \sim$ اي ان $١ - ٠ \leftarrow ٠$ ، $(٠ \leftarrow \infty)$ وهذا خطأ. اخيراً يجب ان نثبت ان R حقل. لنأخذ $ك \in ر$ حيث $ك \neq ٠$ اي ان $ك \sim ٠ = ك$. اذن $س \neq ص$ لهذا فان

$$س \nmid تقوم، \dots, \dots, \dots (١٧)$$

سوف نثبت ان (١٧) والحقيقة القائلة ان $س \nmid ك$ تضمنان انه يوجد $د \in N$ وعدد نسبي $د < ٠$ بحيث ان $|س| \leq د$ لكل $د \in N$ ولكل $د < ٠$ يوجد $ن < ب$ بحيث ان $|س| > د$. الآن $|س - س| \leq د$ لكل $ن$ ، $ر \leq ن$. لنأخذ $ب = ن$ ونختار $ن < ب$ بحيث ان $|س| \leq د$. الآن لكل $ر \leq ب$ ، $|س - س| = |س - س + س| \leq د + |س| < د + د < ٢د$ وهذا يثبت ان $س \nmid تقوم$ مما يناقض (١٧). لقد اثبتنا ان فرضيات النظرية ١٢ قد تحققت.

اذن المتتالية $\{s_n\}$ ك، $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = K$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = K$ حيث $s_n = (s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ ، ومنه $s_n \sim 0$.

وننتج ان $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = K$ ، لهذا فان لكل عنصر $s \in R$ (عدا الصفر) يوجد عنصر نظير K في عملية الضرب مما يثبت ان R حقل.

الآن نلاحظ انه بالامكان ان نجعل Q تطابق مجموعة جزئية من R . لكل $b \in Q$ ، ل نرمز للمتتالية الثابتة (b, b, b, \dots) بالرمز b ، حيث $b = (b, b, b, \dots)$. لنفرض ان a هي المجموعة الجزئية من R التي تتكون من كل صفوف التكافؤ \sim ، لكل $b \in Q$. اذن Q تشاكل a بواسطة الاقتران $q: Q \rightarrow a$ المعرفة بـ $q(b) = b$. فعلى سبيل المثال، q هو تقابل لان $q(b) = q(b')$ تعطي $b = b'$ ، واذن $b = b'$ ، ومنه $b = b'$. (ن $\leftarrow \infty$). لهذا فيجب ان تكون $b = b'$. كذلك، على سبيل المثال ايضاً، $q(b) = q(b')$ تعطي $b = b'$ ، $q(b) = q(b')$ تعطي $b = b'$. اذن Q تشاكل a تشاكلاً حقلاً جزئياً من R . لهذا ستعامل Q على انها حقل جزئي من R .

المثال ٨. [حل المعادلة $x^2 = 2$ في R]

لنفرض ان s هي المتتالية الكوشية المذكورة في النظرية ١٠. حيث اثبتنا ان $s_n \leftarrow 2$. لهذا فان العدد الحقيقي $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ يحقق $s^2 = 2$. فاذا استخدمنا فكرة الترتيب في R فاننا نستنتج ان s موجبة، سوف نكتب $s = \sqrt{2}$ أو $s = -\sqrt{2}$ ونسمي s الجذر التربيعي الموجب الوحيد.

بشكل اعم، اذا كان $n \in N$ ، $\exists r^+ \in R^+$ فانه يوجد عنصر وحيد $s \in R^+$ ، بحيث ان $s^n = r$ ، نكتب $s = \sqrt[n]{r}$. لهذا فانه لكل عدد حقيقي موجب يوجد جذر نوفاً موجب وحيد. وسوف نثبت هذه النتيجة في الفصل ٣، النظرية ٢. ولكن سيكون من المفيد لنا استخدام هذه النتيجة قبل اثباتها.

اُبتُنا في المثال ٨ ان العدد الحقيقي $\sqrt{2}$ يحقق المعادلة $x^2 = 2$. بما انه لا حل لهذه المعادلة ضمن الاعداد النسبية فانه ينتج ان هناك اعدادا حقيقية غير الاعداد النسبية . نسمي هذه الاعداد بالاعداد غير النسبية . اذن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي ، ويمكن اثبات ان $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي لكل $N \in \mathbb{N}$ بحيث ان N ليست مربعا كاملا ، اي ان $N \neq 1^2, 2^2, 3^2, \dots$. لهذا فانه يوجد عدد لا نهائي من الاعداد غير النسبية .

وهناك اعداد هامة غير نسبية مثل π ، e التي سوف نناقشها فيما بعد مع ان البرهنة على انها اعداد غير نسبية ليست بالامر السهل .

وهناك اعداد لا يمر ذكرها في الرياضيات التي تدرس في المدارس ولكن تستخدم كثيرا في التحليل . ولا تعرف اذا كانت هذه الاعداد نسبية ام غير نسبية . مثال على ذلك ، ثابت اويلر γ ، الذي يعرف على انه نهاية متتالية الاعداد الحقيقية التقاربية (س ٧) حيث

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n .$$

وما ذكرناه عن e ، π ، γ ، يحتاج الى افكار لم نناقشها بعد ، لهذا علينا ان نترك هذه الارقام المثيرة للاهتمام حاليا على الاقل .

يرمز لمجموعة الاعداد غير النسبية بالرمز \mathbb{R} ، ولمجموعة الاعداد النسبية بالرمز \mathbb{Q} . اذن $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ و $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ومن المثير للاهتمام ان نسأل هل هناك عناصر في $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ستعرف (انظر النظرية ١٤ في الفصل ٣) ان الاعداد غير النسبية اكثر من الاعداد النسبية ، والمقصود بذلك ان \mathbb{Q} لانهاية قابلة للعد ، اي ان \mathbb{Q} باعتبارها مجموعة تكافئ N ، في حين ان $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (وكذلك \mathbb{R}) لا نهائية غير قابلة للعد .

يجب ان نعرف ترتيبا على \mathbb{R} فالمساواة على \mathbb{R} تعني كما نعرف $a < b$. اذا كانت $a < b$ فان $a < b$ مع ان $a < b$. لكل $N \in \mathbb{N}$. لهذا لن نستفيد اذا قلنا ان $a < b$. $a < b$ تعني $a < b$ لكل $N \in \mathbb{N}$.

منعطي الآن تعريفا لـ $<$ في R بحيث نجعل R حقلا مرتبا ترتيبيا كاملا.

الترتيب على R .

إذا كان $ك س$ ، $ك$ من عنصرين في R فالتنا نعرف $ك س <$ $ك$ من إذا فقط إذا وجد $ب$ $ك س >$ $ب$ يعني $ك س < ٠$ و $٠ < ك س$ بحيث ان $س - ن$ $ص ن \leq$ ولكل $ن < ب$. والرمز $ك س >$ $ك س$ يعني $ك س < ٠$ $ك$ من وإذا كان $ك س < ٠$ فالتنا نقول ان $ك س$ عدد حقيقي موجب. وإذا كان $ك س \leq ٠$ فالتنا نقول ان $ك س$ عدد حقيقي غير سالب.

المثال ٩.

إذا كان $س = (٠, ٠, \frac{٣}{٤}, \frac{٤}{٥}, \frac{٥}{٦}, \dots)$ و $ص = (١, ١, \frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}, \dots)$ فإن $ك س < ٠$ $ك$ من. ولا أهمية لكون $س ن > ص ن$ عند $ن = ١, ٢$ لأن تعريف الترتيب يأخذ بعين الاعتبار $س ن - ص ن$ بوجه عام. وفي هذا المثال $س ن - ص ن \leq \frac{١}{٤}$ لكل $ن > ٢$.

النظرية ١٤.

مجموعة الأعداد الحقيقية R هي حقلا كامل الترتيب.

البرهان.

ثبتت ١ الى ٥ من النظرية ٥، مستبدلين عناصر Q بعناصر R يستخدمين تعريف الترتيب على R . لتأخذ ١ ولنفرض ان $ك س \neq ٠$ $ك$ من. اذن $س + ص$ ومنه $س - ص$ $ص$ ٣ $ك$ ولكن $س - ص$ في ١٣ $ق$. ومن برهان النظرية ١٣ فانه يوجد $ب$ ٣ $ن$ وعدد نسبي

و < . بحيث ان $|م - ص| \leq$ ولكل $ن < ب$. . . (١٨)

وبما ان $س - ص \geq ٣$ ك فانه يوجد $ن٠ = (٠/٣)$ بحيث ان

$$| (س - ص) - (س - ص) | > \frac{٣}{٢} \text{ لكل } ن \leq ن٠ \dots (١٩)$$

لنأخذ $ن = ن٠ + ب$ ، ان $ن < ن٠$ ون $< ب$. فمن (١٨) وقانون التثليث في Q فانه إما ان

يكون $س - ص < ٠$ أو $س - ص > ٠$ اذا كان $س - ص < ٠$ ، فإن

$س - ص \leq ٠$ ولهذا فإن (١٩) تعطي

$$س - ص < س - ص - ص \leq -\frac{٣}{٢} \text{ ولكل } ر \leq ن٠.$$

ومنه $ك < س$ من تعريف الترتيب على R (حيث استبدلت $ب$ بـ ٠ و $٣/٢$). فاذا

تحققت الحالة الثانية $س - ص > ٠$ ، فان نفس المناقشة تبين ان $س - ص < ٣/٢$ لكل

$ر \leq ن٠$ واذن $ك < س$ وهذا يثبت ٣ .

سنبرهن الآن ٣ ونترك ٣ ، ٣ كتهارين. لنفرض ان $ك < س$ اذن $س -$

$س \leq$ ولكل $ن < ب$ ومنه $(س + ع) - (س + ع) \leq$ ولكل $ن < ب$. لهذا فان

$ك + س < س + ع$ ، اي ان $ك < س + ع$ ، وهذا يثبت ٣ .

لقد عرفنا في السابق اكبر حد واصغر حد للنوني المرتب من الاعداد النسبية. وبطريقة

مشابهة، اذا كان $(س١، س٢، \dots، س٣)$ ، $ن$ من الاعداد الحقيقية المرتبة $س١، س٢، \dots$

\dots ، $س٣$ فانه يوجد $ب$ حيث $١ \geq ب \geq ن$ ويوجد $ح$ حيث $١ \geq ح \geq ن$ تحققان $س٣$

$\geq س١، س٢، \dots، س٣$ لجميع $١ \geq ر \geq ن$. اي انه

$س٣ = آك (س١، س٢، \dots، س٣)$ و $س١ = آص (س١، س٢، \dots، س٣)$.

ويمكن تعميم مسلمة ارخيدس من Q^+ الى R^+ ، حيث $Q^+ (R^+)$ ترمزان للاعداد

النسبية (الحقيقية) الموجبة.

النظرية ١٥ [مسلمة ارخيدس على R]

اذا كان $س \geq R^+$ فانه يوجد $ن \geq N$ بحيث ان $ن < س$.

البرهان .

س = ك. للمتالية ماص = (ص_ر) ∃ ك، فمن النظرية ٩ يوجد م ∃ Q* بحيث ان
 ص_ر | ≥ م لكل ر ∃ N. اذن ص_ر ≥ م لكل ر ∃ N. ومسلسلة ارخيدس على Q*
 تعطي ∃ N بحيث ان ن < م + ١، ومنه ن < ص_ر + ١ لكل ر ≤ ١. وباستخدام ن = ك_ر
 نحصل على ن < ك = م.

النظرية ١٦ [كثافة Q في R]

اذا كان أ، ب ∃ R، أ > ب فانه يوجد ح ∃ Q بحيث ان أ > ح > ب.

البرهان .

لتكن أ = ك_س، ب = ك_ص حيث س، ص ∃ ك، ص_ن - س_ن ≤ و < ٠ لكل
 ن < د. يوجد ن ∃ N بحيث ان | س_ر - س_ن | > $\frac{1}{4}$ وكذلك | ص_ر - ص_ن | > $\frac{1}{4}$
 لكل ن، ر ≤ ن. لتعرف ط = د + ن، ف = س_ط + $\frac{1}{4}$ ∃ Q الآن ن < ط تعطي
 س_ن + $\frac{1}{4}$ > ف > ص_ن - $\frac{1}{4}$. اذن باستخدام ف = ك_ن نحصل على
 ك_س > ف > ك_ص، مما يثبت النظرية.
 وبما ان R حقل كامل الترتيب، فان بإمكاننا ان نعرف القيمة المطلقة | س | لأي عدد
 حقيقي س كما فعلنا في Q، أي ان | س | = س اذا كان س ≤ ٠ و | س | = -س اذا كان
 س > ٠.

اذن جميع النتائج المتعلقة بالقيمة المطلقة في النظرية ٧ تبقى صحيحة عند استبدال
 الاعداد النسبية بالاعداد الحقيقية. وبشكل خاص فان المتباينة الثلاثية تبقى صحيحة، أي
 ان :

$$| س + ص | ≥ | س | + | ص | \text{ لكل س، ص } \exists R.$$

كذلك، التعاريف المتعلقة بالمتاليات في البند الرابع يبقى لها نفس المعنى عند استبدال

الاعداد النسبية بالاعداد الحقيقية . مثلاً ، لنفرض ان $s = (s_n)$ هي متتالية حقيقية اي ان $s : \mathbb{N} \leftarrow R$. نقول ان المتتالية هي متتالية تقاربية (نهايتها $a \in R$) : اذا وفقط اذا كان يوجد عدد $a \in R$ ، بحيث انه لكل عدد حقيقي $\epsilon > 0$ ، يوجد $n_0 = n_0(\epsilon)$ بحيث ان $|s_n - a| < \epsilon$ لكل $n \geq n_0$. سوف نكتب كما في السابق نها $s_n = a$ ، الخ .
لهذا فبامكاننا ان ندرس مجموعات المتتاليات التالية : تو ، تو ، ك ، ل ، ∞ ، حيث المتتاليات كلها حقيقية . وللتأكيد على ذلك سنكتب تو (R) ، تو (R) ، ك (R) ، ل (R) ∞ للدلالة على المتتاليات الصفرية ، والمتتاليات التقاربية الخ للاعداد الحقيقية .
وكما في النظرية ٩ ، بامكاننا اثبات ان

تو (R) \supset تو (R) \supset ك (R) \supset ل (R) ∞ . . . (٢٠)
المهم والجديد هنا ان الاحتواء تو (R) \supset ك (R) هو في الحقيقة مساواة . وهذه هي خاصية التمام لـ R التي سنثبتها الآن . وباقي الاحتواءات في (٢٠) هي احتواءات فعلية ، ويتبين ذلك من امثلة النظرية ٩ .

النظرية ١٧ [خاصية التمام في R]

تو (R) = ك (R) اي ان المتتالية الحقيقية تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت كوشية .

البرهان .

من (٢٠) نعرف ان تو (R) \supset ك (R) . لهذا علينا ان نثبت ان ك (R) \supset تو (R) ،
لنأخذ $s \in \text{ك}$ (R) . فمن تعريف المتتالية الكوشية ، لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث ان $|s_n - s_r| < \frac{\epsilon}{3}$ لكل $n, r \geq n_0$.

لنأخذ $N \geq 3$. اذن $\frac{1}{N} > \frac{1}{N} - \frac{1}{N}$. ومنه $s_r - \frac{1}{N} > s_r + \frac{1}{N}$ ، ومن النظرية

١٦ نستنتج انه يوجد $b_r \in Q$ بحيث ان

$$s_r - \frac{1}{N} > b_r > s_r + \frac{1}{N},$$

$$|s_r - b_r| > \frac{1}{N}.$$

ومن المتباينة المثلثية للاعداد الحقيقية نحصل على

$$|b_r - b_1| \geq |b_r - s_r| + |s_r - s_1| + |s_1 - b_1| > \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{r} + \frac{1}{r} > \frac{1}{N},$$

لكل $n, r \leq N$.

ومن مسلمة ارخيدس لـ R نحصل على

$$|b_r - b_1| > \epsilon, \text{ لقيم كبيرة بما فيه الكفاية لـ } n, r.$$

اذن المتتالية $b = (b_n)$ هي كوشية نسبية. فلنأخذ $k \in R$. سنثبت ان $s_n \leftarrow$

كـ $(n \leftarrow \infty)$ ، وهذا يعني ان $s = (s_n) \ni \text{تو}(\bar{R})$. الآن

$$|s_n - k_r| \geq |s_r - b_r| + |b_r - k_b| + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + |b_r - k_b|.$$

من مسلمة ارخيدس نحصل على $\frac{1}{n} > \frac{\epsilon}{r}$ حيث قيم n كبيرة بما فيه الكفاية، اذن يكفي

ان تثبت ان

$$|b_r - k_b| > \frac{\epsilon}{r} \text{ لكل } n \leq N, \quad (21)$$

حيث n عدد ما في N

ان $\epsilon < 0$ ، لنفرض ان $\frac{\epsilon}{4} = \frac{1}{p}$ ، لهذا فانه يوجد $\delta > 0$ ، و $\exists Q^+$ بحيث ان

$\epsilon < 0$ لكل $r < \delta$. وكذلك b هي متتالية كوشية، فاذن $|b_n - b_r| > \frac{\delta}{4}$ لكل

$n, r \leq n_1$ ، ومنه

$$- \frac{\delta}{4} < b_n - b_r < \frac{\delta}{4} \text{ لكل } r, n \leq n_1. \quad (22)$$

من (22) $b_n - b_r + \epsilon < - \frac{\delta}{4} + \epsilon \leq \frac{\delta}{4}$ لكل $n \leq n_1$ و $r < \delta$ ، لهذا

نحصل على

$$b_n - b_r + \epsilon < \frac{\delta}{4} \text{ لكل } n \leq n_1$$

وهذا يثبت جزءا من (21). وبطريقة مشابهة وباستخدام $b_n - b_m > \frac{\delta}{4}$ في (22)

نحصل على $b_n - b_m > \frac{\epsilon}{4}$ لكل $n \leq n_1$ ، وهذا هو الجزء الثاني من (21).

وهذا ينهي برهان النظرية 17 .

تمارين 2 - 5

(في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت ان التشاكل $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف في البند 5 يدق (ر) $=$ ك \forall لكل $\exists Q$ يحافظ

على الترتيب اي انه اذا كان $r > s$ في Q فان $Q(r) > Q(s)$ في R .

٢ - اكمل برهان النظرية 14 باثبات ان $K > K$ و $K > K$ تتضمن $K > K$ ،

وكذلك $K > K$ و $K > K$ تتضمن $K > K$.

٣- لنفرض ان s ، $\exists R$. اثبت ان $|s + \sqrt{s}| = |s| + |\sqrt{s}|$ اذا فقط اذا كان $s \leq 0$.

٤- [نفرض هنا ان القاريء على معرفة بسيطة بالنظام العشري].

اثبت ان $\sqrt{2} < 0$. ثم استنتج ان $\sqrt{2} < 1,4$ باستخدام $2 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1$ ، اثبت ان $\sqrt{2} > 1,414286$. استخدم هذا التقريب العلوي لـ $\sqrt{2}$ لايجاد تقريب سفلي افضل من $1,4$.

٥- اثبت ان $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ هو عدد غير نسبي.

٦- لنفرض ان a, b ، $\exists Q$ و $Q < 0$. اثبت ان $a + \sqrt{2} = b + \sqrt{2}$ حتمطي $a = b$ و $\sqrt{2} = 2$.

٧- اذا كانت $s \exists R$ فاثبت ان $s^2 \leq 0$. ومنه اثبت ان $a^2 + b^2 \leq 2$ ، ونحصل على المساواة اذا فقط اذا كان $a = b$.

٨- لنفرض ان (s_n) هي متتالية حقيقية تحقق $1 - s_n \geq 0$ لكل $n \exists N$. اثبت ان $(1 + s_1)(1 + s_2) \dots (1 + s_n) \leq 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

٩- لنفرض ان $s \exists R$ ، $s \leq 1$. اثبت انه لكل $n \exists N$ ، $(1 + s)^n \leq 1 + n$ و $(1 + s)^n \leq 1 + n + \frac{s}{4}(1 - n) + \frac{s^2}{4}(n - 1)(n - 2)$.

اذا كان $s \exists R$ و $(1 + s)^n \leq 1 + n + s + \frac{s^2}{4}(1 - n)(n - 1)$ لكل $n \exists N$ ما هي المتباينة التي يجب ان تحققها s ؟

١٠- لنفرض ان $s \leq 1$ و $s \leq 2$. جد شرطاً ضرورياً وكافياً على s ، بحيث يكون $(1 + s)^n = 1 + n + s$.

١١- لنفرض ان s عدد حقيقي ثابت. فاذا كان $s > \epsilon$ لكل $\epsilon < 0$ فاثبت ان $s \geq 0$.

لنفرض ان (a_n) ، (b_n) هما متتاليتان حقيقتان متقاربتان، نهايتهما a ، b على

التوالي . فإذا كان $\alpha \geq \beta$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فثبت ان $\alpha \geq \beta$. لاحظ ان هذه النتيجة تبين ان بإمكاننا اخذ نهايتي طرفي المتباينة عندما تكون النهايتان موجودتين .

١٢ - لنفرض ان $\exists R$ جد $\delta < \epsilon$ بحيث ان $\delta - \epsilon > \delta$ تتضمن $|\alpha - \beta| > \delta$.

عمم هذه النتيجة وجد $\delta = \delta(\epsilon, \alpha)$ بحيث ان $|\alpha - \beta| > \delta$ تعطي $|\alpha - \beta| > \epsilon$ ، حيث $\epsilon < \delta$.

$$١٣ - \text{عرف } s_n = (s_n) \text{ بـ } s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} .$$

اثبت ان s_n لا يتقارب وذلك بدراسة $|s_{2n} - s_n|$. اثبت كذلك ان s_n لا يتقارب لـ ∞ .

$$١٤ - \text{عرف } s_1 = 1 , s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n} . \text{ ناقش سلوك } (s_n) \text{ عندما } n \rightarrow \infty .$$

٦ . الاعداد المركبة

إذا كان $\exists R$ فانه ، ومن قانون التثليث ، إما أن تكون $s = 0$ ، أو $s < 0$ ، أو $s > 0$ ، ففي الحالة الاولى $s = 0$ وفي الحالة الثانية $s < 0$ وفي الحالة الثالثة $s < 0$ ومنه $s = (-s) < 0$ ، إذن $s \leq 0$ لكل $s \in R$. لهذا فانه لا حل للمعادلة $s^2 + 1 = 0$ في R . فإذا كنا نرغب في الحصول على حل فيجب ان نوسع الحقل R الى حقل يحتوي على حل .

الطريقة البدائية هي ان نفترض انه يوجد «عدد ما» t هو حل ، اي ان $t^2 + 1 = 0$ ، أو $t^2 = -1$. هذه هي الطريقة التي عولج بها الامر في السابق . وبسبب الغموض الذي يحيط بالعدد t سمي عددا «تخيليا» . ولكننا ما زلنا نستعمل هذه التسمية مع ان الغموض قد ازاله استخدام الأزواج المرتبة . ومع هذا فان الطريقة البدائية تعطي حافزا جيدا . لنأخذ s ، ص

$\exists R$. لنفرض انه بالامكان تكوين اعداد مركبة على شكل $س + ت$ ص تنطبق عليها شروط الحقل ما عدا اننا نستبدل $ت^2 = ت \cdot ت$ بالعدد -١ . فبامكاننا ان نجعل وان نضرب على النحو التالي:

$$(س + ت ص) + (س + ت ص) = (س + ت ص) + ت (س + ص) \quad (٢٣)$$

$$(س + ت ص) (س + ت ص) = (س س - ص ص) + ت (س ص + ص س) \quad (٢٤)$$

تمكنا المعادلتان (٢٣) ، (٢٤) من وضع الاشياء بدقة الشيء الاساسي في $س + ت$ ص هو انه زوج مرتبع $= (س ، ص)$ من الاعداد الحقيقية $س$ و $ص$ ، اي ان $\exists R \times R$ وهكذا بأخذ $(س ، ص)$ لم نعد بحاجة الى استخدام $ت$ ، وهو غير معروف . ويتبع انه هو الزوج $(٠ ، ١)$.

نعرف الجمع والضرب على $R \times R$ باستخدام (٢٣) ، (٢٤):

$$(س ، ص) + (س ، ص) = (س + س ، ص + ص) \quad (٢٥)$$

$$(س ، ص) (س ، ص) = (س س - ص ص ، س ص + ص س) \quad (٢٦)$$

ونعرف \oplus على انه $R \times R$ مع العمليتين المعرفتين في (٢٥) و (٢٦) ونسمي \oplus حقل الاعداد المركبة ويحتوي هذا الحقل على حل للمعادلة $س + ٢ = ١ = ٠$. وهذا ما سوف نثبت.

النظرية ١٨:

ان \oplus حقل صفه $(٠ ، ١)$ وعنصره المحايد $(٠ ، ١)$ وحقل الاعداد الحقيقية R يشاكل حقلا جزئيا من \oplus . وبمطابقة $(٠ ، ١) \ni$ مع $١ \ni R$ و $(٠ ، ٠) \ni$ ج مع $٠ \ni R$ ، نحصل على ان العنصر $(٠ ، ١) \ni \oplus$ يحقق $ت^2 + ١ = ٠$.

البرهان .

من الواضح ان (٢٥) ، (٢٦) تعرفان عمليتين ثنائيتين . فمن (٢٥) يتضح ان $(\oplus ، +)$ هي زمرة تبديلية صفرها $(٠ ، ٠)$ ونظير $(س ، ص)$ في $(\oplus ، +)$ هو $(-س ، -ص)$.

وانه لامر في غاية البساطة اثبات ان الاقتران $q: R \rightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بـ $q(s) = (s, 0)$ هو تشاكل، لهذا فان R تشاكل الحقل الجزئي $J = \{(s, 0) \mid s \in R\}$. لهذا فاننا سنعامل العدد المركب $(s, 0)$ على انه العدد الحقيقي s .

اخيرا بتعريف t على انه $(0, 1)$ و $(0, 2)$ و $(2, 1)$ نحصل على $t^2 + 1 = (0, 1) + (1, 0) = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2)$ مما يثبت النظرية. وقد جرت العادة على استعمال $e = (s, s)$ لترمز للعدد المركب، وسوف نسمي s جزء e الحقيقي ونكتبه $e = (e, e)$ ، ونسمي s جزء e التخيلي، ونكتبه $e = (e, e)$. لاحظ ان s, s ص عددا حقيقيان.

واي عدد على صورة $(s, 0)$ ، اي جزءه الحقيقي صفر، يسمى عددا تخيليا صرفا. واي عدد على صورة (s, s) يسمى حقيقيا. لهذا فان $(0, 1)$ هو تخيلي صرف والعدد $(0, 0)$ هو حقيقي وتخيلي صرف.

باستخدام هذا، فانه يمكن كتابة اي $e \in \mathbb{C}$ على الشكل التالي:

$$e = s + t s$$

$$= (e, e) + t(e, e).$$

لان $(s, s) = (s, 0) + (0, s) = (s, 0) + (0, 1) + (0, s) = (s, 1) + (0, s)$ فان

نذكر هنا ان $(s, s) = (s, s) = (s, s)$ تكافئ $s = s$ و $s = s$ لهذا فان

$$s + t s = s + t s \text{ اذا وفقط اذا كان } s = s \text{ و } s = s.$$

ومنه اذا تساوت اعداد مركبة تساوت اجزاؤها الحقيقية واجزاؤها التخيلية.

بعد ان تم بناء Q, R كحقليين، استطعنا ان نعرف ترتيبا كاملا عليها. ولتسوء الحظ من المستحيل تعريف ترتيب كامل على \mathbb{C} . فبالحصول على حل للمعادلة $s^2 + 1 = 0$ خسرنا الترتيب الكامل.

النظرية ١٩ .

لا يوجد ترتيب كامل على حقل الاعداد المركبة \mathbb{C} .

البرهان .

لنفرض ، ان امكن ، انه يوجد ترتيب كامل \wedge . ولانه قد لا تكون هناك علاقة بين هذا الترتيب والترتيب الكامل \succsim على R ، استخدمناه رمزا جديدا . الآن : t_1 الى t_4 ، من النظرية ٥ ، تنطبق على \wedge ، بدلا من $>$ ، وعلى \mathbb{C} بدلا من Q . فعلى سبيل المثال فان t_1 تنص على انه اذا كان e_1 ، e_2 في \mathbb{C} فان واحدة فقط من الحالات التالية يتحقق : $e_1 = e_2$ ، $e_1 \wedge e_2$ ، $e_2 \wedge e_1$.

لنكتب $= (0, 0)$ ، $= (0, 1)$ ، $t = (1, 0)$. فبما ان $t \neq$ ص فانه اما ان $\wedge t$ أو $t \wedge$ ص ، من t_1 . ففي الحالة الاولى فان t تعطي $\wedge t$. وفي الحالة الثانية فان t تعطي $t + (\wedge t) = (\wedge t)$ اي ان $\wedge t = (\wedge t)$ ، ومن هذا ، ومن t_4 ، نحصل على $\wedge t$. ففي الحالتين حصلنا على $\wedge t$. اذن من t نحصل على

(٢٧)

و \wedge ص

وباستخدام t على $\wedge t$ نحصل على

(٢٨)

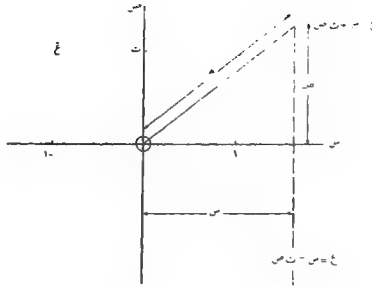
ص و

لكن (٢٧) ، (٢٨) متعارضان t_1 . وهذا يثبت النظرية .

تدلنا النظرية ١٩ على انه يجب ان لا نكتب متباينات بين الاعداد المركبة ابدا . قد نكتب احيانا $t(x) \geq t(y)$ لان طرفي المتباينة عددان حقيقيان . ولكن من الخطأ ان نكتب $t(x) > t(y)$ ، حيث $x > y$ ، حيث x عدد مركب .

المستوى المركب

يمكن ان نمثل الاعداد المركبة هندسيا كنقاط على المستوى (المستوى المركب) :



فالمجموعة $\{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ هي المحور السيني، وتسمى المحور الحقيقي أو خط الاعداد الحقيقية. والمحور الصادي هو المجموعة $\{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ، ويدعى المحور التخيلي. وفي الشكل السابق مثلنا عدة اعداد مركبة. فالعندل هو $(1, -1)$ أو $-1 + j$. فإلي عدد $c = (s, s) = s + jt$ بينا ان $c = (s, s) = s + jt$ هو الانعكاس على المحور السيني للنقطة c . نسمي \bar{c} مرافق c . وواضح من الشكل ان مرافق \bar{c} هو c ، اي ان $\bar{\bar{c}} = c$.

هناك عدد آخر هام وهو، المسافة بين c ونقطة الاصل. نجد من نظرية فيثاغورس ان

$|c| = \sqrt{s^2 + t^2}$ ، وهكذا $|c| = \sqrt{s^2 + t^2}$. الجذر التربيعي الموجب لـ $s^2 + t^2$. نسمي $|c|$ مقياس c ونكتب $|c|$. وهذا يتفق مع تعريف القيمة المطلقة للاعداد الحقيقية.

لانه اذا كان $c = s + jt$ حقيقيا فان $s = c$ ولهذا فان $|c| = \sqrt{s^2} = |s|$:
اصبح الآن ضروريا ان نعرف المرافق والمقياس دون الرجوع الى التمثيل الهندسي.

المرافق والمقياس .

لنفرض ان $ع = س + ت$ ص $\exists \mathbb{C}$ ، نعريف مرافق $ع$ على انه $\bar{ع} = س - ت$ ص ،
ومقياس $ع$ على انه العدد الحقيقي غير السالب $|م| = \sqrt{س^2 + ت^2}$ ص .

النظرية ٢٠ .

لنفرض ان $ع_١$ ، $ع_٢$ عدنان مركبان-اذن

$$(١) ح(ع) = \frac{ع_١ + \bar{ع}_١}{٢} ، نغ(ع) = \frac{ع_١ - \bar{ع}_١}{٢}$$

$$(٢) ع_١ + ع_٢ = \overline{ع_٢ + ع_١} ،$$

$$(٣) ع_١ \bar{ع}_٢ = \overline{ع_٢ ع_١}$$

$$(٤) ع_١ \bar{ع}_١ = ع_٢ \bar{ع}_٢$$

$$(٥) |ع_١| \leq |ع_٢| و |ع_١| = |ع_٢| اذا وفقط اذا كان $ع_١ = ع_٢$.$$

$$(٦) |ع_١| = |ع_٢| = |ع_١ - ع_٢| ولكن $|ع_١| \neq |ع_٢|$ بشكل عام .$$

$$(٧) |ع_١ ع_٢| = |ع_٢ ع_١| .$$

$$(٨) |ع_١ ع_٢| \geq |ع_١| |ع_٢| \geq |ع_١| + |ع_٢|$$

$$(٩) [التباينة المثلثية] |ع_١ + ع_٢| \geq |ع_١| + |ع_٢|$$

$$(١٠) |ع_١ - ع_٢| \leq |ع_١| - |ع_٢|$$

البرهان .

معظم البراهين مباشرة ، لذلك سنعطي عينة من بعض البراهين . اذا كان $ع_١ = س_١ + ت_١$ ،
ت ص ١ فان $\bar{ع}_١ = س_١ - ت_١$ ، لهذا فان $ع_١ - \bar{ع}_١ = ت_١$ ص ١ ، وهو الجزء الثاني من

(١). كذلك $\bar{e}_1 e_1 = (s_1 + t_1)(s_1 - t_1) = s_1^2 - t_1^2 = s_1^2 - t_1^2 + s_1^2 = s_1^2 + s_1^2$. وهذا هو (٤).

الآن $e_1 - s_1 = t_1$ لهذا فان $s_1 = (-s_1)$ ، وكذلك $(-s_1) = s_1$ وهذا يتضمن ان $|e_1| = |e_1 - s_1| = |\bar{e}_1|$. ومن السهل رؤية هذه النتيجة في المستوى المركب . والجزء الثاني من (٦) يبين الفرق بين المقياس والقيمة المطلقة لأن $s \in R$ تعطي $s^2 = |s|^2$. ومن الواضح ان $|t| = |s| = |s_1|$ ، ولكن $t^2 = -s^2$ وبشكل عام ان $|e| = |e_1|$ اذا فقط اذا كان e حقيقياً ، الشرط المعروف لدينا . لنفرض ان $|e| = |e_1|$ فيكون $s^2 = s_1^2 - t_1^2 = s_1^2 + s_1^2 = 2s^2$ ، $s = 0$ ، $t = 0$ اي ان e عدد حقيقي .

للاثبات (٧) لناخذ $|e_1 e_1| = |(e_1 e_1)| = (\bar{e}_1 e_1) = \bar{e}_1 e_1 = |e_1| |e_1| = |e_1|^2$. ومنه تتبع النتيجة .

اذا كان $e = s + t$ فان $|s| = |s_1| > |s_1| + |s_1| = |e|$ واذن $|e| < |s|$. وبطريقة مشابهة $|e| < |t|$. كذلك ، $|e| = |s_1| + |s_1| = |e|$ ، وهذا يثبت (٨) .

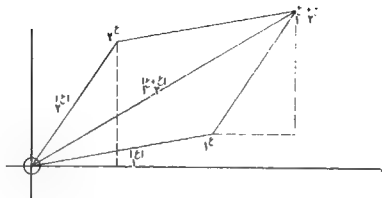
واهمية المتباينة المثلثية (٩) في الاعداد المركبة كاهميتها في الاعداد الحقيقية . ولاثباتها نأخذ

$$|e_1 + e_1| = |(e_1 + e_1)| = (\bar{e}_1 + \bar{e}_1)(e_1 + e_1) = (\bar{e}_1 + \bar{e}_1)(e_1 + e_1) = |e_1|^2 + |e_1|^2 = 2|e_1|^2$$

ومن (٨) نحصل على $|e_1 + e_1| \geq |e_1| + |e_1| = 2|e_1|$ ، ومنه $|e_1 + e_1| \geq |e_1| + |e_1|$.

ويمكن تمثيل المتباينة المثلثية في المستوى المركب كما في الشكل التالي

انها تنص هندسياً على ان مجموع طولي اي ضلعين في المثلث اكبر من اويساوي طول الضلع الثالث . وعلى القاريء ان يفحص هندسياً وتحليلياً متى تحدث المساواة ، اي متى يكون



$$|v_1 + v_2| = |v_1| + |v_2|$$

المثال ١٠

لنجد $\mathbb{C} \ni$ بحيث ان $v = t$. من الواضح انه اذا كان c حلا فان $-c$ هو الحل الوحيد الآخر . واذا كان $c = s + t$ ص حلا فان $s - v + v = t$ ص حلا ومنه $s = t$ ومنه $s = t$

ص $v = s = t$ اذن $s = \pm 1$ ص . اذا كان $s = 1$ ص فان $v = 1$ ص ومنه $s = \pm \frac{1}{v}$

ليكن التأكيد مباشرة من ان $c = \frac{t+1}{v}$ هو حل للمعادلة $c = t$.

لاحظ اننا لا نستطيع التحدث عن الجذر التربيعي الموجب لانه لا يمكن تعريف ترتيب

على \mathbb{C} . لهذا فان الرمز \sqrt{t} غامض وكذلك $\sqrt{1-t}$ ، لهذا لن نستخدمها . ولكن لا ضرر

من القول ان \sqrt{t} يمثل الحل ذا الجزء الحقيقي الموجب للمعادلة $c = t$.

المثال ١١ .

لنجد شرطا ضروريا وكافيا على $\mathbb{C} \ni$ بحيث ان $|c-1| = |c+1|$. فاذا فكرنا

في $|ع - ع|$ على أنه البعد بين $ع$ و $ع$ في المستوى المركب، ونحن نبحث عن $ع$ بحيث أن بعدها عن ١ يساوي بعدها عن $١ -$. فمن الواضح أن $ع$ يجب أن يكون عدداً تخيلياً صرفاً. لا ثبات ذلك، لنفرض أن $ع = ت ص$ إذن $ع - ١ = -١ + ت ص$ و $ع + ١ = ١ + ت ص$ واذن $|ع - ١| = |ع + ١|$ و $|١ + ع| = |١ + ص|$ وبالعكس، إذا كان $ع = س + ت ص$ و $|ع - ١| = |ع + ١|$ فإن $(س - ١) + ت ص = (س + ١) + ت ص$ ومنه $٠ = س$ ، أي $س = ٠$ واذن $ع = ت ص$.

المثال ١٢.

إذا كان $|ع| \geq ١$ ، $|ع| \geq ١$ لنبرهن على أن $|ع + ١| \geq |ع - ١|$. من المفيد عادة تربيع المقاييس عند دراسة متباينات مقاييس الأعداد المركبة ومن ثم استخدام $|ع| = ع$ من النظرية ٢٠. الآن

$$|ع + ١|^2 - |ع - ١|^2 = (ع + ١)(ع - ١) = ع^2 - ١$$

$$= (ع + ١)(ع - ١) = ع^2 - ١$$

$$= (ع + ١)(ع - ١) = ع^2 - ١$$

لأن $|ع| \geq ١$ ، $|ع| \geq ١$ ومنه نتبع النتيجة. لاحظ أننا نحصل على مساواة، إذا وفقط إذا كان $|ع| = ١$ أو $|ع| = ١$.

تمارين ٢-٦

(تجد في آخر الكتاب إرشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - إذا كان $ع \neq ٠$ فاثبت أن $ع^{-١} = \frac{ع}{ع^2}$. اكتب $\frac{ع^٣ - ٣ع}{ع^٢ - ٣ع}$ على صورة $س + ت ص$.

$$٢ - \text{إذا كان } ع \neq ٠ \text{ فاثبت ان } \left(\frac{1}{ع}\right) = \frac{1}{ع} \text{ وكذلك } \left|\frac{1}{ع}\right| = \frac{1}{|ع|}.$$

$$٣ - \text{اثبت ان } ع \text{ عدد حقيقي اذا فقط اذا كان } ع = ع.$$

$$٤ - \text{لنفرض ان } ١, ٢, \dots, n \in R \text{ ولنفرض ان } ع \text{ هو حل للمعادلة } ١ + ع + ع^٢ + \dots + ع^{n-١} = ٠.$$

$$٥ - \text{حل } ع^٢ = ١ \text{ باستخدام } ع^٢ - ١ = (ع - ١)(ع + ١).$$

$$٦ - \text{حل } ع + ع = ٤ + ٢.$$

$$٧ - \text{اثبت ان } |ع| + |ع| + |ع| + \dots + |ع| = ٢ \text{ اذا } |ع| = ٢.$$

$$٨ - \text{إذا كان } |ع| = ١ \text{ او } ع \neq ١, \text{ فجد قيمة } \left\{ \frac{(ع+١)}{(ع-١)} \right\}.$$

$$٩ - \text{اي من شروط الزمر تتحقق على } \{ع \in R \mid |ع| = ١\} \text{ مع عملية (أ) الجمع، (ب)}$$

$$\text{الضرب، (ج) العملية } * \text{ المعرفة بـ } ع * د = ع + د.$$

$$١٠ - \text{لنفرض ان } ع, د \in R. \text{ عرف } م(ع, د) = |ع - د|, \text{ اي البعد بين } ع, د.$$

$$ع. \text{ اثبت ان } م(ع, د) = ٠ \text{ اذا وفقط اذا كان } ع = د, \text{ وم } م(ع, د) = م(د, ع).$$

$$ع. \text{ اذا كان } ع, د \in R \text{ فاثبت ان } م(ع, د) \leq م(ع, د) + م(د, ع).$$

$$١١ - \text{إذا كان } ص, د \in R \text{ فاثبت ان } |ص + د| \leq |ص| + |د|.$$

$$+ |د|.$$

$$١٢ - \text{لنفرض ان } ع, د \in R \text{ و } |ع| \geq ١, |د| \leq ٠, \text{ اثبت ان } \sum_{i=1}^n |ع_i| \geq ١.$$

$$ع, د \geq ١.$$

$$١٣ - \text{لنفرض ان } |ع| > ١. \text{ عرف } ع = \frac{١ - ع}{ع^٢ - ١}. \text{ اثبت ان } |ع| > ١ \text{ تتضمن } |ع| > ١.$$

$$, \text{ وان } |ع| = ١ \text{ تتضمن } |ع| = ١.$$

١٤- لنفرض ان $\text{تخ}(ا) < ٠$ ، $\text{تخ}(١ع) < ٠$. فإذا كان $٢ع = \frac{١-١ع}{١-٢ع}$ ، أثبت ان $|١ع| > ١$.

١٥- لتكن $\text{س} = \{٣ع \text{ و } ٤أح(ع) < ٠\}$ ، هندسياً فإن س هي نصف المستوى الايمن ،

ولتعرف عملية $*$ بر $١ع * ٢ع = \frac{٢ع + ١ع}{٢ع + ١}$. اثبت ان $١ع + ١ع + ٢ع + ٠$ لكل $١ع$ ،

$٢ع$ س ، وان $*$ هي عملية ثنائية على س . هل هذه العملية خاصة التجميع ؟ هل هناك عنصر محايد في س ؟

١٦- لنفرض ان $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ \mathbb{R} وأد - $ب < ح < ٠$ ، ليكن $\text{و}(ع) = \frac{١ع + ب}{ح + ع}$.

اثبت ان و هو اقتران شامل من النصف العلوي للمستوى $\{٣ع \text{ و } ٤أخ(ع) < ٠\}$ الى نفسه . ما هي صورة النصف العلوي من المستوى اذا كان أد - $ب < ح < ٠$.

٧ . المتباينات

من خصائص التحليل الهامة احتواء على العدد الكبير من المتباينات المفيدة .

وسنعرض في هذا البند بعض المتباينات البسيطة التي قد يحتاج اليها البتدي .

يجب ان نؤكد من الآن اننا نكتب متباينات بين الاعداد الحقيقية فقط ، ولا نكتبها ابداً

بين الاعداد المركبة . ولكن قد تظهر الاعداد المركبة في المتباينات . فعلى سبيل المثال ، تنص

المتباينة الثلاثية على ان $|١ع + ٢ع| \geq |١ع| + |٢ع|$ لأي عددين مركبين $١ع$ ، $٢ع$ لكن هذه المتباينة هي بين المقاييس ، وبالتعريف ان مقياس العدد المركب هو عدد حقيقي غير سالب .

النظرية ٢١ [المتباينة الثلاثية].

$|a| + |b| \geq |a+b|$ لأي $a, b \in \mathbb{C}$ وعلاوة على ذلك إذا كان $a \neq 0$ فإن $|a| + |b| = |a+b|$ إذا وفقط إذا كان $a = b$ حيث a عدد حقيقي ، $a \leq 0$.

البرهان .

لقد أثبتنا في النظرية ٢٠ ان $|a| + |b| \geq |a+b|$.

نفرض الآن ان $a = b$ حيث $a \leq 0$. اذن

$$|a| + |b| = |a| + |a| = (1+1)|a| = |a+a| = |2a| = 2|a|$$

في هذا الجزء نرى اننا لا نحتاج لفرض ان $a \neq 0$.

بالعكس ، لنفرض ان $a \neq 0$ و $|a| + |b| = |a+b|$. وبالتربيع واستخدام

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$$

$$|a| + |b| = |a+b| \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2$$

اذن $\operatorname{Re}(a\bar{b}) = 0$ ، وهذا على صورة $\operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a||b|\cos\theta$ ، حيث $\theta = \arg(b/a)$ ،

د $\exists \theta$. لهذا فان $\cos\theta = 0$ ، اي $\theta = \pi/2$ ومنه $b = ia$ ، اي ان $b = ia$. لهذا

فان $|a| + |b| = |a| + |ia| = |a| + |a| = 2|a| = |a+ia| = |a(1+i)| = |a||1+i| = |a|\sqrt{2}$ ، وهذا يعطي $|a| = 0$ ، حيث $a = 0$.

$$|a| + |b| \leq \frac{|a+b|}{\sqrt{2}}$$

النظرية ٢٢ . [متباينة برنولي].

إذا كان $x \geq -1$ ، $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (29)$$

البرهان :

لنستخدم الاستقراء: اذا كان $n = 1$ فان $(1 + m) \leq 1 + m$ صحيحة. واذا كانت (٢٩) صحيحة نصرب الطرفين بالعدد غير السالب $1 + m$ فنحصل على
 $(1 + m)^{1+n} \leq (1 + m)(1 + m) = (1 + m)^2$ لان $n = 1$ فان $(1 + m)^2 \leq (1 + m)^2$ صحيحة.
 س، لان $n = 2$ فان $(1 + m)^3 \leq (1 + m)^3$ صحيحة. فباستخدام الاستقراء اثبتنا النظرية.

النظرية ٢٣.

$$\text{اذا كان } 1 < a, \text{ فانه لكل } n \in \mathbb{N}, \frac{1 - a^{1+n}}{1 + n} > \frac{1 - a}{n} \quad (٣٠)$$

البرهان.

ان (٣٠) تكافئ المتباينات التالية:

$$\begin{aligned} (1 + n)(1 - a^n) &> n(1 - a^{1+n}) \\ (1 + n)(1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1}) &> n(1 - a)(1 + a + \dots + a^n) \\ (1 + n)(1 + a + \dots + a^{n-1}) &> n(1 + a + \dots + a^n) \\ 1 + a + \dots + a^{n-1} &> n \end{aligned} \quad (٣١)$$

لكن (٣١) صحيحة لان $1 < a$ تتضمن ان $a^n < a^{1+n}$ لكل $n \geq 1$.
 وهكذا اذا بدأنا بـ (٣١) نرى ان (٣٠) تتحقق.

نتيجة.

$$\text{اذا كان } 1 < a, \text{ و } r > 1 \text{ حيث } r, \text{ ح } \exists Q \text{ فان } \frac{1 - a^r}{r} > \frac{1 - a^h}{h}.$$

البرهان .

لنفرض ان $r = \frac{p}{d}$ ، $h = \frac{d}{m}$ حيث b ، d ، w ، $m \in N$ ، اذن $r > h$ تتضمن

$b \cdot m > d \cdot w$ ومن (٣٠) ينتج انه اذا كان $v < 1$ فان

$$\frac{v^{1-p}}{b \cdot m} > \frac{v^{1-p}}{d \cdot w}$$

نحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ $v = \frac{1}{m}$.

النظرية ٢٤ . [متباينة كوشي وشوارتس] .

اذا كان a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و b_1 ، b_2 ، ... ، b_n اعداداً حقيقية فان

$$(32) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}$$

البرهان .

للتبسيط سنستعمل \sum ليرمز الى المجموع لـ $i \geq 1$. نلاحظ ان

$$(33) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

حيث $\sum_{i=1}^n a_i^2 = A$ ، $\sum_{i=1}^n b_i^2 = B$ ، $\sum_{i=1}^n a_i b_i = C$ ، لأن $b \leq 0$ ، فاذا كان $b = 0$ فان $B = 0$ ، لكل $i \geq 1$. ونصبح (٣٢) : $0 \geq 0$ وهي صحيحة .

اما اذا كان $B > 0$ ، فيمكننا ان نأخذ $h = \frac{C}{B}$ في (٣٣) لنحصل على

$$0 \leq \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b} - 1$$

أي إن $1 - \frac{d_1}{b} \leq 0$. واذن $d_1 \geq ab$ ، وهي متباينة كوشي وشوارتس (٣٢).

المثال ١٣ .

إذا كان $0 < r \leq 1$ لكل $n \geq 1$ ، فإن

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n^2.$$

لنثبت ذلك نأخذ $a_r = \sqrt[n]{a}$ ، $b_r = \frac{1}{a}$ في متباينة كوشي وشوارتس، لاحظ أن $\sum a_r b_r$

$$= \sum 1 = n.$$

النظرية ٢٥ .

لنفرض أن $0 < r$ اذن

$$a_1 a_2 \dots a_n = 1 \text{ تعطي } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n^2. \quad (34)$$

البرهان .

لترمزج (ن) الى (٣٤) . اذن ج (١) صحيحة لان $a_1 = 1$ تعطي $a_1 \leq 1$. لنفرض الآن أن ج (ن) صحيحة . سوف نثبت أن ج (ن + ١) صحيحة . وهذا يتم اثبات النظرية بالاستقراء .

لنفرض أن $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 1$. قد يكون $a_r = 1$ لكل $1 \leq r \leq n$.
١ . إذا حدث ذلك يكون $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = n + 1$ ، واذن تكون ج (ن + ١) صحيحة . وإلا فإنه يوجد ر بحيث أن $a_r \neq 1$.

إذا كان $s_r > 1$ فإنه يوجد $s_r < 1$. لأن $1 = A$. إذا كان $s_r < 1$ فإنه يوجد $s_r > 1$ ولهذا فإنه يمكننا أن نفرض أن $s_1 > 1 > s_{1+r}$.
 بكتابة $s_1 = s_1$ من s_{1+r} نحصل على s_1 من s_3 من $s_r = 1$ ، وبما أن ج (ن) صحيحة ينتج أن

$$(35) \quad s_1 + s_3 + s_5 + \dots + s_r \leq n. \dots$$

واذن

$$\begin{aligned} s_1 + s_3 + \dots + s_{1+n} - (s_1 + s_3 + \dots + s_{1+n}) \\ = s_1 + s_3 + \dots + s_{1+n} - 1 - s_1 - s_3 - \dots - s_{1+n} \\ = (s_1 - 1) + (s_3 - 1) + \dots + (s_{1+n} - 1) < 0 \text{ لأن } s_1 > 1 > s_{1+n}. \end{aligned}$$

ومن (35) نحصل على $s_1 + s_3 + \dots + s_{1+n} < n + 1$ ، مما يثبت النظرية.

النظرية ٢٦ [متباينة الوسط الحسابي والوسط الهندسي].

إذا كانت s_1, s_3, \dots, s_n أعداداً حقيقية غير سالبة، فإن الوسط الحسابي لهذه الأرقام أكبر من أو يساوي الوسط الهندسي أي أن

$$s_1 + s_3 + \dots + s_n \geq \frac{s_1 s_3 \dots s_n}{n}$$

البرهان.

إذا كان $s_r = 0$ لعدد ما فإن (36) تصبح واضحة لأن الطرف الأيسر يصبح صفراً، وطرفها الأيمن غير سالب. والا فيكون $s_r > 0$ لكل $1 \leq r \leq n$ ، ولهذا فإن

$$ح = (s_1 s_3 \dots s_n)^{\frac{1}{n}} < 0 \text{، ومنه}$$

$$1 = \frac{s_1}{ح} + \frac{s_3}{ح} + \dots + \frac{s_n}{ح}$$

من النظرية ٢٥ يتبع ان

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} \quad (36)$$

وهذا يعطي (٣٦).

المثال ١٤ .

$$\text{باخذ } s_r = r \text{ في (٣٦) نحصل على } \frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2} \text{ ومنه}$$

$$n \geq \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ لكل } n \geq N$$

النظرية التالية (النظرية ٢٧) تمهد لمتباينتين هامتين هما متباينة هولدر ومنكوفسكي (النظرية ٢٨ والنظرية ٢٩). ويعتمد برهان نظرية ٢٧ على امور سنناقشها فيما بعد، وهي فكرة الاسس s^1 وبعض النتائج من حساب التفاضل. ولكن من المفيد ان نعطي هذه المتباينات في هذا البند.

النظرية ٢٧ .

لنفرض ان a, b, c, \dots, d اعداد حقيقية بحيث ان $a \leq b \leq c \leq \dots \leq d$ ، و $1 < p$ ،

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ اذن}$$

$$ab \geq \frac{a^p}{b^{p-1}} + \frac{a^p}{c^{p-1}} \quad (37)$$

البرهان .

$$\text{لاحظ ان } d = \frac{1}{1-a} < 1. \text{ اذا كان } b = 0 \text{ فان } b^p = 0 \text{ وتصبح (٣٧) } > \frac{1}{1-a}$$

كان $a = 0$ فإن $\sqrt[n]{a} = 0$ ومنه $a \geq 1$ لكل $n \geq 1$. وإذا كان $b = 0$ نحصل أيضاً على (٣٩). أما إذا كان $a < 0$ فإن (٣٧) تعطي

$$(40) \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{b} \geq \frac{a}{\frac{1}{b}} + \frac{b}{\frac{1}{a}} \dots$$

لكل $a \geq 1, b \geq 1$. وبأخذ المجموع $a \geq 1, b \geq 1$ لطرفي (٤٠) نحصل على $\sum_{i=1}^n a_i b_i$

$$\geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) ab = ab, \text{ مما يثبت (٣٩).}$$

نتيجة .

إذا كان $a = 2$ فإن $d = 2$ و (٣٩) تعطي

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right),$$

وهي متباينة كوشي وشوارتس (للاعداد غير السالبة a, b). لهذا فإن متباينة هولدر للاعداد غير السالبة هي تعميم لمتباينة كوشي وشوارتس.

النظرية ٢٩ [متباينة منكوفسكي].

إذا كان $a \leq 1, a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$ و $b \leq 1, b_1, b_2, \dots, b_n \leq 1$ ، فإن

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{\frac{1}{p}} \right]^p \geq \left[\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}} \right]^p + \left[\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{p}} \right]^p,$$

حيث يؤخذ المجموع لقيم a_i في الفترة $1 \geq a_i \geq 0$.

البرهان .

إذا كان $ح = ١$ فإن متباينة منكوفسكي تصبح $\sqrt[ح]{ا + ب} \geq \sqrt[ح]{ا} + \sqrt[ح]{ب}$ وهي صحيحة (مساواة). لنفرض الآن ان $ح < ١$ للتبسيط لن نكتب ر .

$$\begin{aligned} \sqrt[ح]{ا + ب} &= \sqrt[ح]{ا} \sqrt[ح]{1 + \frac{ب}{ا}} = \sqrt[ح]{ا} \left(1 + \frac{ب}{ا} \right)^{\frac{1}{ح}} \\ &= \sqrt[ح]{ا} \left(1 + \frac{ب}{ا} \right)^{\frac{1}{ح}} + \sqrt[ح]{ا} \left(\frac{ب}{ا} \right)^{\frac{1}{ح}} + \dots \\ &\geq \sqrt[ح]{ا} \left(1 + \frac{ب}{ا} \right)^{\frac{1}{ح}} + \sqrt[ح]{ا} \left(\frac{ب}{ا} \right)^{\frac{1}{ح}} + \dots \\ &= \sqrt[ح]{ا} + \sqrt[ح]{ب} \end{aligned}$$

(٤١)

من متباينة هولدر حيث استخدمنا $(ح - ١) د = ح$.

إذا كان $\sqrt[ح]{ا + ب} = \sqrt[ح]{ا} + \sqrt[ح]{ب}$ فإن متباينة منكوفسكي تصبح واضحة، وإذا كان $\sqrt[ح]{ا + ب} < \sqrt[ح]{ا} + \sqrt[ح]{ب}$ ، نقسم طرفي (٤١) على $\sqrt[ح]{ا + ب}$ ونحصل على النتيجة المطلوبة.

تمارين ٧ - ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

- ١ - إذا كان $ا، ب، ج \geq ٠$ ، فأثبت ان $\sqrt[٢]{ا + ب} + \sqrt[٢]{ب + ج} + \sqrt[٢]{ج + ا} \geq \sqrt[٢]{ا} + \sqrt[٢]{ب} + \sqrt[٢]{ج}$.
- ٢ - أثبت ان $(١ + \frac{١}{ن})^٢ \leq (١ + \frac{١}{ن})^٣$ لكل $ن \in \mathbb{N}$.
- ٣ - باختيار $س$ مناسب في متباينة برنولي أثبت ان $(١ + \frac{١}{١-ن})^٢ < (١ + \frac{١}{ن})^{١+ن}$ لـ $ن = ٢، ٣، \dots$.

٤- إذا كان $s, ص \leq ٠, أ, ب \in N$, فاثبت ان

$$\frac{s \cdot \sqrt{ص}}{\sqrt{أ \cdot ب}} \geq \left(\frac{ص + ص}{أ + ب} \right)^{\frac{1}{2}}$$

٥- لنفرض ان $ح < ١$, $\frac{1}{ج} + \frac{1}{د} = ١$ و $أ, ب \in \mathbb{C}$, $١ \geq ر \geq ن$. اثبت ان

$$\left| \sum_{ج=١}^ن أ \cdot ب \right| \geq \left| \sum_{ج=١}^ن أ \right| \cdot \left| \sum_{ج=١}^ن ب \right|^{\frac{1}{ر}}$$

٦- (١) لنفرض أن $أ, أ١, \dots, أ٢, \dots, أ٢ \leq ٠, و > ٠$. استخدم متباينة هولدر لإثبات ان

$$\left(\sum_{ج=١}^ن \frac{1}{أ٢} \right)^{\frac{1}{٢}} \geq \left(\sum_{ج=١}^ن \frac{1}{أ} \right)^{\frac{1}{٢}}$$

(٢) استخدم (١) لإثبات انه اذا كان $أ, ب, ح \leq ٠, أ٢, ب٢, ح٢ = ٨$ فان $أ٢ + ب٢ + ح٢ = ٢٤$

ب $٢ + ح٢ \leq ١٦ \sqrt{\frac{٢}{٣}}$. وكذلك جديلاً لـ $أ, ب$, حيث ان $أ٢ + ب٢ + ح٢ = ٢٤$

$$و أ٢ + ب٢ + ح٢ = ٢٤ \sqrt{\frac{٢}{٣}}$$

٧- اذا كان $ح \leq ١, أ١, \dots, أ٢, \dots, أ٢ \in \mathbb{C}$, فاثبت ان

$$\left| \sum_{ج=١}^ن أ \right| \cdot \left| \sum_{ج=١}^ن ب \right| \geq \left| \sum_{ج=١}^ن أ \cdot ب \right|$$

٨- تذكر ان R^n هي مجموعة n من الاعداد الحقيقية المرتبة من $(س١, س٢, \dots, س٢, س٢)$

ليكن $ح \leq ١$, ولنكتب

$$\|s\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |s_i|^2 \right)^{1/2}, \text{ لكل } s \in R.$$

لتعرف $s + v = (s_1 + v_1, s_2 + v_2, \dots, s_n + v_n, \dots)$ ، $\|s\| = \|s_1 + v_1, s_2 + v_2, \dots, s_n + v_n, \dots\|$ مع هذه التعاريف تصبح R فضاء خطياً حقيقياً. أي انه فضاء خطي على الحقل R .

اثبت ان:

$$(1) \|s\| = 0 \text{ اذا وفقط اذا كان } s = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(2) \|s\| \geq 0 \text{ لكل } s \in R$$

$$(3) \|s + v\| \leq \|s\| + \|v\| \text{ لكل } s, v \in R.$$

يدعى العدد الحقيقي غير السالب $\|s\|$: معيار s ، وعندما $\|s\| = 0$ نحصل على ما يسمى بمعيار اقليدس. لاحظ ان المعيار $\|s\|$ خواص مشابهة لخواص القيم المطلقة للاعداد الحقيقية ومقياس الاعداد المركبة.

ولأن R هو فضاء خطي ولأن $\|s\|$ تحقق (1)، (2)، (3) فان $(R, \|s\|)$ هو مثال لفضاء خطي معياري.

ونظرية الفضاءات الخطية المعيارية لها اهميتها في موضوع التحليل الدالي. ونجد معلومات اولية عن هذه الفضاءات في كتاب للمؤلف عنوانه

«Elements of Functional Analysis»

٩. [متباينة جنسن].

اذا كان a_1, a_2, \dots, a_n ، اثبت ان

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{1/q}$$

(ارشاد: عالج اولا الحالة $\sum_{r=1}^n a_r = 0$ ، ثم في حالة $0 < 0$ ، استخدم الحقيقة $\frac{a_r}{r}$

≥ 1 لكل $1 \leq r \leq n$).

١٠- ثبت $n \in \mathbb{N}$ ، ولنفرض ان $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

ولنفرض اننا على معرفة بالحقيقة $n \leq \frac{1}{a_1} \left(\sum_{r=1}^n a_r \right) \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{a_r} \right)$ ، اثبت ان

$$\sum_{r=1}^n a_r \geq n.$$

افصل الثالث

مجموعات الأعداد

١ . مجموعات محصورة من الأعداد الحقيقية

نستخدم في هذا البند خاصية التمام في R (النظرية ١٧) لإثبات نظرية هامة تسمى «مسلمة الحد الأعلى». تنص هذه النظرية على أنه يوجد أصغر حاصر أعلى لكل مجموعة محصورة من أعلى وغير خالية من الأعداد الحقيقية. وسنعطي عدة تطبيقات لهذه النتيجة من ضمنها إثبات وجود جذر نوّبي موجب وحيد لكل عدد حقيقي موجب. وسنعرف أولاً فكرة المجموعة المحصورة من الأعلى، والمجموعة المحصورة من الأسفل، والمجموعة المحصورة. لاحظ التشابه مع المتتاليات المحصورة.

المجموعة المحصورة

- (أ) نقول ان المجموعة غير الخالية $S \subset R$ محصورة من الاعلى ، اذا وفقط اذا وجد عدداً $m \in R$ بحيث ان $s \leq m$ لكل $s \in S$. ونقول ان m هو حاصر اعلى لـ S .
- (ب) نقول ان المجموعة غير الخالية $S \subset R$ محصورة من اسفل ، اذا وفقط اذا وجد لـ S R بحيث ان $s \leq l$ لكل $s \in S$. ونقول ان l هو حاصر اسفل لـ S .
- (ج) نقول ان $S \subset R$ محصورة ، اذا وفقط اذا كانت محصورة من اعلى ومن اسفل .

المثال ١ .

- (أ) لتكن $S = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. ان S محصورة من اعلى بالصفر ، اي ان $s \leq 0$ لكل $s \in S$. لهذا فان الصفر هو حاصر اعلى لـ S . لكن S غير محصورة من الاسفل لانه لكل $l \in R$ ، وحسب مسلمة أرخيدس ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث ان $N > l$ اي انه يوجد $s \in S$ بحيث ان $s > l$.

- (ب) $S = \mathbb{N}$ محصورة من اسفل بـ ١ لكنها غير محصورة من اعلى .

- (ج) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ محصورة من اسفل بالصفر ومن اعلى بـ ١ .

- (د) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ محصورة من اسفل بـ ١ لكنها غير محصورة من اعلى .

لانه اذا كان $0 < s < 1$ فان $1 > \frac{1}{s}$ ، لهذا فان S محصورة من اسفل بـ ١ . الآن لاي m

$\exists R$ خذ $s = \frac{1}{m+2}$. فتكون $0 < s < 1 < \frac{1}{m} = \frac{1}{m+2} + \frac{2}{m(m+2)} < m+2$. واذن S غير محصورة من اعلى .

واذا كانت المجموعة محصورة من أعلى فإنه يوجد حاصر أعلى، لنقل م. ومنه ينتج انه اذا كانت $m < M$ ، فإن m حاصر اعلى ايضا للمجموعة. ولكن اذا كان $m > M$ فقد يكون m حاصرا اعلى وقد لا يكون. واذا كان $m > M$ حاصرا اعلى فإنه يكون افضل من M ، لانه اصغر. ومن المفيد ان نعرف فيما إذا كان يوجد أصغر حاصر أعلى، أي: حاصر اعلى أصغر من او يساوي كل حاصر أعلى آخر.

لهذا يكون العدد الحقيقي m هو اصغر حاصر أعلى للمجموعة غير الخالية من S ، اذا فقط اذا كان

س $\geq m$ لكل $s \in S$ (١)
ولكل $w < m$ يوجد $s \in S$ بحيث ان $s < m - w$ (٢)
فنكتب $m = \text{ص.ح.ع} (S)$. وتنص المتباينة (١) على ان m هو حاصر أعلى لـ S .
وتنص (٢) على ان أي عدد اقل من m ، أي $m - w$ و لا يمكن ان يكون حاصرا اعلى لـ S .
وهذا يعني ان m هو أصغر حاصر أعلى.

لاحظ اننا نتحدث عن اصغر حاصر أعلى كعنصر وحيد، لانه اذا كان m هو اصغر حاصر أعلى آخر فإن $m \geq m$ وكذلك $m \geq m$ ومنه $m = m$. اي انه اذا وجد لمجموعة ما اصغر حاصر أعلى فإنه يكون وحيدا.

وبالمثل اذا كانت المجموعة محصورة من اسفل فإننا نتكلم عن اكبر حاصر أدنى ونعرفه كما يلي:

يكون العدد l أكبر حاصر ادنى للمجموعة غير الخالية من S ، اذا فقط اذا كان
س $\leq l$ لكل $s \in S$ (٣)
لكل $w < l$ يوجد $s \in S$ بحيث ان $s > l + w$ (٤)
ونكتب $l = \text{ك.ح.د} (S)$.

تنص المتباينة (٣) على ان l هو حاصر ادنى لـ S وتنص (٤) على ان اي عدد اكبر من l ، أي $l + w$ ، لا يمكن ان يكون حاصرا ادنى. فاذا وجد لمجموعة ما اكبر حاصر ادنى، فإنه يكون وحيدا.

سوف تثبت في النظرية ١ أن لكل مجموعة محصورة يوجد أصغر حاصر أعلى ، وأكبر حاصر أدنى . ولكن قبل اعطاء البرهان لنناقش المثال ١ . في (أ) ان ص.ح.ع (س) = ٠ ، لان $s \geq ٠$ لكل $s \in S$ ، وهكذا نتحقق (١) . لاحظ انه اذا كان $٠ < s$ فان $٠ < s$ تحقق ، و
ومنه نتحقق (٢) . وبالمثل في (ب) نرى ان ك.ح.د (س) = ١ . لاحظ ان ص.ح.ع (س) $\in S$ في (أ) وك.ح.د (س) $\in S$ في (ب) . لكن بشكل عام قد يكون اصغر حاصر اعلى
وأكبر حاصر أدنى موجودين لمجموعة ما ولا ينتميان للمجموعة . نرى ذلك في (ج) ، حيث
ك.ح.د (س) = ٠ لـ S . في حين ان ص.ح.ع (س) = ١ $\notin S$. لاثبات ان ك.ح.د (س)
= ٠ لاحظ ان $\frac{1}{n} < ٠$ لكل $n \in N$. لهذا فان (٣) تتحقق . والآن من مسلمة ارخميدس
نحصل على انه يوجد $n \in N$ بحيث ان $\frac{1}{n} < \frac{1}{١٠}$ ومنه $\frac{1}{n} > ٠$ وهكذا نتحقق (٤) ، واذن
ك.ح.د (س) = ٠ . وأخيراً في (د) من المثال (١) نحصل على $\frac{1}{n} < ١$ لكل $٠ < s$ ، $١ > s$ ،
لهذا فان (٣) تتحقق . واذا كان $٠ < s$ فاننا نختار s بحيث ان $\frac{1}{s} > ١$. لهذا
فان $٠ < s < \frac{1}{s}$ و $١ > s$ ، ونتحقق (٤) . اذن ك.ح.د (س) = ١ ، وفي الحقيقة
الآن .

النظرية ١ . [مسلمة الحاصر الاعلى في R] .

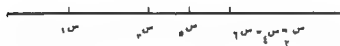
اذا كانت S مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية وكانت محصورة من اعلى ، فانه
يوجد اصغر حاصر اعلى لـ S . وقد يكون هذا العدد عنصراً في S وقد لا يكون .

البرهان .

لنكن α هي مجموعة جميع الحواصر العليا لـ S . وبما ان S محصورة من اعلى فانه

يوجد حاصر اعلى s_3 له s_2 ، وبما ان s_2 غير خالية فانه يوجد $a \in s_2$. لنكتب $s_1 = a - 1$ ،
 لهذا فان $s_1 > a \geq s_3$. لنفرض ان $s = (s_1 + s_3)/2$. اما ان يكون $s \in s_1$ او
 يكون $s \in s_3$ ، متممة s . ففي الحالة الثانية افرض ان $s = s_3$ ، $s = s_3$ ، وفي
 الحالة الاولى افرض ان $s = s_1$ و $s = s_3$. ففي الحالتين نحصل على $s_1 \geq s_3 >$
 $s_3 \geq s_2$ ، وكذلك s_2 ، $s_3 \in s_1$ ، $s_2 \in s_3$.

الآن لناخذ $s = (s_1 + s_3)/2$. فاذا كان $s \in s_1$ افرض $s = s_1$ ، $s = s_3$ ، واذا
 كان $s \in s_3$ افرض $s = s_3$ ، $s = s_1$. اذن $s_1 \geq s_2 > s_3 \geq s_2$ ، $s_1 \geq s_2$ ،
 $s_3 \geq s_2$ ، اذن نحصل على $s_1 \geq s_3 \geq s_2 > s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ،
 بحيث ان $s_1 \geq s_2$ ، $s_3 \geq s_2$ ، $s_1 \geq s_3$ ، $s_2 \geq s_3$ ، $s_1 \geq s_2$ ،
 نستمر بالاستقراء ونحصل على $s_1 \geq s_3 \geq s_2 \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_2 \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ،
 $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \leq s_2 \leq s_1$. حيث ان $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ، $s_2 \geq s_3$ ، $s_1 \geq s_2$ ،
 القاريء بتوضيح بناء المتتالية (s_n) على خط الاعداد الحقيقية. وعلى سبيل المثال نوضح
 ادناه الحالة عندما يكون $s \in s_1$.



فمن الواضح ان $|s_n - s_m| \geq (s_1 - s_2)/2$ لكل $m, n \leq 2 + 1$ ومنه ينتج
 ان (s_n) هي متتالية كوشية من الاعداد الحقيقية. ومن النظرية ١٧، في الفصل الثاني،
 نحصل على ان (s_n) هي تقاربية. لهذا فان $s_n \rightarrow s$. اذن $s_n \rightarrow s$.
 لناخذ $s \in s_3$ ، $N \in \mathbb{N}$. اذن $s_n \in s_3$ تق تتضمن $s \in s_3$ ، فباستخدام نتيجة

السؤال ١١، من التمارين ٢-٥، نحصل على $S \supseteq N \cup \{a\}$. إذن $a \in S$ هو حاصر أعلى لـ S .

لنفرض الآن، إذا أمكن، أنه يوجد حاصر أعلى $a \in S$ بحيث $a \in S$. إذن $a \in S$ ، وبما أن $a \in S$ نحصل على $a \in S$ | $a \in S$ | $a \in S$ ، لكل n حيث n عدد كبير بما فيه الكفاية. إذن $a \in S$ لكل عدد كهذا. لهذا فإن $a \in S$ لعدد ما $n \in \mathbb{N}$. وبما أن $a \in S$ هو حاصر أعلى لـ S فإن $a \in S$ هو حاصر أعلى لـ S أيضاً، مما يناقض $a \in S$ ؟ إذن كل $a \in S$ يجب أن يحقق $a \in S$ ، لهذا فإن $S = \emptyset$ (ص.ح.ع (ص)). وهذا يثبت النظرية.

وباستخدام $S = \{a \in S \mid a \in S\}$ والنظرية ١، نرى أنه إذا كانت S مجموعة غير خالية ومحصورة من أسفل فإنه يوجد لها أكبر حاصر أدنى. وفي الحقيقة أن $a \in S$ (ص) = S (ص.ح.ع (ص)).

المثال ٢.

لنفرض أن S ، S مجموعتان غير خاليتين وجزئيتين من R ، وكلاهما محصورة من أعلى. ولنعرف $S = \{a \in S \mid a \in S\}$. لنثبت أن S محصورة من أعلى وأن S (ص.ح.ع (ص)) = S (ص.ح.ع (ص)) + S (ص.ح.ع (ص)).
فإذا كان $a \in S$ فإن $a \in S$ + S حيث S ، S عنصران في S ، S على التوالي.
إذن $S \supseteq S$ (ص.ح.ع (ص)) و $S \supseteq S$ (ص.ح.ع (ص)). لهذا فإن $a \in S \supseteq S$ (ص.ح.ع (ص)) + S (ص.ح.ع (ص)).
كذلك لكل $a \in S$ ، يوجد $a \in S$ ، $a \in S$ بحيث $a \in S$ < S (ص.ح.ع (ص)) - $\frac{1}{4}$ ، وكذلك $a \in S$ (ص.ح.ع (ص)) - $\frac{1}{4}$. إذن $a \in S$ + S < S (ص.ح.ع (ص)) + S (ص.ح.ع (ص)) - $\frac{1}{4}$ ،
أي أنه يوجد $a \in S$ بحيث $a \in S$ < S (ص.ح.ع (ص)) + S (ص.ح.ع (ص)) - $\frac{1}{4}$. ومنه يتبع أن S (ص.ح.ع (ص)) = S (ص.ح.ع (ص)) + S (ص.ح.ع (ص)).

من المفيد هنا ان نلخص خواص R التي توصلنا اليها: نذكر هنا انه في بعض مساقات التحليل تؤخذ هذه الخواص كمسلّمات، ويمكن عندها البدء بسرعة. ويمكن تطبيق هذا في المساق الحالي، ولكنني اعتقد ان بناء R ، مع انه كان شاقاً، الا انه يستحق العناء، وان على كل طالب يدرس الرياضيات ان يكون ملماً بالافكار الاساسية له مع ان التفاصيل قد تنسى.

خواص R .

مجموعة الاعداد الحقيقية R هي حقل. يجب ان نتذكر ان لكل عدد $s \in R$ ، $s \neq 0$ يوجد نظير s^{-1} بحيث ان $s^{-1} \cdot s = 1$. ولكن لا يوجد للصفر نظير. لهذا لا نستطيع ان نقسم على الصفر. الحقل R كامل الترتيب من حيث العلاقة $>$ التي تحقق ما يلي:

(ت₁) لكل s ، $v \in R$ تتحقق واحدة فقط من التالية: $s = v$ او $s > v$ او $s < v$.

(ت₂) $s > v$ و $v > e$ تتضمن $s > e$.

(ت₃) $s > v$ تتضمن $s + e > v + e$.

(ت₄) $s > v$ و $e > v$ تتضمن $s > e$. وأخيراً R نام اي ان المتتالية الحقيقية تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت كوشية. لقد عرفنا ان هذه الخواص تتضمن «مسلمة الحاصل الاعلى» اي انه لكل مجموعة جزئية غير خالية من R ومحصورة من اعلى يوجد اصغر حاصر اعلى وهذا قد يكون وقد لا يكون عنصراً في تلك المجموعة الجزئية. وهناك خاصيتان اخريان هامتان لـ R وهما «مسلمة ارخيدس» والحقيقة القائلة ان حقل الاعداد النسبية كثيف في R .
نطبق الآن النظرية ١ لنثبت انه لكل عدد حقيقي موجب يوجد جذر نوني.

النظرية ٢.

نفرض ان $n \in \mathbb{N}$ ، $r \in R^+$. اذن يوجد عدد وحيد $v \in R^+$ بحيث ان $v^n = r$.

$$\text{سنكتب ص} = \sqrt[n]{r} = \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$$

البرهان.

لنفرض ان $\text{ص} = \{ \text{س} \in R^+ \mid \text{س}^n > r \}$. ولنفرض ان $\frac{r}{1+r} = \text{أ}$. اذن $\text{أ} > 0$.
 $1 > \text{أ}$. لهذا فان $\text{أ}^n > \text{أ}$ ، ومنه $\text{أ} \in \text{ص}$. لهذا فان $\text{ص} \neq \emptyset$.

الآن $\text{س} \in \text{ص}$ يتضمن $\text{س} > 1 + \text{أ}$. ويعكس ذلك يكون $\text{س} \leq 1 + \text{أ}$ وهذا يتضمن
 $\text{س}^n \leq \text{س} < \text{ر}$ ، مما ينقض $\text{س} \in \text{ص}$. اذن ص غير خالية ومحصورة من اعلى بـ $1 + \text{أ}$.
ومن مسلمة الحاصر الاعلى نحصل على انه يوجد اصغر حاصر اعلى $\text{ص} \ni R$ لـ ص . وبما
ان $\text{أ} \in \text{ص}$ فان $\text{ص} \leq \text{أ} < 0$ ، واذن $\text{ص} \in R^+$ وعلينا الآن اثبات ان $\text{ص} = \text{ر}$.
لنفرض ان امكن ان $\text{ص} \neq \text{ر}$. فمن خاصية التثليث، اما ان يكون $\text{ص}^n > \text{ر}$ او $\text{ص}^n < \text{ر}$.

اذا كان $\text{ص}^n > \text{ر}$ فان $\text{ر} - \text{ص}^n < 0$ واذن

$$ل = \frac{\text{ر} - \text{ص}^n}{(1 + \text{ص}^n)^2} < 0$$

نختار الآن $\text{ع} \in R$ بحيث ان $0 < \text{ع} < 1$ و $0 < \text{ل} < \text{ع}$. ولنضع $\text{س} = \text{ص} + \text{ع}$. سوف
نثبت ان $\text{س} \in \text{ص}$. الان $\text{س} < 0$ ومن نظرية ذات الحدين،

$$\begin{aligned} \text{س}^n &= (\text{ص} + \text{ع})^n = \text{ص}^n + \binom{n}{1} \text{ص}^{n-1} \text{ع} + \binom{n}{2} \text{ص}^{n-2} \text{ع}^2 + \dots + \text{ع}^n \geq \\ &\text{ص}^n + \binom{n}{1} \text{ص}^{n-1} \text{ع} + \binom{n}{2} \text{ص}^{n-2} \text{ع}^2 + \dots + \text{ع}^n \\ &= \text{ص}^n + \text{ع} \{ (1 + \text{ص})^{n-1} - \text{ص}^{n-1} \} \\ &> \text{ص}^n + \text{ل} \{ (1 + \text{ص})^{n-1} - \text{ص}^{n-1} \}. \end{aligned}$$

$$= ص^{\circ} + ر - ص^{\circ} = ر$$

واذن $س^{\circ} > ر$ ولهذا $س \ni س^{\circ}$. ومنه $س \geq ص = ص. ح. ع (س^{\circ})$ ، اي ان $س + ع \geq ص$ واذن $ع \geq ٠$ ، مما يناقض $ع < ٠$ ، لهذا لا يمكن ان تكون $ص^{\circ} > ر$ صحيحة.
واذا كان $ص^{\circ} < ر$ خذ $ع \ni R$ بحيث ان $٠ < ع < ١$ ، $ع > ص$ ٢

$$ع > \frac{ص^{\circ} - ر}{ص^{\circ} - (ص + ١)}$$

بما ان $ص = ص. ح. ع (س^{\circ})$ فانه يوجد $س \ni س^{\circ}$ بحيث ان $س < ص - ع$. لهذا فان $س^{\circ} < (ص - ع)^{\circ}$. ومن نظرية ذات الحدين نحصل على
 $(ص - ع)^{\circ} = ص^{\circ} - (١)^{\circ} ص^{\circ-١} ع + (٢)^{\circ} ص^{\circ-٢} ع^٢ - \dots + (-١)^{\circ} ع^{\circ}$
 $< ص^{\circ} - (١)^{\circ} ص^{\circ-١} ع + (٢)^{\circ} ص^{\circ-٢} ع^٢ - \dots - ع^{\circ}$
 $= ص^{\circ} - ع \{ (١ + ص)^{\circ} - ص^{\circ} \}$
 $< ص^{\circ} + ر - ص^{\circ} = ر$.
اذن $س^{\circ} < (ص - ع)^{\circ} < ر$ ، مما يناقض $س \ni س^{\circ}$.

وهكذا فان الفرض $ص^{\circ} \neq$ مستحيل التحقيق، لهذا فان $ص^{\circ} = ر$. ولا ثبات ان $ص$ وحيد، لنفرض انه يوجد $ل \supset R^+$ بحيث ان $ل^{\circ} = ر$. اذن $ل^{\circ} = ص^{\circ}$. فاذا كان $ل < ص$ فان $ل^{\circ} < ص^{\circ}$ ، واذا كان $ل > ص$ فان $ل^{\circ} > ص^{\circ}$ ، مما يناقض $ل^{\circ} = ص^{\circ}$. اذن
 $ل = ص$. مما ينهي البرهان.

ويمكن استخدام النظرية ٢ لتعريف $س^{\circ}$ حيث $س \ni R^+$ و $\frac{١}{س}$ هو عدد نسبي و
 $ب \ni N$. نعرف

$$س^{\circ} = س^{\circ} = \frac{١}{س} = \frac{١}{س} \sqrt[ب]{\frac{١}{س}}$$

فان المجموعة $S(N) = \{s_n | n \in N\}$ تكون محصورة من أعلى بـ m . ومن مسلمة الحد الأعلى يتبع انه يوجد اصغر حاصر اعلى لـ $S(N)$. سنكتب عادة s_n (s_n) بدلا من s_n (s_n). وسندعو s_n (s_n) اصغر حاصر اعلى للمتتالية (s_n) مع انه في الحقيقة اصغر حاصر اعلى للمجموعة $S(N)$.

كذلك اذا كانت (s_n) محصورة من اسفل فاننا سنكتب s_n (s_n) بدلا من s_n (s_n).
 كحـ د (s_n) \leq .

واذا كانت (s_n) متتالية محصورة اي انه يوجد M بحيث ان $|s_n| \leq M$ لكل n
 د N فانه يوجد s_n $|s_n|$.

المثال ٣.

لنفرض ان s ، s متتاليتان من الاعداد الحقيقية محصورتان من أعلى. نريد ان نثبت

ان

$s_n + s_n \geq s_n$ (s_n) $\geq s_n$ (s_n) + s_n (s_n) (٥)
 وانه يوجد متتاليات حيث تتحقق = في (٥)، ومتتاليات اخرى حيث تتحقق $>$.

فمن تعريف اصغر حاصر اعلى نحصل على $s_n \geq s_n$ (s_n)، $s_n \geq$

s_n (s_n) لكل $n \in N$. اذن $s_n + s_n \geq s_n$ (s_n) + s_n (s_n) (s_n)،

لكل $n \in N$. اذن s_n (s_n) + s_n (s_n) هو حاصر اعلى للمجموعة s_n =

$\{s_n + s_n | n \in N\}$ واذن s_n (s_n) $\geq s_n$ (s_n) + s_n (s_n)، مما

يثبت (٥).

لنفرض ان $s = s$ (s) = s (s) اذن s_n (s_n) + s_n (s_n) = s_n (s_n)

s_n (s_n) + s_n (s_n) = s (s) اذن تتحقق المساواة في (٥). واذا اخذنا $s = (1, 0, 0, 0, \dots)$

(\dots) ، $s = (1, 0, 0, \dots)$ فان s_n (s_n) + s_n (s_n) = $1 > 0 = s_n$ (s_n)

s_n (s_n) + s_n (s_n) اذن $>$ تتحقق في (٥).

ومن التطبيقات الهامة للنظرية ١ ، تطبيقها على المتتاليات الوترية .

النظرية ٣ .

- (أ) إذا كانت $(س_n)$ متتالية حقيقية وتيرية متزايدة ومحصورة من اعلى ، فان $(س_n)$ تكون تقاربية ، ويكون $ها س_n = ص.ح.ع (س_n)$.
- (ب) إذا كانت $(س_n)$ وتيرية متزايدة وغير محصورة فان $س_n \leftarrow \infty$.
- (ج) إذا كانت $(س_n)$ وتيرية متناقصة ومحصورة من اسفل ، فانها تكون تقاربية ويكون $ها س_n = ك.ح.د (س_n)$.
- (د) إذا كانت $(س_n)$ وتيرية متناقصة وغير محصورة من اسفل فان $س_n \leftarrow -\infty$.

البرهان .

- (أ) $(س_n) \geq س_{n+1}$ لكل $ن \in N$. ومن النظرية ١ يوجد $م = ص.ح.ع (س_n)$ ، لهذا فان $س_n - م \geq ٠$ لكل $ن \in N$ ، لكل $٠ < \epsilon$ يوجد $س_3$ $(ن)$ بحيث ان $س_r < م - و$. لنفرض الآن ان $ن \leq ر$. اذن $م - و < س_r \leq س_n \leq م < م + و$ واي ان $|س_n - م| < و$ لكل $ن \leq ر$. لكن هذا يعطي $س_n \leftarrow م$ ، أي ان $ها س_n = م = ص.ح.ع (س_n)$.
- (ب) لنأخذ اي عدد حقيقي $ك < ٠$. اذن يوجد $ر \in N$ بحيث ان $س_r < ك$ لان $(س_n)$ غير محصورة من اعلى . اذن $ن \leq ر$ تتضمن $س_n \leq س_r < ك$. لهذا ومن التعريف ينتج ان $س_n \leftarrow -\infty$ ونبرهن (ج) ، (د) بطريقة مشابهة تماما .

المثال ٤ .

عرف $(س_n)$ بـ $س_١ = ٤$ ، $س_{n+1} = ٣ - \frac{٢}{س_n}$ لكل $ن \leq ١$. سنثبت ان $(س_n) \in ٣$ توبر وسنجد $ها س_n$.

يشير فحص الحدود الاولى الى ان $s_n < 2$. فلا ثبات ذلك، لنفرض ان ج (ن) ترمز للجملة المفتوحة $s_n < 2$. ج (١) صحيحة فاذا كانت ج (ن) صحيحة فان $s_{n+1} = 2 - s_n$. $s_n - \frac{2-s_n}{s_n} < 0$ ، ومنه ج (١ + ن) صحيحة. فمن الاستقراء ينتج ان $s_n < 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
 هذا فان (s_n) محصورة من اسفل بـ ٢ ويكون كـ د (س_١) = ل ≤ 2 .
 الآن $s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{2-s_n}{s_n} = \frac{s_n^2 - 2 + s_n}{s_n} = \frac{s_n(s_n + 1) - 2}{s_n}$.
 هذا فان (s_n) وتيرية متناقصة. ومن نظرية ٣ (ح) نحصل على $s_n \leq 2$ ،
 أي ان (s_n) متقاربة.

$$\text{وبما ان } |s_n - \frac{1}{s_n}| \geq \frac{|s_n - 1|}{s_n} \geq \frac{1}{s_n} \left| s_n - \frac{1}{s_n} \right| \leftarrow \frac{1}{s_n} \left| s_n - \frac{1}{s_n} \right| \geq \frac{1}{s_n} \left| s_n - \frac{1}{s_n} \right| \leftarrow \frac{1}{s_n} \left| s_n - \frac{1}{s_n} \right|$$

$$\text{كذلك } s_{n+1} \leftarrow l, \text{ ويأخذ النهايات في } s_{n+1} = 3 - \frac{2}{s_n} \text{ نحصل على } l = 3 - \frac{2}{l}$$

. واذن $l^2 - 3l + 2 = 0$. وهذا يثبت ان $l = 2$ اول $l = 1$. لكننا نعرف ان $l \leq 2$ ، اذن يجب ان تكون $l = 2$. اذن $s_n \rightarrow 2$.

تمارين ٣-١

- (تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)
- جد اكبر حاصر أدنى واصغر حاصر أعلى، أن وجد، لمجموعات R الجزئية التالية:
 - (أ) $\{s \mid s = 2 - s + 1, s \in \mathbb{Q}^+\}$ ، (ب) $\{s \mid s = 2 - s + 1, s \in \mathbb{Q}^+\}$ ،
 - (ج) $\{s \mid s > 0, s \in \mathbb{Q}\}$ ، (د) $\{s \mid s = 2 - s + 1, s \in \mathbb{Q}^+\}$ ، (هـ) $\{s \mid s = 2 - s + 1, s \in \mathbb{Q}^+\}$.

٢- اذا كانت \mathcal{C} ، مجموعة جزئيتين غير خاليتين من R ، وعصورتين من اعلى ، فاثبت ان $\mathcal{C} \cup \mathcal{C} = \mathcal{C}$. اعط مثالا حيث تحقق $\mathcal{C} >$.

٣- [أكبر عدد صحيح]. أثبت انه كان $\exists R$ فانه يوجد عدد صحيح وحيد m بحيث ان s
 $1 - m > m \geq s$. نكتب $m = [s]$ ونسمي $[m]$ أكبر عدد صحيح في s . لهذا فان $s -$
 $1 > [s] \geq s$. ولاثبات ذلك، افرض انه لا يوجد m كهله. اختر $l \in Z$ بحيث ان l
 $> s - 1$ وافرض ان $s = \{n \in N \mid n \geq s - 1\}$. استخدم الاستقراء لاثبات ان $s =$
 N مما يناقض كون s محصورة من اعلى.

اثبات ان m وحيدة ينتج من انه اذا كان $m, z \in \mathbb{Z}$ ، $m-1 \geq s$ ، $s-1 > m$ ، $s-1 > m$ ، $s \geq 1$.

٤- اذا كان s ، v و l ثابت ان v ح c (s و v) \leq ح c (s) + v ح c (s) + v ح c (s) و l ح c (s) \leq ح c (s) + v ح c (s) .

5- عرف $s_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^2}$ لكل $n \geq 1$. أثبت ان (s_n) متقاربة.

۶۔ لیکن $1 < \omega_1 = 1$ عرف سے $\omega_1 = \sqrt{1 + s_1}$ لکل $\exists N$ اثبت ان (س) \exists تو وجود نہاں۔

۷۔ اذا كان (س_ن) و تيم. فثبت ان (س_ن) و ل[∞] وان كحد (س_ن) ≥ ناس ن
 ≥ ص. ح.ع (س_ن).

۸۔ عرف $s_n = \frac{n}{1+n^2} - \left[\frac{n}{2} \right]$ حيث $\left[\frac{n}{2} \right]$ هو أكبر عدد صحيح في $\frac{n}{2}$ (راجع

التمرین ۳). جدك: ح-د (س ۱), ص: ح-ع (س ۲). هل (س ۳) ۛ توه؟

٩- اذا كانت (س_١) محصورة من اعلى وكان س_١ = س_٢ = س_٣ = س_٤ لكل ن ، $\exists N$ ، فاثبت ان س_١ = ١ حيث يحقق $|1| \geq 1$.

٢. تبولوجية الاعداد الحقيقية

كلمة التبولوجيا مشتقة من كلمة اغريقية تعني مكان . وموضوع التبولوجيا يدرس عادة في السنة الثانية او الثالثة الجامعية لتخصص الرياضيات ، بعد ان يكون الطالب قد درس اساس التحليل كالتى نقدمها في هذا الكتاب .

وتعنى التبولوجيا المجردة بافكار مثل المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة ، والمغلقة ، ونقطة التراكم ، والمتاليات التقاربية ، والاتصال ، . . . الخ . وجميع هذه الافكار تبحث على صعيد اعم من R . وفي الحقيقة ان R هي حالة خاصة ، وان كانت هامة جدا ، من الفضاءات التبولوجية . ان R هامة لان لها خاصية الترتيب الكامل ، وخاصية التمام . ولا توجد هاتان الخاصيتان في الفضاء التبولوجي المجرد . لاحظ اننا استخدمنا كلمة فضاء لتعني R وفي السابق كنا نشير الى R بكلمة خط (مستقيم) . وتذكرنا كلمات كهذه بالاصل الهندسي لافكار عديدة في التحليل . وكثيرا ما نستخدم لغة هندسية في التحليل والتبولوجيا .

وتساعدنا الهندسة على فهم افكار تكون معقدة عند استخدام اللغة التحليلية المجردة . وننصح الطالب ان يوضح هندسيا ، ان امكن ، اشياء مثل الكرة المفتوحة ، المجموعة المفتوحة ، نقطة التراكم ، الخ . ولكن نشدد هنا ان الرسوم والأشكال لا يمكن ان تكون بديلا عن التعاريف .

ومن ناحية تاريخية فان الكثير من افكار التبولوجيا المجردة برزت من الهندسة ومن دراسة R . وفي هذا البند ندرس بعض الافكار التبولوجية في R₁ ، التي هي هامة في التحليل . والتعاريف التي ستقدمها تم اختيارها بحيث انه يمكن تعميم معظمها لأي فضاء تبولوجي مجرد . وهذا يعني انه يمكن للطلاب دراسة مساقات متقدمة دون زعزعة ما سبق ان تعلمه .

اولا سنعرض فكرة الفترة. هذه الفكرة خاصة بـ R ولا يمكن تعميمها على الفضاءات التبولوجيا المجردة، لانها تعتمد على فكرة الترتيب الكامل في R .

سوف نقول ان $e \in R$ تقع بين s ، v اذا فقط اذا كان $s \neq v$ وكان $s > e$ $v > e$ في حال $s > v$ ، و $v > e$ $s > e$ في حالة $v > s$. الآن سنعرف الفترة:
 لنكن F مجموعة جزئية من R وغير خالية. تسمى F فترة اذا فقط اذا كان لكل $s, v \in F$ ولكل e بين s, v تكون $e \in F$.

المثال ٥.

- (أ) لنكن $S = \{0, 2\}$. مع S ليست فترة لأن $1 > 0$ ولكن $1 \notin S$.
 (ب) عرف $F = \{s \in R \mid s > 1\}$. افرض ان $s, v \in F$ و $s > v$.
 $e > v$. $s \in F$ تتضمن $s > v$ ، $v \in F$ تتضمن $v > 1$. اذن $0 > s > e$
 $v > 1$ ومنه $0 > e > 1$ ، اذن $e \in F$. لهذا فان F هي فترة.
 (ج) ليكن $A \in R$ عرف $F = \{s \in R \mid s \leq A\}$. افرض ان $s, v \in F$ ،
 $s > e$. اذن $A \geq s > e$ و $e < A$ ومنه $e \in F$. لهذا فان F هي فترة.
 (د) من الواضح ان R فترة.
 الآن سنحدد جميع الفترات في R :

النظرية ٤.

لنكن F فترة في R . اذن يجب ان تكون F واحدة من الانواع التسعة التالية:

$$R = (-\infty, \infty)$$

$$\{1, \infty\} = \{s \in R \mid s < 1\}$$

$$[1, \infty) = \{s \in R \mid s \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}
\{-\infty, \infty\} &= \{s \mid R \mid s > a\} \\
\{-\infty, a\} &= \{s \mid R \mid s \geq a\} \\
\{a, b\} &= \{s \mid R \mid a > s > b\} \\
[a, b] &= \{s \mid R \mid a \geq s \geq b\} \\
\{a, b\} &= \{s \mid R \mid a > s \geq b\} \\
[a, b] &= \{s \mid R \mid a \geq s > b\}
\end{aligned}$$

البرهان.

نذكر هنا ان الاطراف اليمنى من المتساويات هي مجرد رموز للمجموعات التي في
الاطراف اليسرى.

نفترض ان a ، b اعداد حقيقية بحيث ان $a > b$.

الآن اذا كانت f فترة فقد تكون غير محصورة من اعلى وغير محصورة من اسفل. في
هذه الحالة تكون $f = R$. لا ثبات ذلك لتأخذ $R \supseteq a$. بما ان f غير محصورة من اعلى أو
من اسفل فانه يوجد s ، $s \supseteq f$ بحيث ان $s > a$. وبما ان f فترة نحصل
على $a \supseteq f$. اذن $a \supseteq R$ تتضمن $a \supseteq f$ ، لهذا فان $a \supseteq f$. لكن لأي فترة f ،
 $f \supseteq R$ ، اذن $f = R$.

وقد يحصل ان تكون f غير محصورة من اعلى ولكن محصورة من اسفل. اذن يوجد $a =$
كحد (د) هناك احتمالان: $a \supseteq f$ أو $a \supseteq f$. لتأخذ الحالة الاولى. اذا كان $s \supseteq f$ فان
 $s < a$ لهذا فان $s \supseteq a$ ، ومنه $f \supseteq a$ ، وبالعكس لنفرض ان $a \supseteq f$ ، $a \supseteq \infty$
بما ان f غير محصورة من اعلى فانه يوجد $s \supseteq f$ بحيث ان $s > a$. بما ان $a \supseteq f$ ، $a \supseteq \infty$
فان $a \supseteq a$ وبما ان $a =$ كحد (د) فانه يوجد $s \supseteq f$ بحيث ان $s > a$. لهذا فان $s > a$
 $> s$. ومنه $a \supseteq f$ ، واذن $a \supseteq \infty$ ، $f \supseteq a$ ، اذن $f = a$ ، وهي المجموعة الثانية في
النظرية. وباسلوب مشابه نعالج $a \supseteq f$ التي تعطي المجموعة الثالثة في النظرية.

ونحصل على المجموعات الباقية بنفس الأسلوب . فعلى سبيل المثال : المجموعة السادسة (أ ، ب) نحصل عليها عندما تكون ف محصورة من اعلى ومن اسفل وعندما يكون $a = ك ح د (ف) ، ب = ص ح ع (ف)$ لاحظ ان القوس المربع على يمين أ يعني ان أ تنتمي الى الفترة ، والقوس الدائري على يمين أ يعني ان أ لا تنتمي الى الفترة .

اصطلاحات تتعلق بالفترات

(أ ، ب) = { س \in R | $a < س < ب$ } تدعى فترة مفتوحة طرفها الأيمن أ وطرفها الأيسر ب .

[أ ، ب] = { س \in R | $a \leq س \leq ب$ } تدعى فترة مغلقة طرفها الأيمن أ وطرفها الأيسر ب .

كل من الفترتين (أ ، ب] و [أ ، ب) تدعى فترة نصف مفتوحة . الفترات التي نستخدم فيها الرمز ∞ أو $-\infty$ تدعى فترات غير منتهية .

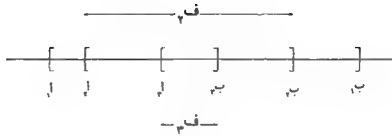
وتستخدم النظرية التالية كثيرا في التحليل وهي نتيجة للنظرية ٣ .

النظرية ٥ [خاصية التشابك في الفترات المغلقة].

لنفرض ان (ف_ن) هي متتالية من فترات مغلقة ف_ن = [أ_ن ، ب_ن] بحيث ان ف_ن \subset ف_{ن+١} لكل ن \in N وبحيث ان (ب_ن - أ_ن) \rightarrow صفر (ن \rightarrow ∞) . (ان متتالية كهذه تدعى شبكة فترات مغلقة) . اذن $\bigcap_{n=1}^{\infty} ف_n$ تتكون من عنصر واحد فقط .

البرهان .

الوضع موضح ادناه :



بما ان f_3 ف f_{1+3} فاننا نحصل على $a_n \geq a_{n+3} > b_{n+3} \geq b_n$ لكل $n \in N$.
 اذن $a_n > b_n$ لكل $n \in N$. اذن (a_n) متتالية متزايدة ومحصورة من اعلى بـ b_1 . ومن
 النظرية ٣ ، نحصل على $a_n \leftarrow$ او $a_n \geq$ لكل $n \in N$. كذلك (b_n) متتالية متناقصة
 ومحصورة من اسفل بـ a_1 . اذن $b_n \leftarrow$ ب و $b_n \leq b$ لكل $n \in N$.
 ولكن $b_n - a_n \leftarrow$ صفر . اذن $b_n = b - a_n + a_n$ تعطي ان $b = a$. الان لكل n
 $n \in N$. $a_n \geq a = b \geq b_n$ ، اذن $a \geq b$ لكل $n \in N$ ، اي ان $a \geq b$. اذن a
 نقطة في تقاطع جميع f_n . لنفرض انه يوجد نقطة أخرى $d \in f_n$. اذن $a_n \geq d \geq b_n$
 لكل $n \in N$. بأخذ النهايات لهذه المتباينة (انظر السؤال ١١ ، التمارين ٢-٥) نحصل على
 $a \geq d \geq b$ ، ولكن $a = b$ اذن $a = d$. اي ان a هي النقطة الوحيدة في f_n . وهذا يثبت
 النظرية .

سنقدم الآن بعض التعاريف الاساسية ، وبعض الشروح الموضحة ثم نتبع ذلك
 بامثلة .

الكرة المفتوحة :

ليكن $a \in R$ ، نق $a < 0$. تسمى المجموعة :
ك (أ ، نق) = { س $\in R$ | | س - أ | > نق }
بالكرة المفتوحة ، أو الكرة ، التي مركزها أ ونصف قطرها نق .

الكرة المغلقة :

ليكن $a \in R$ ، نق $a < 0$. تسمى المجموعة :
ك [أ ، نق] = { س $\in R$ | | س - أ | \leq نق }
بالكرة المغلقة التي مركزها أ ونصف قطرها نق .

المجموعة المفتوحة :

المجموعة الجزئية ج من R تسمى مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل س \in ج يوجد
نق $a < 0$ بحيث ان ك (أ ، نق) \subset ج .

المجموعة المغلقة :

تسمى المجموعة الجزئية ل من R مجموعة مغلقة اذا كانت متممتها مفتوحة ، اي ان ل
مغلقة اذا وفقط اذا كانت ل^c مفتوحة .

داخل المجموعة :

لتكن س مجموعة جزئية من R . يكون س^o ، داخل المجموعة وهو اتحاد جميع
المجموعات المفتوحة المحتواة في س ، اي ان س^o = U { ج | ج مفتوحة ، ج \subset س } .

مغلقة المجموعة:

لتكن S مجموعة جزئية من R . مغلقة المجموعة S هي عبارة عن تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحتوي S ، أي $\bigcap \{L \mid L \text{ مغلقة، } L \supset S\}$.

المجموعة الكثيفة:

تسمى المجموعة $S \subset R$ مجموعة كثيفة في R إذا وفقط إذا كانت $S = R$.

نقطة التراكم:

لتكن S مجموعة جزئية في R . ليكن $s \in R$ وليس بالضرورة في S . تسمى s نقطة تراكم للمجموعة S إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي s تحوي أيضا نقاطا من S غير s .

يرمز لمجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة S بالرمز S^* .

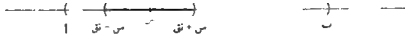
نستخدم كلمة «كرة» بمعنى جديد لفائدتها في تعميمات قادمة. ففي R الكرة المفتوحة $K(a, \epsilon)$ هي الفترة المفتوحة $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ ، والكرة المغلقة $K[a, \epsilon]$ هي الفترة المغلقة $[a - \epsilon, a + \epsilon]$. لاحظ ان $a \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset [a - \epsilon, a + \epsilon]$.

وسوف نرمز للمجموعات المفتوحة بالرمز K والمغلقة بالرمز L .

فاذا كانت مجموعة ما غير مفتوحة فلا يمكن القول انها مغلقة. فهناك مجموعات غير مغلقة وغير مفتوحة. (المثال ٧، ادناه)

المثال ٦.

كل فترة مفتوحة (a, b) هي مجموعة مفتوحة. وهذا واضح هندسيا



لأثبت ذلك تحليليا يجب ان نطبق تعريف المجموعة المفتوحة: لنأخذ اي $s \in (a, b)$.
 اذن $s - a < 0$ و $b - s < 0$. لتكن $\epsilon = \min\{s - a, b - s\}$ اي ان ϵ هي
 اصغر العددين $s - a$ ، $b - s$. سوف نثبت ان $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset (a, b)$. لتكن $v \in$
 $(s - \epsilon, s + \epsilon)$. اذن $|v - s| < \epsilon$ ، ومنه $s - \epsilon < v < s + \epsilon$ اي ان $a < v < b$.
 ص - $s > b - s$ من تعريف ϵ . لهذا فان $a < v < b$ اي ان $v \in (a, b)$.
 اذن لكل $s \in (a, b)$ ، يوجد $\epsilon > 0$ (نق) $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset (a, b)$ ، ومنه ينتج ان (a, b) هي
 مجموعة مفتوحة.

والفترة المغلقة $[a, b]$ هي مجموعة مغلقة. لتوضيح ذلك خذ $[a, b] = [-\infty, \infty]$
 U (ب، ∞) وهي مجموعة مفتوحة (البرهان يشابه برهان المثال ٦).
 هندسيا نحصل على



المثال ٧.

الفترة $(0, 1]$ ليست مجموعة مفتوحة ولا مغلقة. لأثبت انها غير مفتوحة لاحظ ان $1 \in$
 $(0, 1]$. خذ اي $\epsilon < 0$. اذن $1 - \epsilon \in (0, 1]$ غير محتواة في $(0, 1 - \epsilon)$ ، على سبيل المثال

$1 + \frac{1}{p}$ موجود في $K(1, \text{نق})$ وغير موجود في $(1, 0)$. لا إثبات ان $(1, 0)$ غير مغلقة،
خذ $(1, 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, 1)$. فكل كرة مركزها صفر غير محتواة في $(1, 0)$ ، اذن
 $(1, 0)$ غير مفتوحة.

المثال ٨.

إذا كانت $\text{س} = (1, 0)$ فإن $\text{س}^* = [1, 0]$. وبشكل خاص $1, 0$ هما نقطتا تراكم
لـ س وغير موجودتين في س .

لا إثبات ذلك سوف نثبت أولا ان $[1, 0] \supset \text{س}^*$. ليكن $0 \leq \text{س} \leq 1$ ولناخذ اي
مجموعة مفتوحة H تحتوي س . اذن يوجد كرة $K(\text{س}, \text{نق}) \subset H$. اذا كان $\text{س} = 0$ ، عرف
 $\text{ص} = \text{أص} \left\{ \frac{1}{p}, \frac{\text{نق}}{p} \right\}$. اذن $0 < \text{ص} < 1$ ومنه $\text{ص} \in \text{س}$ ، $\text{ص} \neq \text{س}$ و $\text{ص} \in K$

$(\text{س}, \text{نق}) \subset H$. اذا كان $0 < \text{ص} \leq 1$ عرف $\text{ص} = \text{أك} \left\{ \frac{\text{س}}{p}, \frac{\text{نق}}{p} - \text{س} \right\}$ اي اكبر

العدد $\frac{\text{س}}{p}$ ، $\text{س} - \frac{\text{نق}}{p}$ ، اذن $\text{ص} \in \text{س}$ ، $\text{ص} \neq \text{س}$ و $\text{ص} \in K(\text{س}, \text{نق}) \subset H$. اذن

$\text{س} \in \text{س}^*$ ومنه $[1, 0] \supset \text{س}^*$. وبالعكس اذا كان $\text{س} \in [1, 0] = (1 - \frac{1}{n}, 1) \cup$
 $(0, \infty)$ فانه يوجد كرة مفتوحة مركزها س ولا تحوي نقطة من س . اذن $\text{س} \notin \text{س}^*$.

لهذا فان $\text{س}^* \supset [1, 0]$. فهذا مع $[1, 0] \supset \text{س}^*$ يثبت النتيجة

ان جزءا من النظرية التالية يوضح لنا كيفية تكوين مجموعات مفتوحة جديدة بأخذ
تقاطع واتحاد مجموعات مفتوحة معروفة وكذلك بالنسبة للمجموعات المغلقة.

النظرية ٦.

(۱) \emptyset ، R مجموعتان مفتوحتان .

(٢) اتحاد اي عائلة من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(٣) تقاطع أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(4) \emptyset, A : مجموعتان مغلقتان.

(٥) تقاطع اي عائلة من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(٦) اتحاد أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

البرهان .

إذا فرضنا ان \emptyset غير مفتوحة فانه يوجد $s \ni \emptyset$ بحيث انه لكل $n < s$ تكون K (س، n) غير محتواة في \emptyset . لكن $s \ni \emptyset$ يناقض ان \emptyset لا تحتوي على أي عنصر. اذن \emptyset مجموعة مفتوحة. وكذلك R مفتوحة لانه لكل $s \ni R$ تكون K (س، 1) $\supset R$. وهذا يثبت (١).

لنأخذ الآن أي عائلة $\{C\}$ من مجموعات مفتوحة C . ونعتبر قيم الدليل ϕ مجموعة وهي ليست بالضرورة المجموعة $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

ولنفرض ان $s \in U$ ، وهو اتحاد جميع المجموعات C . فمن تعريف الاتحاد ينتج ان s $\in C$ لعنصر ما. وبما ان C مفتوحة فانه يوجد k (s ، C). لكن $C \cap U = \emptyset$ ومنه ينتج ان k (s ، C). $U \cap C$. لهذا فانه لكل s في الاتحاد يوجد k (s ، C) موجودة في الاتحاد ومنه ينتج ان الاتحاد مجموعة مفتوحة وهذا يثبت (٢).

إذا أثبتنا (٣) لمجموعتين \mathcal{C} ، \mathcal{H} فيمكن الحصول على النتيجة باستخدام الاستقراء. إذا كان $\mathcal{M} = \mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ فإن \mathcal{M} مفتوحة من (١). وإذا كانت $\mathcal{M} \neq \emptyset$ خذ $s \in \mathcal{M}$. إذن $s \in \mathcal{C}$ ، $s \in \mathcal{H}$ ، وس $\exists \mathcal{C}$ ، إذن يوجد \mathcal{C}_1 ، نق \mathcal{C}_1 بحيث إن $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$ ، حيث $r = 1$ ،

٢. عرف $\text{نق} = \text{أص} \{ \text{نق}_1, \text{نق}_2 \}$. اذن $\text{أص} - \text{س} \mid \text{نق} \text{ تتضمن} \text{أص} - \text{س} \mid \text{نق} >$.
 وبمنه $\exists \text{ ك} (\text{س} , \text{نق})$ حيث $r = 1$ ، $\text{أذن ك} (\text{س} , \text{نق}) \supset \text{م}$.
 بما ان $\emptyset = \text{أص} \mid \text{نق} = \text{أص} \mid \text{نق}_1 = \text{أص} \mid \text{نق}_2 = \emptyset$ ، نحصل على (٤) من (١) .
 اذا كانت $\{ \text{أص} \}$ عائلة مجموعات مغلقة لـ أص ، فان لـ أص مفتوحة . الآن $\text{أص} \mid \text{نق}_1$ مجموعة
 مفتوحة ، (من ٢) ، ولكن $\text{أص} \mid \text{نق}_2 = \text{أص} \mid \text{نق}_1 = \emptyset$ من قوانين ديمورغان . اذن من تعريف المجموعة
 المغلقة ينتج ان $\text{أص} \mid \text{نق}$ مغلقة ، مما يثبت (٥) . ونثبت (٦) بطريقة مشابهة .
 النظرية ٧ .

لتكن (س_n) متتالية من الاعداد الحقيقية . اذن $\text{س}_n \leftarrow \text{س}$ اذا وفقط اذا كانت لكل
 مجموعة مفتوحة ح تحوي س يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث ان $\text{س}_n \in \text{ح}$ لكل $n \leq n$.
 البرهان .

افرض ان $\text{س}_n \leftarrow \text{س}$. خذ أي مجموعة مفتوحة ح تحوي س . اذن يوجد $\epsilon > 0$.
 بحيث ان $\text{ك} (\text{س} , \text{نق}) \supset \text{ح}$. وبما ان $\text{س}_n \leftarrow \text{س}$ فانه يوجد n . $n = n$. (نق) بحيث ان
 $\text{أص} - \text{س} \mid \text{نق} >$ لكل $n \leq n$. أي ان $\text{س}_n \in \text{ك} (\text{س} , \text{نق}) \supset \text{ح}$ لكل $n \leq n$.
 وبالعكس ، اذا كان $\epsilon > 0$ فان $\text{ك} (\text{س} , \epsilon)$ هي مجموعة مفتوحة تحوي س . اذن
 يوجد n . بحيث ان $\text{س}_n \in \text{ك} (\text{س} , \epsilon)$ لكل $n \leq n$. اي ان $\text{أص} - \text{س} \mid \text{نق} >$ ϵ
 لكل $n \leq n$. وهذا يعني ان $\text{س}_n \leftarrow \text{س}$. وهذا ينهي برهان النظرية .
 وللنظرية التالية اهميتها عند معالجة المجموعات المغلقة .

النظرية ٨ .

لتكن س مجموعة جزئية من أص . اذن

- (١) $\text{مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت } \bar{S} = S$.
 (٢) $S \supset \bar{S}$ إذا وفقط إذا كان لكل $x \in S$ ، يوجد $y \in S$ بحيث $x < y$.
 $|S - \bar{S}| > 0$.

البرهان .

من التعريف، \bar{S} هي عبارة عن تقاطع مجموعات مغلقة، إذن هي مجموعة مغلقة،
 باستخدام الجزء (٥) من النظرية ٦ . إذن $S = \bar{S}$ تتضمن أن S مجموعة مغلقة . وبالعكس ،
 افرض أن S مجموعة مغلقة . فإذا كان $x \in S$ ، فإن $x \in \bar{S}$ لـ جميع المجموعات المغلقة L
 $\subseteq S$. ومنه $S \subseteq \bar{S}$. إذا كان $x \in \bar{S}$ فإن $x \in L$ لجميع المجموعات المغلقة $L \subseteq S$
 S . وبشكل خاص S هي إحدى هذه المجموعات ومنه $S \subseteq \bar{S}$. وهذا يثبت
 أن $S = \bar{S}$ عندما تكون S مغلقة .

(٢) لنفرض أن $S \supset \bar{S}$ ولنفرض، أن أمكن، أنه يوجد $x \in S$ ، بحيث $x \in \bar{S} - S$.
 لكل $x \in \bar{S}$. إذن $x \in L$ (ك (س ، و) ، حيث L (ك (س ، و) مجموعة مغلقة لأن L
 (س ، و) مفتوحة . إذن $S \supset \bar{S}$ تعطي $S \supset L$ (ك (س ، و) . وهذا تناقض .

وبالعكس لكل $x \in S - \bar{S}$ ، افرض أن $x \in S - \bar{S}$. ولنصبر ما $S \supset \bar{S}$. خذ أي
 مجموعة مغلقة $L \subseteq S$. إذن $L \supset \bar{L}$. فإذا كان $x \in L$ ، وبما أن L مفتوحة فإنه يوجد
 $y \in L$ ، بحيث $x < y$. من الفرض $S \supset \bar{S}$ (ك (س ، و) ، لنصبر ما
 $S \supset \bar{S}$. ولكن $L \subseteq S$ ، إذن $L \supset \bar{L}$. مما يناقض $S \supset \bar{S}$. إذن يجب أن
 يكون $S \supset \bar{S}$ لـ لأي مجموعة مغلقة $L \subseteq S$. إذن $S \supset \bar{S}$. وهذا يثبت النظرية .

النظرية ٩ .

لتكن $R \subseteq S$ ، ولتكن (س_١) متتالية تقاربية من عناصر S ، أي أن $s_n \in S$

لكل $N \exists$ وس \leftarrow س حيث س $\exists R$. اذن س \exists س اي ان نهاية متتالية
في س تنتمي الى مغلقة س

البرهان

افرض ان امكن ان س \nexists س . بما ان س مغلقة اذن (س) مفتوحة وس \exists (س) .
ومن النظرية ٧ يوجد ن بحيث ان س \exists (س) لكل ن \leq ن . اذن س \exists س لكل ن
 \leq ن . مما يعارض س \exists س لكل ن $\exists N$.

ويمكن اثبات النظرية ايضا باستخدام الجزء (٢) من النظرية ٨ . لانه اذا كان \leq ،
فان س \leftarrow س تعطي | س - س | $>$ ، لكل ن \leq ن . اذن يوجد س \exists س بحيث
ان | س - س | $>$ ، لهذا فان س \exists س .

تمارين ٣ - ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اعط مثالا لفترتين مفتوحتين بحيث لا يكون اتحادهما فترة مفتوحة .

هل يعارض هذا الجزء (٢) من النظرية ٩٦ ؟

٢ - لتكن F_1 ، F_2 فترتين في R . اثبت ان $F_1 \cap F_2$ اما ان يكون \emptyset أو مجموعة من نقطة
واحدة أو فترة .

٣ - بأخذ المتتالية (ف_ن) حيث ف_ن = (٠ ، $\frac{1}{n}$) اثبت انه لا يمكن استبدال الفترات المغلقة
بفترات مفتوحة في النظرية ٥ .

٤ - لتكن (ف_ن) متتالية من الفترات المغلقة . اثبت ان $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ اما ان يكون \emptyset ، أو مجموعة
من نقطة واحدة ، أو فترة مغلقة .

٥- عرف $e_n = [0, 1, \frac{1}{n}]$. اثبت ان $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$ هو فترة مغلقة.

۶- ما هو $\prod_{n=1}^{\infty} (n, n+2)$ ؟

۷۔ ماہی سے ت، حیث سے $= [1, 0] \cup \{2\}$ ؟

٨- لنكن Q مجموعة الاعداد النسبية، \bar{Q} اي ان \bar{Q} مجموعة الاعداد غير النسبية. اثبت ان Q و \bar{Q} كثيفتان في R ، اي ان $\bar{Q} = \overline{Q}$.

٩- أثبت ان Q غير مفتوحة وغير مغلقة في R .

١٠- لتكن Z مجموعة الاعداد الصحيحة. اثبت ان Z لا تحتوي على كرات مفتوحة وان Z كثيفة في \mathbb{R} .

۱۱- لتكن S ، صہ مجموعتين جزئيتين من R ، اثبت ان

(۱) مہ د مہ د مہ د مہ د

(۲) تكون s_{ij} مفتوحة اذا وفقط اذا كانت $s_{ij} = s_{ji}$ ،

(۳) $\overline{u} = u^T U$ ،

(۴) سہ = صہ تعطی سہ = صہ وسہ = صہ .

١٢- لتكن S مجموعة جزئية من R ولتكن H مجموعة مفتوحة. أثبت ان $H - S = \emptyset$ تعطي $\overline{S} \cap H = \emptyset$.

١٣ - لنكنه $\{s_i\}$ عائلة مجموعات. اثبت ان $U s_i \supset U s_j$ ، اعط مثالا حيث يكون الاحتواء فعليا.

ولای مجموعتین سه و سه اثبت ان سه U سه = سه U سه .

١٤ - لتكن L مجموعة مغلقة محصورة من أعلى . اثبت ان $\sup L \in L$.

١٥ - [تركيب المجموعات المفتوحة في R]. لتكن \mathcal{C} مجموعة غير خالية مفتوحة في R . اثبت

ان ح هي اتحاد فترات مفتوحة منفصلة (ارشاد: خذ $s \in C$ وافرض ان $s \in A$)
 (س، ص) $\in C$ ، ص $\in A$ = {ع | ع $\in (s, C)$ } . افرض انه يوجد A = {ك ح د

صه، ب = ص ح ع مه، اكتب ف = (أ، ب)، ثم اثبت ان ف من ح، أ

، بـ $\{ \text{ح} \}$ ، $U = \{ \text{فـ} \mid \text{س} \in \text{ح} \}$ ، و $\{ \text{فـ} \}$ منفصلة.
 ١٦ - إذا كانت L مغلقة، $s_n \leftarrow s$ حيث $s_n \in L$ ، أثبت ان $s \in L$.

٣. المجموعات المتراسة

قد تكون أهمية فكرة التراص التي سنعرّفها بعد قليل اعظم في التبولوجيا المجردة والتحليل المتقدم منها في التحليل المبني لـ \mathbb{R} . لهذا فالعرض في هذا البند سيكون موجزا. وسيكون هدفنا هو اثبات نظرية تسمى نظرية هاين وبورل (نسبة الى الرياضيين هاين وبورل) تنص هذه النظرية على ان كل مجموعة محصورة ومغلقة في \mathbb{R} تكون متراسة. وصحيح ايضا أنه في أي فضاء قياس (مترى) (كذلك في \mathbb{R}) تكون كل مجموعة متراسة أيضا مغلقة ومحصورة، وتجذب برهان هذه النتيجة في كتب متقدمة في التحليل. وعلى ضوء نظرية هاين وبورل، وعكسها، فإن المجموعة المتراسة في \mathbb{R} هي المجموعة المحصورة المغلقة. ولكن في فضاءات القياس عامة يمكن ان نجد مجموعة محصورة ومغلقة ولكن غير متراسة. لنعرف الآن الاصطلاح التالي:

المجموعة المتراسة.

ندعى المجموعة الجزئية M من \mathbb{R} مجموعة متراسة اذا وفقط اذا كان لكل غطاء مفتوح لـ M غطاء جزئي متناه. وهذا يعني انه اذا كانت $\{ \text{ح} \}$ عائلة لمجموعات مفتوحة تغطي M ، اي ان $M \supset \bigcup_{\alpha} \text{ح}_{\alpha}$ ، فانه يوجد عائلة جزئية منتهية من المجموعات $\text{ح}_1, \text{ح}_2, \dots, \text{ح}_n$ بحيث ان $M \supset \bigcup_{i=1}^n \text{ح}_i$.

المثال ٩.

المجموعة المنتهية (اي التي تحوي على عدد منته من العناصر) هي متراسة. افرض ان M

= {س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن} . وافترض ان {ح} اي غطاء مفتوح لـ م أي ان م ⊂ U ح .
 اذن س ∉ م . تعني ان س = س_ر حيث ١ ≤ ر ≤ ن . اذن س_ر ∉ U ح وس_ر ∉ ح_ر
 لعنصر ما = تر . اذن س_ر ∉ U ح_ر . ومنه م متراسة .

المثال ١٠ .

لنفرض ان (س_ن) متتالية حقيقية تقاربية وس_ن ← س . اذن تكون المجموعة م =
 {س_١ ، س_٢ ، ...} . متراسة . لاثبات ذلك لنفرض ان م ⊂ U ح . الآن س ∉ م تتضمن
 س ∉ U ح ومنه س ∉ ح لعنصر ما . فمن النظرية ٧ فانه يوجد ن . بحيث ان س_ن ∉ ح
 لكل ن ≤ ن . فاذا كان ١ ≤ ن < ن > ن . فان س_ن ∉ م تتضمن س_ن ∉ U ح ومنه س_ن
 ∉ ح_ن . لهذا فان م ⊂ U {ح_ر | ٠ ≤ ر ≤ ن} . وبذا تكون م متراسة .

النظرية ١٠ .

كل فترة مغلقة [أ ، ب] في R تكون مجموعة متراسة .

البرهان .

لنكتب ف_١ = [أ ، ب] ولنفرض ان امكن . ان ف_١ غير متراسة . اذن يوجد غطاء
 مفتوح {ح_١ | ف_١ بحيث انه لا يوجد لها غطاء جزئي منته . نصف ف_١ لتحصل على
 فترتين مغلقتين ف_١ ، ف_٢ . ان واحدة على الاقل من هاتين الفترتين ليس له غطاء جزئي
 منته ، لانه ان وجد لكل من ف_١ وف_٢ غطاء جزئي منته فان كل المجموعات في الغطاءين
 الجزئيين المنتهين تكون غطاء جزئيا منتهيا لـ ف_١ .

لنفرض ان ف_٢ هي الفترة التي ليس لها غطاء جزئي منته . نصف ف_٢ لتحصل على

تمارين ٣-٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

- ١ - اثبت ان اتحاد عدد متته من المجموعات المتراسة يكون مجموعة متراسة.
- ٢ - اثبت ان المجموعة الجزئية المغلقة في مجموعة متراسة تكون مجموعة متراسة.
- ٣ - لنفرض ان M متراسة و $S \subset M$. اثبت ان $M \setminus S$ (س، ن) ومنه اثبت ان M محصورة.
- ٤ - افرض ان M متراسة، L مغلقة. اثبت ان $M \cap L$ متراسة.
- ٥ - اثبت ان R غير متراسة.
- ٦ - اثبت ان الفترة المفتوحة $(0, 1)$ غير متراسة.
- ٧ - [فضاءات القياس]. بالتعريف، فضاء القياس هو زوج يتكون من مجموعة غير خالية Σ واقتان قياس (او مسافة) $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ بحيث ان:

$$(\mu_1): \mu(S) = 0 \text{ اذا وفقط اذا كان } S = \emptyset.$$

$$(\mu_2): \mu(S) = \mu(T) \text{ لـ } S, T \text{ لكل } S, T \in \Sigma.$$

$$(\mu_3): \mu(S) = \mu(T) \Rightarrow \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \text{ لكل } S, T \in \Sigma.$$
 نقول ان μ قياس على Σ لهذا فان اقتتان القياس هو اقتتان ذو قيم حقيقية معروف على زوج من عناصر Σ . من (μ_1) نرى ان $\mu(S) = 0$ نسمي (μ_3) المتباينة الثلاثية.
 اثبت صحة ما يلي في اي فضاء قياس (Σ, μ) :

$$(1) \mu(S) = \mu(T) \Rightarrow \mu(S \cap T) = \mu(S) = \mu(T) \text{ لكل } S, T \in \Sigma,$$

$$(2) |\mu(S) - \mu(T)| \leq \mu(S \Delta T) \Rightarrow \mu(S) + \mu(T) = \mu(S \cup T) + \mu(S \cap T),$$

$$(3) \text{ اذا كان } \mu(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(S) + 1},$$

$$\mu(S) = \mu(T) \Rightarrow \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) = 2\mu(S) = 2\mu(T).$$
 فان (Σ, μ) و (T, μ) هما فضاء قياس.

٨ - اثبت ان التالية هي فضاءات قياس

$$(١) R. \text{ مع } م - (س ، ص) = |س - ص|$$

$$(٢) R. \text{ مع } م - (س ، ص) = |س^٢ - ص^٢|$$

$$(٣) \mathbb{Q} \text{ مع } م - (ع١ ، ع٢) = |ع١ - ع٢|$$

(٤) اي مجموعة غير خالية بين مع م - (س ، س) = ٠ وم - (س ، ص) = ١ اذا كان س \neq ص .

نسمي هذا القياس قياسا بدئيا .

$$(٥) R^n \text{ مع } م - (س١ ، ص١) + \dots + |س٢ - ص٢| + \dots + |س٢ - ص٢|$$

(٦) \mathbb{R}^∞ المتتاليات الحقيقية المحصورة س = (س_ن) مع

$$م - (س ، ص) = |س - ص|$$

(٧) تق ، المتتاليات التقريبية مع م - (س ، ص) = |س - ص| . اثبت ان

ق (س ، ص) = نهاية |س_ن - ص_ن| ليست قياسا على تق .

يجد القاريء في كتاب المؤلف «Elements of Functional Analysis» مناقشة

موضوع فضاءات القياس بشكل عام واستخدامها في التحليل الدالي .

٤ - المجموعات القابلة للعد

اذا كانت بين منتهية فانه بالامكان ايجاد عدد عناصرها بالعد . (سوف نسمي هذا العدد

بالعدد الاصلي لـ بين) . وهذا يعني رياضيا اننا وجدنا ارتباط واحد - لواحد بين بين والمجموعة

{ ١ ، ٢ ، ... ، ن } لعدد ما ن $\in \mathbb{N}$. لهذا فان بين $\sim \{ ١ ، ٢ ، ... ، ن \}$ لعنصر ما ن $\in \mathbb{N}$

بمعنى تكافؤ المجموعات . ثم نقول ان بين لها ن من العناصر او ان عد (بين) =

ن ، حيث عد (بين) ترمز الى العدد الاصلي لـ بين .

واذا كانت بين مجموعة جزئية فعلية من بين فانه من الواضح ان بين لا يمكن ان تكافئ

بين ، لهذا فان عد (بين) > عد (بين) . واذا كانت بين $= \emptyset$ فاننا نقول عد (\emptyset) = ٠ .

وكل ما ورد ينطبق على المجموعات المنتهية. ويختلف الوضع تماماً في حالة مجموعات مثل $N = \{1, 2, \dots\}$ ، التي هي غير منتهية. فعلى سبيل المثال ماذا نعني بعدد (N) أو عدد (R) ؟ بما أن N تحوي عددا لا نهائياً من العناصر يمكن أن نكتب عدد $(N) = \infty$. ولكن R أيضاً تحوي عددا لا نهائياً من العناصر، فمن الطبيعي إذن أن نكتب عدد $(R) = \infty$. وطبعي أيضاً أن نكتب عدد $(N) =$ عدد $(R) = \infty$. الآن N مجموعة جزئية وفعلية من R . لهذا، وبالمقارنة مع حالة المجموعات النهائية، نتوقع أن نحصل على عدد $(N) \geq (R)$. وهذا غير، وقد نتج عن التساهل في تعريف عدد (N) وعدد (R) . ولكن ليس من السهل تعريف العدد الاصيل للمجموعات غير المنتهية ولن نحاول أن نفعل ذلك. كل ما سنفعله هو أن نقول أن المجموعتين ∞ ، ∞ لهما نفس العدد الاصيل ونكتب عدد $(\infty) =$ عدد (∞) إذا فقط إذا كانت $\infty \sim \infty$ بمعنى تكافؤ المجموعات. كذلك سنعرف عدد $(\infty) > (V)$ إذا فقط إذا كانت ∞ كانت ∞ تكافئ مجموعة جزئية من ∞ ولا تكافئ ∞ . وبإمكاننا الآن أن نسأل عن العلاقات بين عدد (N) ، وعدد (Z) ، وعدد (Q) وعدد (R) . وسيتبين لنا أن عدد $(N) =$ عدد $(Z) =$ عدد $(Q) <$ عدد (R) (٦)

وقد تكون العلاقات في (٦) مدعاة للدهشة لأن الاحتواءات $H \supset Q \supset Z \supset N$ جميعها فعلية. أن ما نقوله (٦) على وجه التقريب أن N ، Z ، Q تحوي «نفس العدد» من العناصر في حين تحوي R عناصر أكثر من أي منها. وقبل أن نبرهن (٦) سنعطي مثالا كان جاليليو أول من أشار إليه، وذلك عام ١٦٣٨، إذ قال: أنه يمكن أن يكون لمجموعة جزئية فعلية من مجموعة ما نفس العدد الاصيل الذي للمجموعة الكلية* ولكن بقي الامر عند ذلك الحد الى ان جاء كانتور في أواخر القرن التاسع عشر وبدأ عمله الرائع في نظرية المجموعات والاعداد الاصلية.

* كانت هذه الفكرة معروفة لدى فلاسفة الاسلام، ولكنها بقيت في اطار فلسفي لا تمس الرياضيات الا عند ايضاحها عن طريق خطين مختلفين في الطول، كل نقطة في اكبرهما تناظرها نقطة في الاصغر. المصدق

المثال ١١ .

لتكن $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعة مربعات الاعداد. ان $\text{عد}(S) = \text{عد}(N)$ مع ان S مجموعة جزئية «صغيرة» في N . كل ما نحتاجه لاثبات ذلك هو ملاحظة ان . الاقتران في : $N \leftarrow S$ يعرف بدقي $(n) = n^2$ هو اقتران تقابل .

نقدم الآن تعريفين :

المجموعة المنتهية : تسمى S مجموعة منتهية اذا وفقط اذا كانت $S = \{1, 2, \dots, n\}$ لعدد ما $n \in N$. والا فتسمى المجموعة لا نهائية (غير منتهية).
المجموعة القابلة للعد : تكون المجموعة S قابلة للعد اذا وفقط اذا كانت $S = \emptyset$ ، أو وجد اقتران شامل في : $N \leftarrow S$. وفي حالة وجود اقتران تقابل في : $N \leftarrow S$ اي ان $N \sim S$ سنقول ان S لا نهائية (غير منتهية) قابلة للعد.
فيتضح ان كل مجموعة منتهية قابلة للعد، ولكن هناك مجموعات قابلة للعد وغير منتهية (لا نهائية) مثل N .

المثال ١٢ .

مجموعة الاعداد الصحيحة Z لا نهائية قابلة للعد، اي ان $\text{عد}(Z) = \text{عد}(N)$.
الطريقة الطبيعية لعد Z هي كتابة $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.
وبعبارة ادق، من السهل التأكد من ان في : $N \leftarrow Z$ المعروف بدقي $(n) = \frac{n-1}{2}$ لكل n زوجي و
في $(n) = \frac{n-1}{2}$ لكل n فردي هو اقتران تقابل .

ويكون احيانا من الأسهل اثبات ان S قابلة للعد بأن نجد اقترانا من : $N \leftarrow S$ ، دون القيام بالعد الفعلي واليك التفاصيل التالية :

النظرية ١٢ .

لنفرض ان \emptyset فاذا وجد اقتران تبائي (واحد لواحد) ق : من N فان N سيكون قابلاً للعد.

البرهان .

نعرف ان q (يعني) $N \supset$! فاذا كان $N \supset q$ (ق (يعني) ، نعرف $h(N) = q^{-1}(N)$.
 نثبت $S \supset$ يعني . واذا كان $N \supset$ h (ق (يعني) نعرف $h(N) = S$. فيكون $h : N \rightarrow S$ يعني .
 واذا كان $A \supset$ سه نأخذ $N = q(A)$. فيكون $h(N) = q^{-1}(A) = A$ ، واذن h اقتران شامل
 ومنه سه قابلة للعد .

المثال ١٣ .

الضرب الديكارتي $N \times N = \{ (n, r) : n, r \in N \}$ قابلة للعد. وبعبارة تقريبية
نعدده على الرسم باستخدام طريقة القطر



لذا فان $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3)\} = N \times N$
 $\{(1, 4), \dots\}$. ويمكن برهنة ذلك رياضيا من النظرية ١٢ ، بأخذ $N \times N =$
 وتعريف $(n, n) = 2 \times 2$. فيكون $2 \times 2 = 2 \times 2$ ون $2 \times 2 = 2 \times 2$ ، وهذا

تناقض . وكذلك اذا كان $n > 1$ يعطي تناقضا . لهذا فان $2^{n-1} = 2^{n-2} \cdot 2$ يعطي $n = 1$ ومنه $r = 1$ وهذا يعني ان q هو تباين .

النظرية ١٣ .

افرض ان π_n هي مجموعة غير منتهية قابلة للعد ، لكل $n \in N$. اذن $U = \{ \pi_n \mid n \in N \}$ غير منتهية قابلة للعد .

البرهان .

بما ان $N \sim S_n$ فانه بالامكان كتابة $\pi_n = \{ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots \}$ ، حيث العناصر مختلفة . ويمكننا عد U ب طريقة القطر كما في المثال ١٣ . لهذا فان $U \sim \pi_n = \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots \}$ على شرط ان لا تتكرر العناصر . وليس من الصعب كتابة برهان رياضي لذلك .

المثال ١٤ .

مجموعة الاعداد النسبية Q غير منتهية قابلة للعد . اي ان عد $(Q) = \text{عد}(N)$. ولانبات ذلك افرض ان $\pi_n = \{ r_n \mid r_n \in Z \}$ لكل $n \in N$. كل $\pi_n \sim Z$ ومن المثال ١٢ نحصل على π_n غير منتهية قابلة للعد ولكن $Q = U = \{ \pi_n \mid n \in N \}$ ، اذن من النظرية ١٣ نحصل على ان Q غير منتهية قابلة للعد . النتيجة القادمة أكثر عمقا من سابقتها .

النظرية ١٤ .

مجموعة الاعداد الحقيقية R غير قابلة للعد ، وبما ان $N \subset R$ فان $\text{عد}(N) < \text{عد}(R)$.

البرهان.

هناك طرق عديدة للبرهان، بعضها يعتمد على تمثيل الاعداد الحقيقية بالنظام العشري. ولكننا سنستخدم ما اثبتناه ونعطي إثباتاً يعتمد على خاصية التشابك للفترة المغلقة.

لنفرض ان امكن ان R غير متتهية قابلة للعد. اذن يوجد اقتران $q: N \rightarrow R$ بحيث

ان $q(N) = \{q(1), q(2), \dots, q(n), \dots\} = R$. لأي فترة مغلقة

$f = [a, b]$ ، سوف نكتب $p(f) = b - a$ دلالة على طول الفترة

لنأخذ $f_1 = [1, 2 + q(1)]$. اذن $q(1) \in f_1$ وط $p(f_1) = 1$. فاذا

كانت $q(2) \in f_1$ فعرف $f_1 \supset f_2$ حيث ان ط $p(f_2) > 1/2$ واذا كان $q(2) \notin f_1$

فانه بالامكان ايضاً تعريف f_2 حيث ان $q(2) \in f_2$ وكذلك، ط $p(f_2) > 1/2$ اذن

يوجد $f_1 \supset f_2 \supset f_3$ بحيث ان $q(2) \in f_2$ وط $p(f_3) > \frac{1}{3}$. نستمر بالاستقراء لنحصل

على فترات مغلقة $f_n \supset f_{n+1}$ بحيث ان ط $p(f_n) > \frac{1}{n}$

$q(n) \in f_n \supset f_{n+1}$ لكل $n \in N$ (٧)

ومن النظرية ٥، يوجد عنصر وحيد $s \in R$ بحيث ان $s \in f_n$ لكل $n \in N$. وبما ان

$s \in R = q(N)$ اذن يوجد $a \in N$ بحيث ان $s = q(a)$ ، وبما ان $s \in f_1$ فان $q(1) \in f_1$

$\exists f_1$ مما يناقض (٧).

وهذا يثبت النظرية.

تمارين ٣ - ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت ان اي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي ايضاً قابلة للعد.

٢ - اثبت ان اي مجموعة تكون قابلة للعد إذا وفقط اذا كانت منتهية أو غير منتهية قابلة للعد .

٣ - بأخذ $Q = \frac{2^n - 1}{n}$ ، اثبت ان الفترة المفتوحة $(0, 1)$ ليست غير منتهية قابلة للعد .

٤ - اثبت ان $(0, 1) \sim (0, 1)$ و $(0, 1) \sim [0, 1]$.

٥ - لتكن M مجموعة المتتاليات التي تتكون حدودها من عناصر في $\{0, 1\}$. اي M من \mathbb{R} يعني ان $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ حيث $x_n = 0$ أو $x_n = 1$. اثبت ان M من غير قابلة للعد .

٦ - اثبت ان مجموعة الاعداد غير النسبية ليست غير منتهية قابلة للعد .

٧ - لتكن $M \neq \emptyset$ ولتكن Q (من) عائلة مجموعات من الجزئية . اثبت انه لا يوجد اقتران شامل $Q : S \rightarrow Q$. استنتج ان $Q(N)$ غير قابلة للعد .

٥ . مجموعات الأعداد المركبة

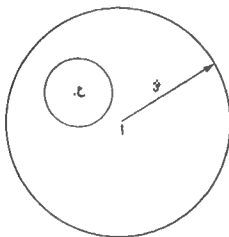
يمكن تعميم التعريف الاساسي للتبولوجيا على الاعداد الحقيقية الى الاعداد المركبة بتغييرات بسيطة فقط .

فمن الطبيعي ان نستبدل فكرة الكرة المفتوحة في R بفكرة القرص المفتوح في \mathbb{C} ، اي نستبدل a ، s في R' بـ a ، e في \mathbb{C} ونستبدل القيم المطلقة للعدد الحقيقي s - بمقياس العدد المركب a - . لهذا فاننا نعرف في \mathbb{C} :

القرص المفتوح .

ليكن $a \in \mathbb{C}$ ، $r > 0$. فان
 $Q(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$

ويسمى القرص المفتوح الذي مركزه أ ونصف قطره نق .
هندسياً قر (أ ، نق) هو عبارة عن النقط التي داخل الدائرة في المستوى المركب التي مركزها أ
ونصف قطرها نق . ونرمز لهذه الدائرة بـ
 $D(A, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A| = r \}$.
والقرص قر (أ ، ٠) يدعى قرص الوحدة المفتوح . والقرص المغلق الذي مركزه أ
ونصف قطره نق هو قر (أ ، نق) = $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A| \leq r \}$.
ونقول ان المجموعة الجزئية $H \subset \mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة اذا فقط اذا كان لكل $z \in H$
يوجد نق > 0 بحيث ان قر (ز ، نق) $\subset H$. وكما في المثال ٦ ، يتبين ان كل قرص مفتوح هو
مجموعة مفتوحة . وهذا موضح ادناه في القرص قر (أ ، نق) .



فاذا كانت $L \subset \mathbb{C}$ فان ل تسمى مجموعة مغلقة اذا فقط اذا كانت متممها
 $L^c = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \notin L \}$ مفتوحة .
وتعمم تعريفات الداخل والانغلاق والمجموعة الكثيفة ونقط التراكم الى \mathbb{C} باستبدال
 \mathbb{R} بـ \mathbb{C} .
وبما انه يمكن اعتبار R مجموعة جزئية من \mathbb{C} لانه من الضروري ان نؤكد انه عند دراسة

مجموعة جزئية من R قد يكون لها خواص تبولوجية عند النظر اليها كمجموعة جزئية من R ولا يكون لها نفس الخواص عند النظر اليها كمجموعة جزئية من \mathbb{C} . وهذا موضح بالمثال التالي :

المثال ١٥ .

من المثال ٦ ، كل فترة مفتوحة (a, b) هي مجموعة مفتوحة . ولكن (a, b) ليست مجموعة مفتوحة في \mathbb{C} . لانه اذا كان $e \in (a, b)$ وهذا يعني ان $e \in R$ و $a < e < b$ فان كل قرص $D(e, r)$ (نق) يحوي نقطة ليست في (a, b) .

المثال ١٦

من الواضح هندسيا ان المجموعة المعرفة بـ

$$(a, b : b, c) = \{x \in \mathbb{C} \mid a < x < b, b < x < c\}$$

حيث a, b, c د اعداد حقيقية هي مجموعة مفتوحة في \mathbb{C} . وتسمى مستطيلا مفتوحا . ولانبات ان هذه المجموعة مفتوحة لتأخذ $e \in (a, b : b, c)$. اذن $s \in (a, b)$ ، $c \in (b, c)$ وهاتان الفترتان مفتوحتان في R . اذن يوجد δ_1 (نق) $\subset (a, b)$ ، δ_2 (نق) $\subset (b, c)$. فلتكن $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$. اذن $D(e, \delta) \subset (a, b : b, c)$. لان $e \in (a, b)$ ، $e \in (b, c)$. اذن $e \in \delta_1$ ، $e \in \delta_2$. اذن $D(e, \delta) \subset (a, b) \cup (b, c) = (a, b : b, c)$. وبالمثل $s \in (a, b)$. وبالمثل $c \in (b, c)$. ولهذا فان $e \in (a, b : b, c)$.

كذلك فإن أي مجموعة على شكل

$$[a, b : b, c] = \{x \in \mathbb{C} \mid a \leq x \leq b, b \leq x \leq c\}$$

هي مجموعة مغلقة في \mathbb{C} ، وتسمى مستطيلا مغلقا .

ولا معنى للقول عن مجموعة اعداد مركبة بانها محصورة من اعلى او من اسفل . فهذه الاصطلاحات تستخدم لمجموعات الاعداد الحقيقية فقط . ولكن يمكن تعريف الحصر على

البرهان .

لتكن $f_n = [a_n, b_n]$ ، $q_n = [c_n, d_n]$ ، لذا فان (f_n) و (q_n) هما متالتان من الفترات المغلقة المتشابهة في R . ومن خاصية التشابك فانه يوجد s ، v و R بحيث ان $s \in f_n$ ، $v \in q_n$ لكل $n \in N$. اذن $s + t \in v$ و $s \in q_n$ لكل $n \in N$ ، اي ان $s + t \in v$ و $n \in N$. ومن السهل اثبات ان $s + t \in v$ وحيد . وهذا يثبت النظرية .

وباستبدال R بـ \mathbb{C} في النظرية ٦ تبقى جميع النتائج صحيحة . وللبرهان نستبدل كما سبق الكرات المفتوحة بالاقراص المفتوحة عند الحاجة .

وفي الفصل القادم نعرف التقارب في متاليات الاعداد المركبة وكل ما نفعله هو استبدال الاعداد الحقيقية باعداد مركبة ، والقيم المطلقة بمقياس الاعداد المركبة . والنظرية ٧ تبقى صحيحة في حالة الاعداد المركبة . وكذلك النظرية ٨ والنظرية ٩ تبقىان صحيحتين لمجموعات جزئية من \mathbb{C} .

وتعريف التراص له ايضا معنى في \mathbb{C} باعتبار التعريف الجديد للمجموعات المفتوحة في \mathbb{C} ونتائج المثلين ٩ ، ١٠ صحيحة ايضا في \mathbb{C} . واذا اعتبرنا $[a, b]$ مجموعة جزئية من \mathbb{C} فانها تكون متراسة . ويشكل أعم فالنظرية التالية تناظر النظرية ١٠ للمستطيلات المغلقة .

النظرية ١٦ .

المستطيل المغلق في \mathbb{C} هو مجموعة متراسة .

البرهان .

نتبع الخطوط الرئيسية في النظرية ١٠ . نفرض ان $s = [a, b]$ ، $t = [c, d]$ غير متراسة ونقسم s الى اربعة مستطيلات مغلقة بتصنيف الجوانب . ثم نستمر لنعين متالية

مستطيلات مغلقة متشابكة تقاطعها نقطة واحدة (باستخدام النظرية ١٥). فنصل الى تناقض، كما في السابق، مما يثبت النظرية.

ونظرية هاين وبورل صحيحة ايضا في \mathbb{C} والبرهان كما في R . وفي الحقيقة اذا كانت L محصورة ومغلقة في \mathbb{C} فان L محصورة تتضمن $L \supseteq \{0\}$ (م) لعدد حقيقي $m < 0$ فاذا L محتواة في المستطيل $[-m, m] \times [-m, m]$ الذي هو مجموعة متراسة حسب النظرية ١٦. كما في السابق.

التارين ٣-٥

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التارين)

١- اثبت ان نصف المستوى الايمن $\{x = 0, y \geq 0\}$ هو مجموعة مفتوحة في \mathbb{C} . وضع بالرسم.

٢- افرض ان H مفتوحة في \mathbb{C} . اثبت ان $H \cap R$ مفتوحة في R .

٣- لتكن M مجموعة متراسة في R . اثبت ان M مجموعة متراسة في \mathbb{C} .

٤- لتكن M مجموعة جزئية ومحصورة في \mathbb{C} . اثبت ان

$$A = \{x \in \mathbb{C} \mid x \in M, \exists y \in M, y = x + iy\}$$

محصورة من اعلى في R . والعدد قطر (س) = ص. ح. ع (أ) يسمى قطر المجموعة M .

اثبت ان قطر (قر) $A = \{x \in \mathbb{C} \mid x \in M, \exists y \in M, y = x + iy\}$ = \overline{A} .

٥- تسمى المجموعة الجزئية M في \mathbb{C} محدبة اذا وفقط اذا كانت القطعة المستقيمة

خذ $[x, y] \subset M$ \Rightarrow $\exists z \in M$. اثبت ان:

(١) الاقراص المفتوحة محدبة.

(٢) $\{x \in \mathbb{C} \mid x \in M, \exists y \in M, y = x + iy\}$ مجموعة محدبة، وضع بالرسم.

(٣) اذا كانت M محدبة فان M أي مغلقة M تكون محدبة ايضا (استخدم الحقيقة القائلة

- ان ع \exists يتبعه تتضمن أنه لاي و < 0 يوجد ع $*$ \exists سيم بحيث ان $|ع - ع^*| > 0$.
- ٦ - اذا كان ع يقع على الدائرة د (١ ، $\frac{1}{4}$) فاثبت ان ع $= ع^*$ تقع على الدائرة د (أ ، نق)، أوجد أ ، نق .
- ٧ - اثبت ان \mathbb{C} وقرص الوحدة المفتوح لهما نفس العدد الاصيلي (جد اقتران تقابل ق : $\mathbb{C} \rightarrow$ قر (٠ ، ١)).

الفصل الرابع

المتتاليات

١. خاصية التهام في \mathbb{C} وجبر التقارب

لقد تم استخدام متتاليات الاعداد النسبية والحقيقية على شكل واسع. وفي هذا الفصل، يتركز جل اهتمامنا، وليس كله، على متتاليات الاعداد المركبة، اي اقترانات N $\rightarrow \mathbb{C}$ ، التي سوف نكتبها على الصورة $E = (E_n) = (E_1, E_2, \dots)$. ولعظم التعريفات التي وردت، في الفصل الثاني، البند ٤، خاصة متتاليات الاعداد النسبية، معنى في متتاليات الاعداد المركبة. الا انه لا يمكن تطبيق مفاهيم المحصور من اعلى والمحصور من اسفل، والوتيرية والتباعد الى ∞ و $-\infty$ على متتاليات الاعداد المركبة، لعلاقتها بالترتيب.

لهذا فاننا نقول ان $E = (E_n)$ محصورة اذا وفقط اذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث ان $|E_n| \leq M$

لكل $n \in \mathbb{N}$. والرمز ∞ أول (∞) يعني مجموعة جميع متتاليات الاعداد المركبة المحصورة.

ونقول ان ϵ تقاربية، ونهايتها A ، اذا وفقط اذا وجد $\delta \in \mathbb{R}$ بحيث انه لكل $\epsilon > 0$. يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$. بحيث ان $|a_n - A| < \epsilon$ لكل $n \geq n_0$. وسوف نكتب نحتاج $n = n_0$ ، $a_n \rightarrow A$ او $a_n \rightarrow A$ (ن $\rightarrow \infty$) . وسوف نستخدم الرمز \rightarrow أو \rightarrow (\mathbb{C}) لتعني مجموعة جميع متتاليات الاعداد المركبة التقاربية . والمتتالية غير التقاربية تسمى تباعدية . وتسمى ϵ متتالية صفرية، اذا وفقط اذا كان نحتاج $n = 0$. وتستخدم الرمز \rightarrow أو \rightarrow (\mathbb{C}) ليعني مجموعة جميع المتتاليات الصفرية .

ونقول ان ϵ هي متتالية كوشية، اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$. بحيث ان $|a_n - a_m| < \epsilon$ لكل $n, m \geq n_0$. وسنرمز لمجموعة جميع المتتاليات الكوشية بالرمز $K(\mathbb{C})$.

والنظرية الاساسية الاولى التي نناقشها تتعلق بالتام:

النظرية ١ [تمام \mathbb{C}].

تق (\mathbb{C}) = ك (\mathbb{C})، أي انه: تكون متتالية الاعداد المركبة تقاربية، اذا وفقط اذا كانت كوشية .

البرهان:

لتكن $\epsilon \in \mathbb{C}$ تق (\mathbb{C}) . اذن $|a_n - a_m| < \epsilon$ لكل $n, m \geq n_0$. لهذا فانه اذا كانت $n \leq m$ ، وان $n \geq n_0$ ، فان المتباينة المثلثية (النظرية ٢٠ ، الفصل الثاني) تتضمن $|a_n - a_m| < \epsilon$. وبالعكس، $|a_n - a_m| < \epsilon$. ومنه $\exists K(\mathbb{C})$. وبالعكس، لنفرض ان $\epsilon \in K(\mathbb{C})$. اذن $|a_n - a_m| < \epsilon$ لكل $n, m \geq n_0$. ولكن اذا كانت $n < m$ ،

$= \text{س}_\text{ن} + \text{ت ص}_\text{ن} ، \text{س}_\text{ن} ، \text{ص}_\text{ر} \exists R \text{ فان}$
 $\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر} = \text{س}_\text{ن} - \text{س}_\text{ر} + \text{ت ص}_\text{ن} - \text{ص}_\text{ن} ،$
 من النظرية ٢٠، الفصل الثاني، نحصل على $|\text{س}_\text{ن} - \text{س}_\text{ر}| \geq |\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر}| + |\text{ص}_\text{ن} - \text{ص}_\text{ر}|$
 $\text{ص}_\text{ر} ، |\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر}| \geq |\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر}|$. لهذا فان $(\text{س}_\text{ن})$ و $(\text{ص}_\text{ن})$ في $K(R)$ ، التي تساوي $\text{تق}(R)$ من
 تمام R . اذن $\text{س}_\text{ن} \leftarrow \text{س} \exists R$ و $\text{ص}_\text{ن} \leftarrow \text{ص} \exists R$. لهذا فان
 $|\text{ع}_\text{ن} - (\text{س} + \text{ت ص})| \geq |\text{س}_\text{ن} - \text{س}| + |\text{ص}_\text{ن} - \text{ص}| \leftarrow 0 \leftarrow (\text{ن} \leftarrow \infty)$ ، اذن $\text{ع}_\text{ن} \leftarrow \text{س} + \text{ت ص}$. لهذا فان $(\text{ع}_\text{ن}) \exists \text{تق}(\mathbb{Q})$ ، مما يثبت النظرية.

المثال ١ .

(أ) $\text{ع} = (\text{ت})^\text{ن} = (\text{ت} ، - ، ١ ، - ، \text{ت} ، ١ ، \dots)$ تباعدية . لانه اذا كانت $\exists \text{تق}$ ، فان $\text{ع} \exists$ ك، فتكون $|\text{ت}^\text{ن} - \text{ت}| > ١$ لكل ن ، $\text{ر} \leq \text{ن}$ (١) . فباخذ $\text{ن} \leq \text{ن}_٠$ ، $\text{ر} = \text{ن}_٠ + ٢$ ، نحصل على التناقض $٢ < ١$.

(ب) $\text{ع} = (\frac{\text{ت}}{\text{ن}}) \exists \text{تق}$. لان $|\frac{\text{ت}}{\text{ن}}| = \frac{|\text{ت}|}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}} \leftarrow 0 \leftarrow (\text{ن} \leftarrow \infty)$.

وعلى ضوء نتائج سابقة، فان برهان النظرية التالية لا يقدم شيئا جديدا .

النظرية ٢ :

لتكن $\text{ع} = (\text{ع}_\text{ن}) = (\text{س}_\text{ن} + \text{ت ص}_\text{ن})$ ، واكتب $\text{س} = (\text{س}_\text{ن})$ ، $\text{ص} = (\text{ص}_\text{ن})$. اذن
 (أ) $\text{ع} \exists \text{تق}$ تضمن ان $\text{ن هاج} \text{ن}$ وحيدة .
 (ب) $\text{تق} \supset \text{ك} = \text{ل} \infty$
 (ح) $\text{ع} \exists \text{تق}$ اذا وفقط اذا كان $\text{س} \exists \text{تق}$ و $\text{ص} \exists \text{تق}$.

$$A_n = (A_n) \dots \dots \dots (2)$$

ان العمليات المذكورة في (١) و (٢) تمكنتنا من دراسة مجموعات من الاعداد المركبة من حيث كونها فضاءات خطية أو جبريات على الحقل \mathbb{C} (أو \mathbb{R}). وبذا نتحدث عن الفضاءات الخطية والجبريات المركبة، أو الحقيقية حسب الحقل الذي نأخذُه.
والنتيجة التالية هامة، ليس لكونها ذات أهمية في التركيب، بل لانها تعطينا قواعد لحساب المتتاليات التقاربية عمليا.

النظرية ٣.

- (أ) l^∞ هي جبرية تبديلية من الاعداد المركبة، ذات عنصر محايد.
 (ب) تق جبرية جزئية من l^∞ ذات عنصر محايد. وكذلك اذا كانت $e_n \leftarrow A, e_n^*$
 $\leftarrow B$ فانه لكل حد \mathbb{C} نحصل على:

$$e_n + e_n^* \leftarrow A + B$$

$$e_n \leftarrow A$$

$$e_n \leftarrow A \cdot B$$
 كذلك اذا كان $e_n^* \neq 0$ لكل $n \in N$ و $e_n^* \leftarrow B \neq 0$ فان

$$\frac{e_n}{e_n^*} \leftarrow \frac{A}{B}.$$
 (ج) تقه مثالية في l^∞ بمعنى ان تقه هي جبرية جزئية من l^∞ ، وتحقق العلاقة
 $e_n^* \in تقه$ ، عندما تكون $e_n \in تقه$ ، $e_n^* \in l^\infty$.

البرهان.

(أ) يجب التحقق من صحة عدة مسلمات (انظر البند ٣ من الفصل الاول) لكن جميع الامور مباشرة مع انها متعبة، فننصح القاريء بالتحقق من التفاصيل. ولعل اهم ما في الامر

(ح) اذا كان e ، e^* تقو. وح \mathcal{C} فان (ب) تتضمن $e + e^* \leftarrow 0$ ، $e \leftarrow 0$.
وع $e \leftarrow 0$ ، ومنه تقو. جبرية جزئية من ∞ (ومن تق).

لنفرض ان $e \in \mathcal{C}$ ، e^* ل ∞ . اذن $|e| \leq m$ لكل $n \in N$. واذا كان

$$0 < \epsilon \text{ فانه يوجد } n \text{، بحيث ان } |e| \geq \frac{\epsilon}{m} \text{ لكل } n \leq n \text{. اذن } |e| \leq \epsilon$$

لكل $n \leq n$ ، ومنه $e \in \mathcal{C}$ تق. . وقد تم اثبات النظرية.

وبوجه خاص يتبع من النظرية ٣ ان ∞ ، تق، تقو. هي فضاءات خطية حقيقية.

وهذا واضح اذا حصرنا الاعداد ح بحيث تكون في R .

المثال ٢.

من النظرية ٢ (أ)، نرى انه يمكن ربط كل متتالية تقارب (ع_n) بنهايتها الوحيدة e_n ،

التي هي عدد مركب. وهذا يعني انه يوجد اقتران $q: \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}$ بين الجبريتين تق، \mathcal{C}

معرف بـ $q(e) = e_n$.

مشتب الآن ان هذا الاقتران هو اقتران محافظ. (انظر الفصل الاول، البند ٣). اذا

كانت e ، e^* تق وح، $d \in \mathcal{C}$ فان النظرية ٣ (ب) تنص على ان

$$e_n(e + d) = e_n(e) + e_n(d)$$

$$= e_n(e) + e_n(d)$$

$$= e_n(e) + e_n(d)$$

واذن $q(e + d) = q(e) + q(d)$. كذلك $e_n(e) = e_n(e)$ (نها e_n)

e_n . واذن $q(e) = q(e)$.

لاحظ ان q هو اقتران شامل لانه اذا كان $d \in \mathcal{C}$ فان $e = (e, d, \dots)$

$\in \mathcal{C}$ تق و $q(e) = e$. ولكن

ق ليس واحدا لواحدا، فعلى سبيل المثال، اذا كان $e = (\frac{1}{n})$ فان $q(e) = q(c)$ (ص)

$e = 0$ ولكن $e \neq 0$. اذن q ليس تشاكلا .

كثيرا ما يكون من غير الممكن تطبيق قوانين النهايات في النظرية ٣ (ب) مباشرة بل يتطلب الامر بعض العمليات الاولية .

وهذا موضح في المثالين التاليين .

المثال ٣ .

افرض ان $s_n = \frac{n^2 - 6}{n^2 + 3}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. لا يمكن استخدام $s_n = \frac{n^2}{n^2}$ حيث e_n

$= n^2 - 6$ و $e_n^* = n^2 + 3$ لان $e_n^* \neq 0$. ليستا تقاربتين . ولكن اذا قسمنا البسط والمقام على n نحصل على

$$s_n = \frac{\frac{n^2 - 6}{n}}{\frac{n^2 + 3}{n}} \leftarrow \frac{\frac{n}{n} - \frac{6}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}} \text{ , لان } \frac{6}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ لكل } n \in \mathbb{N} .$$

وبطريقة مشابهة،

$$t_n = \frac{\frac{n^2}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n^2}{n} + 1 - \frac{1}{n}} = \frac{n - 2 + 1}{n + 1 - 1} \leftarrow \frac{n - 1}{n} \rightarrow 1$$

لعله من المفيد ان نذكر انه لا يمكن لأي عدد من العمليات الصحيحة ان تحول المتتالية

التباعدية الى متتالية تقاربية .

المثال ٤ .

هل المتتالية $(\sqrt{n} - 1 - \sqrt{n})$ تقاربية ؟ قد يقول القاريء بأن $\sqrt{n} + 1 \rightarrow \infty$.

$\sqrt{n} \leftarrow \infty$ اذن $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \leftarrow \infty - \infty = 0$. وهذا غير صحيح لان قوانين النهايات تطبق فقط على المتتاليات التقاربية. و \sqrt{n} تباعدية. ولكن كل ما نحتاج اليه هو ان نكتب

$$0 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

هنا كانت النهاية بالطريقة الصحيحة مساوية النهاية بالطريقة الخطأ، ربما لسوء

الحظ. ولكن المثال

$$n - \sqrt{n^2 + 2n} \leftarrow 1$$

يبين ان ذلك لا يحدث عادة.

والنظرية التالية تمكنتنا من اخذ النهايات لمتباينات اطرافها متتاليات تقاربية (يجب ان تكون المتتاليات بالطبع حقيقية).

النظرية ٤.

- (أ) اذا كانت (s_n) ، (s_n) متاليتين حقيقيتين تقاربيتين وكان يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ ، بحيث ان $s_n \geq s_{n_0}$ لكل $n \leq n_0$ ، فان $s_n \geq s_{n_0}$.
 (ب) (قاعدة الشطيرة) اذا كانت $s_n \geq a_n \geq s_{n_0}$ لكل $n \leq n_0$ ، وكانت $s_n = s_{n_0}$ ، فان (a_n) هي متتالية تقاربية ونها $a_n = s_{n_0}$.

البرهان.

(أ) افرض ان $s_n \leftarrow a$ ، $s_{n_0} \leftarrow b$ ، وافرض ، ان كان ذلك ممكنا ، ان $a < b$.

خذ $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. اذن يوجد n_1 بحيث ان $a - \epsilon > s_{n_1}$ و $s_{n_1} \geq b + \epsilon$ ، ومنه $a - \epsilon > s_{n_1} \geq b + \epsilon$ ، وهذا يتضمن ان $a - b > 2\epsilon$. وهذا يعطينا التناقض $\epsilon < \epsilon$. اذن $a \geq b$.

(ب) هذا يؤكد الواضح في المتباينات ، وهوان ما توسط بين متباينتين نقتر بان من نهاية واحدة ، له ايضا نفس هذه النهاية .

$$\begin{aligned} & \text{لتكن } \epsilon > 0 . \text{ اذن يوجد } n_1 , n_2 \text{ بحيث ان } |s_n - ح| > \epsilon , |ص_n - ح| \\ & \text{لكل } n \leq n_1 + n_2 . \text{ اذن لكل } n \leq n_2 + n_1 + n_2 \\ & - \epsilon > s_n - ح \geq a_n - ح \geq ص_n - ح > \epsilon , \\ & \text{ومنه } |a_n - ح| > \epsilon \text{ ولهذا فان } a_n = ح . \text{ وبهذا يتم البرهان .} \end{aligned}$$

المثال ٥ .

$$\begin{aligned} & \text{افرض ان } a_n = (n^2 + n^3) \text{ لكل } n \in \mathbb{N} . \text{ الان } n^3 > n^2 + n^3 > 2(n^3) , \text{ ومنه} \\ & 3 > a_n > 2(n^3) \text{ لكل } n \in \mathbb{N} . \text{ خذ } s_n = 3 , ص_n = (\frac{1}{n^3}) , \text{ في قاعدة} \\ & \text{الشطيرة . الان } \frac{1}{n^3} \leftarrow 1 \text{ لان } \frac{1}{n^3} = 1 + n^3 , \text{ اذن } 1 < n^3 , \text{ اذن } 1 + n^3 > 1 + n^3 \\ & \text{متباينة برنولي . اذن } 0 < n^3 \geq \frac{1}{n^3} , \text{ لهذا } 1 \leftarrow 1 , \text{ لهذا فان } \frac{1}{n^3} \leftarrow 1 . \text{ من قاعدة الشطيرة} \\ & \text{فنحصل على } a_n = n^3 = ص_n = 3 . \end{aligned}$$

تمارين ٤ - ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

$$\begin{aligned} & ١ - \text{افرض ان } (ع_n) \exists \text{ ك . اثبت انه يوجد متتالية من الاعداد الطبيعية } (ن) \text{ تحقق } n > n_p \\ & > n_p > \dots \text{ بحيث ان } |ع_n - ع_{n_p}| > 2 \text{ لكل } n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

$$٢ - \text{اذا كانت } ع = (س_n + ت_n) \exists \text{ ل } \infty \text{ وكانت } (س_n) \text{ وتيرية متناقصة و } (ص_n) \text{ وتيرية}$$

متزايدة. هل تكون (ع_ن) تقاربية؟

٣- أثبت ان $\exists \epsilon > 0$ اذا فقط اذا كانت $\exists \delta > 0$ و $\forall n \in \mathbb{N}$.

٤- اثبت انه لا يوجد عنصر محايد في المتالية تق. وان تق ليست مثالية في \mathbb{N} .

٥- اثبت ان $\epsilon_n \leftarrow \frac{1}{n}$ تعطي $\epsilon_n \leftarrow \frac{1}{n}$. اعط مثالا بحيث ان (ϵ_n) تقاربية و (ϵ_n)

تباعدية. هل الاقتران ق : تق $\leftarrow \mathbb{N}$ المعروف بـ ق (ع) = ϵ_n هو اقتران محافظ؟

٦- لكل $\epsilon > 0$ عرف $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ ص ح ع ϵ_n . نسمي ϵ_n معيار المتالية المحدودة ع

(ϵ_n) . اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ ، حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

= ص ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

مقياس الاعداد المركبة. بين ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

$\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

اذا كان $\epsilon_n \rightarrow 0$ تق ، فاثبت ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

٧- لتكن $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

$\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

٨- لتكن (ϵ_n) متالية اعداد حقيقية غير سالبة بحيث ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

من المفيد ان نحل الحالة $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

٩- لتكن (ϵ_n) متالية اعداد حقيقية موجبة بحيث ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

المتاليات الحقيقية (ص_ن) بحيث ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

(ص_ن) بحيث ان $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع ، $\epsilon_n \rightarrow 0$ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ اذا فقط اذا كانت ع

١٠- اعطيت متاليات حدها النوني كما يلي. ناقش سلوك هذه المتاليات عندما $n \rightarrow \infty$.

$$(أ) \frac{1 + n^4 - n^2}{n^3 + 5}$$

$$(ب) \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$(ح) (٣ + ٥ + \dots + \frac{1}{n})$$

$$(د) \frac{n}{1+n} + \dots + \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+1}$$

$$(هـ) n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$$(و) \frac{n+1+2+3+\dots+n}{n}$$

١١ - إذا كان $E_n \rightarrow A$ فأثبت ان الوسط الحسابي $\frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{n} \rightarrow A$. (ارشاد: عين n .)

$n = \infty$ بحيث $|A - E_n| < \epsilon$ لكل $n < \infty$. اكتب $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ على صورة $(E_1 + E_2 + \dots + E_n) + (E_n + \dots + E_1)$. ثم استخدم ϵ ل ∞ .

استنتج ان المتتالية $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + 1$ تقاربية وجد نهايتها. اثبت انه بالرغم

من ان المتتالية $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ تباعدية. الا ان المتتالية

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

ناقش سلوك الوسط الحسابي للمتتالية $(E_n) = (t, 1-t, -t, 1-t, \dots)$ عندما $n \rightarrow \infty$.

١٢ - اذا كانت (s_n) متتالية حقيقية و $s_n \rightarrow \infty$ فأثبت ان $\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \rightarrow \infty$.

١٣ - اذا كان $s_n \leq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $s_n \rightarrow A$ فأثبت ان الوسط الهندسي (s_n) $\rightarrow A$.

اذا كانت $s = (1, 2, 1, 2, \dots)$ فجذبا (s_n) $\rightarrow \frac{1}{2}$.

٢ - النهايات العليا والسفلى

يعالج هذا البند متتاليات حقيقية فقط . اذا اعطينا متتالية حقيقية $s = (s_n) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ فانها قد تكون تقاربية، تتقارب الى نهاية (وحيدة)، A ، وهذه عدد حقيقي . أو قد تكون تباعدية . فاذا كانت تباعدية فيمكن تصنيف سلوكها عادة بما يلي :

(١) اذا كانت s تباعدية وكانت $s \rightarrow \infty$ فاننا نقول ان s تتذبذب محصورة .

(٢) اذا كانت s تباعدية و $s \rightarrow \infty$ فان هناك ثلاث حالات محتملة :

(أ) s تباعد الى ∞ اي ان $s_n \rightarrow \infty$ كما عرفنا في السابق .

(ب) s تباعد الى $-\infty$ اي ان $s_n \rightarrow -\infty$ كما عرفنا في السابق .

(ج) لا تحدث (أ) ولا (ب) فنقول عندها ان s تتذبذب غير محصورة .

المثال ٦ .

- (أ) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ تتذبذب محصورة .
- (ب) $(1, \sqrt{2}, 3, \sqrt{4}, 5, \sqrt{6}, \dots)$ تباعد الى ∞ .
- (ج) $(-2, 1, -2, 1, -2, 1, \dots)$ تباعد الى ∞ .
- (د) $(-1, 0, 2, -3, 0, 4, -5, \dots)$ تتذبذب غير محصورة .
- سوف نوسع فكرة النهايات للمتتاليات التقاربية ليصبح بالامكان ربط اي متتالية حقيقية برمزين يحددان النهاية العليا والسفلى للمتتالية ، لكي نتمكن من تغطية جميع الاحتمالات . ولا بد من احتواء الرمز ∞ ، وياقي الاعداد الحقيقية .
- لهذا وكى لا نستثنى اي حالة، من المفيد ان نعرف
- $$-\infty < A < \infty \text{ لكل } A \in \mathbb{R} \dots (5)$$
- افرض ان $s = (s_n)$ متتالية حقيقية . فاذا كانت s غير محصورة من اعلى فاننا نكتب
- $$s_n = \infty .$$

واذا كانت s محصورة من اعلى فسوف نأخذ

$m_r = \text{ص.ح.ع} \{ s_r, s_{r+1}, \dots \} = \text{ص.ح.ع} n \leq r$ من
اذن $s_n \geq m_r$ لكل $n \geq r$ ، وكذلك $m_r \leq s_{r+1}$ لكل $r \leq 1$. لهذا فان المتتالية (m_r) هي
متتالية وتيرة متناقصة. اذن من النظرية ٣، الفصل الثالث، اما ان يكون $m_r = \text{ك.ح.د} m$
اذا كانت (m_r) محصورة من اسفل، أو $m_r \leftarrow \infty$ اذا كانت (m_r) غير محصورة من اسفل. في
الحالة الاولى نكتب

$$\overline{m}_n = n = m_r = \text{ك.ح.د} r \leq 1 [\text{ص.ح.ع} n \leq r] \dots (٦)$$

وفي الحالة الثانية نكتب $\overline{m}_n = \infty$.

خلاصة ما ورد: تربط كل متتالية حقيقية اما بعدد حقيقي كما في (٦) أو ∞ أو $-\infty$.
وفي جميع الحالات يدعى العدد او الرمز الذي ربطت به المتتالية: النهاية العليا للمتتالية ويرمز له
بالرمز \overline{m}_n .

المثال ٧.

(أ) $s = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ ليست محصورة من أعلى، لهذا فان \overline{m}_n
 $s_n = \infty$. (ب) $s = ((-1)^n + 1 + \frac{1}{n}) = (1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ محصورة
من اعلى وبالحساب نرى ان $(m_r) = (\frac{1}{r}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$. اذن $m_r \leftarrow 0$
 $\leftarrow 2$ ومنه $\overline{m}_n = 2$. (ج) $s = (-n) = (1, -2, -3, \dots)$ محصورة من اعلى و
 $(m_r) = (-r)$ ومنه $m_r \leftarrow -\infty$ ، اذن $\overline{m}_n = -\infty$.
اذا اعطينا متتالية (s_n) ، فانه يمكن ان نرى هل هي محصورة من اسفل ام لا. فاذا
كانت غير محصورة من اسفل، فاننا نكتب $\overline{m}_n = -\infty$ ، واذا كانت محصورة من اسفل
فاننا نأخذ:

$$m_r = \text{ك.ح.د} \{ m_r, s_{r+1}, \dots \} = \text{ك.ح.د} n \leq r$$

نرى ان (م_ر) متتالية وتيريه متزايدة، ومنه اما ان يكون نها م_ر = ص.ح ع م_ر ، اذا كانت (م_ر) محصورة من اعلى، أو م_ر ← ∞ ، اذا كانت (م_ر) غير محصورة من اعلى . ففي الحالة الاولى نكتب:

نها س_ن = نها م_ر = ص.ح ع م_ر ، { ك ح د ن ≤ م_ر س_ن }
وفي الحالة الثانية نكتب نها س_ن = ∞ . نسمي نها س_ن بالنهاية السفلى لـ (س_ن) .

المثال ٨ .

لنأخذ المتتاليات المذكورة في المثال ٧ :

- (أ) س محصورة من اسفل و(م_ر) = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ...) ، اذن نها س_ن = ٠ .
(ب) س محصورة من اسفل، و(م_ر) = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ...) . اذن نها س_ن = ٠ .
(ح) س غير محصورة من اسفل، اذن نها س_ن = ∞ . لاحظ انه في هذه الحالة نها س_ن = ∞ .

في المتتالية (س_ن) = (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) ، نرى ان نها س_ن = ∞ ونها س_ن = ∞ .
والنظرية التالية تعطي خصائص النهايات العليا والسفلى المنتهية ، اي عندما تكون هذه النهايات اعدادا حقيقية، وليس ∞ أو -∞ .

النظرية ٥ .

(١) اذا كانت نها س_ن = ح ∉ R فان:

- (أ) لكل و < ٠ ، يوجد ن ∉ N ، بحيث ان س_ن > ح + و ، لكل ن ≤ ن .
(ب) لكل و < ٠ ، س_ن < ح - و ، لعدد لا نهائي من ن .
وبالعكس، كل عدد حقيقي ح يحقق (أ) ، (ب) يجب ان يكون نها س_ن .

(٢) اذا كانت نها س_ن = ح ∈ R فان:

- (ح) لكل و < ٠ ، يوجد ن ∉ N ، بحيث ان س_ن < ح - و ، لكل ن ≤ ن ،

(د) لكل $0 < \epsilon$ ، $s_n > \epsilon + \delta$ ، ولعدد لا نهائي من n
وبالعكس أي عدد حقيقي δ يحقق $(\delta -)$ ، (د) يجب أن يكون ϵ s_n .

البرهان.

سوف نبرهن (١) وبرهان (٢) شبيه به. لنفرض أن $\epsilon s_n = \delta -$ ، ولنفرض أن $0 < \epsilon$.
فمن (٦) وتعريف δ ، فانه يوجد n_0 ، بحيث أن $m \geq n_0$ ، $\delta + \epsilon > s_m$ ، و $\delta + \epsilon \geq s_m$.
 $\delta + \epsilon > s_m$ ولكل $n \leq n_0$ مما يعطي (أ).

الآن $\delta + \epsilon > s_m = \delta + \epsilon$ يعطي $m \leq \delta + \epsilon$ لكل $r \leq 1$. خذ $r = 1$. إذن $s_m \leq \delta + \epsilon$ s_n
 $\delta + \epsilon$ تتضمن انه يوجد $n_1 \leq 1$ بحيث أن $s_{n_1} < \delta - \epsilon$. و $\delta - \epsilon = 1 + n_1$. إذن يوجد
 $n_2 \leq 1 + n_1$ ، n_2 بحيث أن $s_{n_2} < \delta - \epsilon$ و $\delta - \epsilon = 1 + n_2$. نستمر بالاستقراء لنحصل
على $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ بحيث أن $s_{n_k} < \delta - \epsilon$ ولكل $r \in \mathbb{N}$ مما يثبت (ب).
وبالعكس، لنفرض أن δ تحقق (أ)، (ب). افرض في (ب) أن $s_n < \delta - \epsilon$ ولكل
 $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ إذن $n_r \leq \delta$ ولكل $r \in \mathbb{N}$. الآن من (أ) نحصل على
لك $\delta + \epsilon > s_m \geq s_r \geq \delta + \epsilon$
ومن (ب)،

$s_m = \delta + \epsilon$ $s_n \leq s_r \leq \delta + \epsilon$ و.
من هذا يتبع أن $\delta + \epsilon > s_m \geq \delta + \epsilon$ ، وهذا فقد اثبتنا أن $\delta + \epsilon > s_m$ ، وبما أن δ
كانت عشوائية، فيجب أن نحصل على $\delta + \epsilon = s_m$ $\delta + \epsilon = s_n$ مما يثبت (١).

المثال ٩.

لنفرض أن $s = (1, 0, 1, 0, 0, \dots)$. إذا كان $0 < \epsilon$ ، فإن $s_n > 1 + \epsilon$ و
لكل $n \leq 1$ ، $s_n < 1 - \epsilon$ ، و $1 = s_n$ ، 3 ، 5 ، \dots ، إذن من النظرية ٥ (١)
نحصل على $s_n = 1$. وينفس الأسلوب $s_n = 0$.

إذا كانت s ، v متاليتين حقيقتين، فأننا نعرف ان $\neg s$ = $\neg v$ + $\neg s$ = $\neg v$ + $\neg s$ ، اي ان الاقتراح q : $y \leftarrow R$ المعروف بق (س) = $\neg s$ يحافظ على الخاصية الجمعية، اي q (س + ص) = q (س) + q (ص). ماذا يحدث اذا استبدلنا $\neg s$ بـ $\neg v$ ؟ اذا كانت s ، v \exists y ، فان $\neg s$ = $\neg v$ وفي هذه الحالة يكون $\neg s$ الخاصية الجمعية. ولكن اذا اخذنا s ، v \exists ∞ ، فانه يكون $\neg s$ خاصية تحت جمعية، اي q (س + ص) $\geq q$ (س) + q (ص)، حيث q (س) = $\neg s$ ، q : $\infty \leftarrow R$. وسوف نثبت هذا الآن:

النظرية ٦.

إذا كانت s ، v \exists ∞ ، فان $\neg s$ (س + ص) $\geq \neg s$ + $\neg v$ + $\neg s$ + $\neg v$.

البرهان.

نفرض ان $\exists N$ و $\infty \leq R$. اذن s + v \geq ص ح ع س + ص ح ع ص، لهذا فان ص ح ع $\leq R$ (س + ص) \geq ص ح ع $\leq R$ س + ص ح ع ص. ان جميع الحدود في هذه المتباينة محصورة من اسفل باعتبارها اقترانات في R . لهذا اذا جعلنا $R \leftarrow \infty$ في طرفي المتباينة، نحصل على النتيجة المطلوبة. والمثال $s = (1, 0, 0, \dots)$ و $v = (0, 1, 0, \dots)$ يوضح ان المتباينة الفعلية قد تحدث.

تمارين ٤ - ٢

(تمجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

- ١ - بين صنف المتتالية $(n^2 + (1-n)^n)$ ، اوجد النهايتين العليا والسفلى.
- ٢ - اعط امثلة لمتتاليات (س)، بحيث ان $\{ \neg s, \neg v \}$ هي (أ) $\{ \infty, \infty \}$

(ب) $\{ \infty, 1 \}$ (حـ) $\{ 2, 1 \}$ ، (د) $\{ 1, 1 \}$ ، (هـ) $\{ \infty, \infty \}$ ، (و) $\{ \infty - \}$ ، ١ ، (ز) $\{ \infty - \}$.

٣- لأي متتالية (s_n) ، أثبت ان $\bar{n} s_n \geq \bar{n} s_n$ ، باستخدام التعريف (٥) حيث الضرورة. أثبت كذلك ان $\bar{n} s_n = \bar{n} s_n$ لكل $a < 0$.

٤- اذا كان $s_n \geq s_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فاثبت ان $\bar{n} s_n \geq \bar{n} s_n$ وكذلك $\bar{n} s_n \geq \bar{n} s_n$.

٥- اذا كانت $\bar{n} s_n = \bar{n} s_n = a \neq 0$ ، فاثبت ان (s_n) تقاربية ونها $s_n = a$.

وبالعكس اذا كانت (s_n) تقاربية وكانت نها $s_n = a$ ، فاثبت ان $\bar{n} s_n = \bar{n} s_n = a$.

٦- اذا كانت $s_n \leq 0$ ، $\exists l \in \mathbb{R}$ ، فاثبت ان $\bar{n} s_n \leq \bar{n} s_n + \bar{n} s_n$ ، اي ان نها لها خاصية فوق جمعية على \mathbb{R} . أثبت كذلك ان كـ حـ دـ $\bar{n} s_n \geq \bar{n} s_n$.

$s_n \geq s_n$ حـ عـ دـ .

٧- لنفرض ان $s_n \geq 0$ و $s_n \geq 0$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$. اثبت ان $\bar{n} s_n \geq \bar{n} s_n$ (سـ صـ نـ) $\geq (\bar{n} s_n)$ ، وأعط مثالا حيث تصبح العلاقة $>$ فقط في المتباينة.

٨- اذا كان $a_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. افرض ان $\bar{n} s_n = \frac{1+a_n}{1}$.

استخدم النظرية ٥ لاثبات ان $a_n \leftarrow 0$ ، سوف نحتاج لاستخدام رـ ١٠ لكل $r > 0$.

هل تستطيع القول ان $a_n \leftarrow 0$ عندما تكون $\bar{n} s_n = 1$ ؟

٩- هل العبارة التالية صحيحة ام خطأ؟ اذا كان $|s_n| < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت

$$\bar{n} s_n = \frac{1+s_n}{s_n} > 1 \text{ فان } (s_n) \text{ تقاربية.}$$

النظرية ٧.

إذا كانت $(ع_n)$ متتالية تقاربية، فإن كل متتالية جزئية منها تكون تقاربية، ونهايتها هي نهاية $(ع_n)$.

البرهان.

لنفرض ان $ع_n \leftarrow A$ ($n \rightarrow \infty$). اذن لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث ان $|ع_n - A| < \epsilon$ لكل $n \geq N$. افترض ان $(ع_{n_k})$ متتالية جزئية من $(ع_n)$. اذا كان $ع_{n_k} \rightarrow R$ فان $ع_{n_k} \rightarrow R$ ، لهذا فان $|ع_{n_k} - A| < \epsilon$ لكل $ك$ مما يعطي $ع_n \leftarrow A$ ($n \rightarrow \infty$)

المثال ١١.

لنفرض ان $1 < س_n = أ_n^{\frac{1}{n}}$. بيا ان $أ_n > 1 + س_n$ ، فالتنا نحصل على $س_n > س_{n+1}$.

كذلك $س_n < 1$ ، اذن $(س_n)$ تقاربية. لنقل $س_n \leftarrow ح$ $1 \leq ح$. الآن $س_1 = 1$ ، لهذا فان $س_n = س_1$ ومن نظرية ٧، $س_n \leftarrow ح$ ، باستخدام قوانين النهايات $س_n^2 \leftarrow ح^2$. لهذا فان $س_n^2 = س_n$ تعطي $ح^2 = ح$. اذن $ح = 1$ أو $ح = 0$. لكن $ح = 0$ مرفوض لان $ح \geq 1$. اذن $أ_n^{\frac{1}{n}} \leftarrow 1$.

والنظرية التالية تستخدم كثيرا في التحليل. وتسمى احيانا نظرية بولزانو وفابير شتراس.

لكننا سنعطي هذا الاسم للنظرية التي تتبعها.

النظرية ٨

كل متتالية محصورة (حقيقية أو مركبة) لها متتالية جزئية تقاربية.

البرهان.

سوف نعالج اولا المتتاليات الحقيقية. لنفرض ان $(س_n)$ $ل \leq (س_n) \leq R$ ، اذن نهايتها

النظرية ٩ [يلزانو وفايرشتراس].

يوجد لكل مجموعة محصورة غير منتهية في \mathbb{C} (أو \mathbb{R}) نقطة تراكم واحدة على الأقل.

البرهان .

لنفرض ان $S \subset \mathbb{C}$ مجموعة محصورة وغير منتهية . اختر متتالية (z_n) من نقاط مختلفة في S . فتكون (z_n) متتالية محصورة . لهذا ، ومن النظرية ٨ ، فانه يوجد متتالية جزئية تقاربية ، لنقل $z_n \rightarrow a$. وهذا العدد ، اعني a ، هو نقطة تجمع لـ S . ولانبات ذلك لنفرض ان S مجموعة مفتوحة ، $a \in S$. اذن يوجد قرص $D(a, r)$ ، نق) $a \in S$ ، وبما ان $z_n \rightarrow a$ فاننا نحصل على $z_n \in D(a, r)$ ، نق) لكل $r > 0$. وبما ان نقاط z_n مختلفة فان هذا يثبت ان a هي نقطة تراكم لـ S ، مما يثبت النتيجة .

والفكرة التالية ترتبط بالنتيجة السابقة .

نقطة النهاية للمتتالية . لنفرض ان (z_n) متتالية . يدعى العدد $a \in \mathbb{C}$ نقطة نهاية للمتتالية (z_n) ، اذا وفقط اذا كنا لكل $\epsilon > 0$ ، نحصل على $|z_n - a| < \epsilon$ لعديد لا نهائي من n .

المثال ١٢ .

(ت) $= (t, -1, -t, 1, \dots)$ لها نقاط نهاية $t, -1, -t, 1, \dots$.
 سبيل المثال $|t + n| > 0 = |t| \in \mathbb{C}$ لـ $n = 1, 2, 3, \dots$. لاحظ انه لا يوجد نقط تجمع للمجموعة $\{t, -1, -t, 1, \dots\}$.
 ويجب على القاري ان يميز بين نهاية المتتالية التقاربية وبين نقط النهاية للمتتالية .
 وهناك علاقة واضحة بين الفكرتين .

النظرية ١٠ .

إذا كانت $\epsilon < 0$ ، فإن A تكون نقطة النهاية الوحيدة للمتتالية (ϵ_n)

البرهان .

لكل $\epsilon < 0$ يوجد n_0 بحيث ان $| \epsilon_n - A | < \epsilon$ لكل $n \geq n_0$. لهذا فان $| \epsilon_n - A | < \epsilon$ ، لعدد لا نهائي من n .

وإذا كانت B نقطة نهاية أخرى، للمتتالية (ϵ_n) ، فان $| \epsilon_n - B | < \epsilon$ ، لعنصر n_1 ، $n \geq n_1$ ،

لـ n هذه نحصل على $| A - B | < \epsilon$ مما يعطي $A = B$. وهذا يثبت النظرية .

النظرية ١١ .

لأي متتالية حقيقية محصورة يوجد نقطة نهاية بين حاصريها .

البرهان .

بما ان $\{ \epsilon_n \}$ مـ \geq سـ $n \geq$ مـ صـ ϵ_n ، لكل $n \in N$ ، فانه يوجد $A = \inf \{ \epsilon_n \}$. $R \ni A$. اذن $A = \inf \{ \epsilon_n \}$ ، كذلك $M = \sup \{ \epsilon_n \}$. فمن برهان النظرية ٨ ، نحصل على $| \epsilon_n - A | < \epsilon$ ولكل n كبير بقدر كاف . لهذا فان $| \epsilon_n - A | < \epsilon$ ، و ، لعدد لا نهائي من n . اذن A هي نقطة نهاية لـ (ϵ_n) ، مما يثبت النظرية .

تمارين ٤ - ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ - اعط مثالين لمتاليتين غير محصورتين، س، ص، بحيث انه يوجد لـ ص متتالية جزئية تقاربية، ولا يوجد لـ ص متتالية جزئية تقاربية.

٢ - اذا كانت لكل متتالية جزئية من $(ع_n)$ ، متتالية جزئية صفرية، فاثبت ان $(ع_n)$ متتالية صفرية.

٣ - اثبت ان لكل متتالية غير محصورة، $(ع_n)$ ، يوجد متتالية جزئية $(ع_n)$ ، بحيث ان $اع_nرا \leftarrow \infty$ ، $(ر \leftarrow \infty)$. قارن مع النظرية ٨.

٤ - اذا كانت أ نقطة نهاية للمتتالية $(ع_n)$ ، فاثبت انه يوجد متتالية جزئية $(ع_n)$ ، بحيث ان $ع_nرا \leftarrow أ$.

٥ - ضع بطريقة القطر عناصر Q^+ في متتالية اعدادها مختلفة $(١، \frac{1}{٢}، ٢، \frac{1}{٣}، ٣، \dots)$. ثم افعل نفس الشيء بالنسبة لـ Q بادخال الصفر والاعداد السالبة. $س = (٠، ١،$

$١-، \frac{1}{٢}، -\frac{1}{٢}، ٢، -٢، \frac{1}{٣}، -\frac{1}{٣}، \dots)$. اثبت ان كل عدد حقيقي هو نقطة نهاية لـ $س = (س_n)$.

٦ - جد كل نقط النهاية للمتتاليات (أ) $(\frac{1}{n})$ ، (ب) $(٢ + (-١)^n)$ ، (ج) (٢^n)

٧ - اثبت انه يوجد لكل متتالية محصورة من الاعداد المركبة، نقطة نهاية.

٤. متتاليات خاصة

سوف نجمع هنا بعض المتتاليات التقاربية المفيدة. وليس من الممكن (الا في حالات

بسيطة جدا) إيجاد نهايات هذه المتتاليات باستخدام القوانين المعتادة (بند ١). وسلوك هذه المتتاليات غير واضح لانه في العادة توجد قوتان واحدة تجعل المتتالية كبيرة، والاخرى تجعلها صغيرة. فيجب العمل بحذر لمعرفة اي منها سوف تتغلب في النهاية.

والرموز \circ ، ∞ ، ∞^+ ، هي لأرقام ثابتة لا تعتمد على N ، وتنتمي الى المجموعات التي ترد فيها. وهنا اعطينا جميع النهايات عندما $N \rightarrow \infty$.

$$1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$2 - n^2 \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$$

$$3 - \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$$

$$4 - \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$$

$$5 - \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^4} \rightarrow 0$$

$$6 - (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e = 2.7182818 \dots$$

لأثبت ١، نفرض ان $\epsilon > 0$ ونختار $n > \frac{1}{\epsilon}$. اذن $n \leq \frac{1}{\epsilon}$ تعطي $n <$

$$\frac{1}{\epsilon} \text{ لهذا فان } 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \text{ لكل } n \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

لأثبت ٢، لنفرض ان $s_n = \frac{1}{n}$ ، نريد ان نثبت ان $s_n \rightarrow 0$. اذا كانت $s_n \geq 0$ فان $s_n \geq 0$ ، اذا كانت $s_n < 0$ اختر N بحيث ان $s_n < 0$ اذن $s_n \geq 0$ ، لهذا، وفي جميع الحالات، $s_n \geq 0$ من قانون الشطيرة فانه يكفي ان نثبت ان $s_n \rightarrow 0$ وهذا بدسيي اذا كانت $s_n = 0$ ، لهذا

افرض ان $0 < |ع| < 1$. اذن $|ع| = \frac{1}{ص+1}$ حيث $ص < 0$. باستخدام نظرية ذات

الحدين لكل $ن < ر + 1$ ، $(1 + ص)^ن = 1 + (1 + ص) + \dots + (1 + ص)^{ن-1} + \dots + (1 + ص)^{ر-1} + \dots + 1$

$$ص^ن < \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}} = \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}} = \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}}$$

$$\text{اذن } |ع|^ن > \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}} = \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}}$$

$$ح^ن = \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}} = \frac{1}{ص} \frac{1}{(1+ص)^{ن-1}}$$

لهذا فان $\frac{ح}{ن} \leftarrow 0$. ومنه $|ع|^ن \leftarrow 0$. مما يثبت ٢ .

للايات ٣ ، نختار N بحيث ان $|ع|^N < \frac{1}{ن}$. نعطى $\frac{1}{ن} > \frac{1}{ن}$

$$\frac{1}{ن} \leftarrow 0$$

اذا كان $أ = 1$ فان ٤ تصبح واضحة . واذا كان $أ < 1$ ، فان $أ^{\frac{1}{ن}} = 1 + د$ حيث $د < 0$. ومن

متباينة برنولي $(1 + د)^ن \leq 1 + ن د$. لهذا فان $د > \frac{1 - أ}{ن} \leftarrow 0$. لهذا فان $د =$

$أ^{\frac{1}{ن}} - 1 \leftarrow 0$. واذا كانت $أ > 1$ فان $ب = \frac{1}{أ} < 1$ ومنه $ب^{\frac{1}{ن}} \leftarrow 1$. ولكن $أ^{\frac{1}{ن}} =$

$$\frac{1}{ب^{\frac{1}{ن}}} \leftarrow \frac{1}{1} = 1 \text{ مما يثبت ٤ .}$$

وللايات ٥ ، سنعالجها بطريقة مشابهة لـ ٤ ، وسكتب $ن^{\frac{1}{ن}} = 1 + د$ ، ونستخدم نظرية

ذات الحدين لنحصل على:

$$n = (n+1) \cdot \frac{n}{2} < \frac{n(1-n)}{2} \text{ لكل } n < 1.$$

$$\text{من هذا يتبع ان } 0 < d_{n+1} < \sqrt[n]{2} \leftarrow 0 \text{ مما يثبت ٥.}$$

بالنسبة لـ ٦ فسوف نثبت فقط ان المتتالية $s = (s_n)$ حيث $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ هي

متتالية متزايدة فعلا، ومحصورة من اعلى بـ ٣. اذن s_n تقاربية، سوف نرمز لـ s بالحرف e . وافضل طريقة لحساب قيمة e هي استخدام المتسلسلات (انظر الفصل ٩، البند ١). وسوف نبين فيما بعد ان e هي اساس اللوغاريتم الطبيعي.

باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على

$$s_n = 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \frac{n!}{(n-r)!} + 1$$

$$= 1 + \frac{1}{r!} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} + 1 = \left(\frac{1-n}{1} - 1\right) \dots \left(\frac{2-n}{1} - 1\right) \left(\frac{1-n}{1} - 1\right) \frac{1}{r!} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} + 1$$

$$> \left(\frac{1-n}{1+n} - 1\right) \dots \left(\frac{1-n}{1+n} - 1\right) \frac{1}{r!} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} + 1 >$$

$$> s_{n+1}$$

كذلك،

$$s_n > 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \dots$$

$$\frac{1}{n \times \dots \times 3 \times 2}$$

$$> 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \dots + \frac{1}{1 \times \dots \times 1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \dots$$

$$\text{الآن } (1 - \epsilon) < 1 - \epsilon = (1 + \epsilon + \dots + \epsilon^{n-1}) \cdot (1 - \epsilon) < 1 \text{ اذا كان } \epsilon < 1. \text{ باخذ } \epsilon =$$

$$\frac{1}{4} \text{ نحصل على } s_n > 3.$$

تمارين ٤ - ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

عين سلوك المتتاليات المعطى حددا التوحي اذناه عندما $n \rightarrow \infty$.

(أ) $\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n}$ ، حيث $n \in \mathbb{R}^+$

(ب) $\sqrt[n]{n!}$

(ج) $\sqrt[n]{\frac{3n}{n+1}}$

(د) $\frac{1}{(n+1)/n}$

(هـ) $(\frac{1}{n} - 1)^n$

(و) $n^{1-n} (1+n)^n$

(ز) $(n+1)^{-n}$

(ح) $\frac{1+n}{n^5} + \dots + \frac{1+n}{n^2} + \frac{1+n}{n} + \frac{1}{n}$

(ط) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(ي) $n(1-2^{-n})$.

٥. العلاقات التكرارية

لقد درسنا العديد من المتتاليات المعرفة بعلاقات تكرارية. فقد اثبتنا في النظرية ١٠، في

الفصل الثاني، ان المتتالية (s_n) المعرفة بـ

$$(s_n) \quad \dots \dots \dots 1 = s_1, \quad \frac{s_n + 2}{s_n + 1} = s_{n+1} \quad (V)$$

اقتارنا معروفا على فضاء جميع المتتاليات الى نفسه فالعلاقات التكرارية هنا يمكن كتابتها بالصيغة:

(۱۲) (ق - أ) س = ب

على ان تعني (ق - أ)س = ق(س) - أس = (س_{ن+١} - أس_ن)، وب هو عبارة عن المتتالية الثابتة ب = (ب ، ب ، ب ، ...)، بسبب طبيعة ق الخطية، فان العلاقة التكرارية (١٢) تسمى أحيانا علاقة تكرارية خطية أو معادلة فروق خطية.

سوف نحل $s_{n+1} = A s_n + b$ مباشرة، ثم نين ان (١٢) تعطي طريقة سريعة للحل.

فياخذون = ١ ، ٢ ، ... ، نجد ان $s_7 = s_6 + 1$ ، $s_8 = s_7 + 1$ ، $s_9 = s_8 + 1$ ، وبشكل عام (بالاستقراء) ،
 $s_n = s_{n-1} + 1$ ، $s_{n+1} = s_n + 1$ ، $s_{n+2} = s_{n+1} + 1$ ،

فإذا كان $A = 1$ ، فإن $s_n = s_1 + (n-1)$ ب لكل $n \leq 1$. وإذا كان $A \neq 1$ ، فإنه بالإمكان كتابة s_n بصورة أفضل باستخدام الصيغة

هذا اذا كانت $a \neq 1$ فان $\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + \dots + a + 1$

$$(۱۳) \quad \dots\dots\dots \frac{b}{1-1} + 1^{-\infty} \left(\frac{b}{1-1} - 1s \right) = 1s_n$$

من (۱۳) نری ان (س ن) \Rightarrow تق اذا كان س $\frac{ب}{۱-۱}$ لاي $۱ \neq ۱$. ولكن اذا كان س $۱ \neq ۱$ *

$\bullet = \cup$

ق^٢ (س) - ٥ق (س) + ٦س = ٠ ، أو (ق - ٢)(ق - ٣) س = ٠ ، اذا حللنا ق^٢ - ٥ق + ٦ ، الى (ق - ٢)(ق - ٣) ، لان من الواضح ان الحدين ٢^٣ ، ٣^٣ في الحل (١٥) جاءا من جذري المعادلة (ق - ٢)(ق - ٣) = ٠ ، وهما ٢ ، ٣ .
والمثال التالي يوضح هذه الطريقة .

المثال ١٥ .

عرف س_١ = ٢ ، س_٢ = ١ ، س_٣ = ٠ ، حيث س_١ ، س_٢ ، س_٣ اعداد مركبة ثابتة . ان ق (س) = (س_١ + س_٢) تعطي ان المعادلة هي على صورة (ق^٣ - ٢ق^٢ - ق + ٢) س = (ق - ١)(ق + ١)(ق - ٢) س = ٠

والجذور هي ١ ، -١ ، ٢ . لهذا فان الحل يكون على صورة

$$س = ٠ + ب(١ - ٢) + ح٢ \dots \dots \dots (١٦)$$

حيث يمكن تعيين قيم أ ، ب ، ح من حل المعادلة (١٦) لـ ١ ، ٢ ، ٣ ونحصل على أ ، ب ، ح بدلالة س_١ ، س_٢ ، س_٣ .

وبشكل عام ، فانه يمكن ان تكون الحدود اعدادا مركبة ، فعلى سبيل المثال ق^٢ + ١ = (ق + ت)(ق - ت) .

كذلك يمكن ان تتكرر . على سبيل المثال ق^٢ - ٤ق + ٤ = (ق - ٢)(ق - ٢) التي تظهر في س_١ + ٢ = ٤س_١ - ١ + س_٢ حيث س_١ ، س_٢ معطاة . فبتعديل بسيط على طريقة المثال ١٤ ، يبين ان حل المعادلة الاخيرة هوس_١ = (أ + ب) ٢ حيث تعيين قيم أ ، ب بدلالة س_١ ، س_٢ .

والمثال التالي يبين طريقة هامة في الطرق العددية .

المثال ١٦ .

لنأخذ المعادلة ق (س) = س^٣ - ٥س + ٣ = ٠ حيث س ∈ R . فيها ان ق (٠)

< 0 ، ق (١) > 0 ، فانه يوجد جذرين 0 و 1 . وبرهان هذه الحقيقة يعتمد على نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة (الفصل ٦ ، البند ٣) .

هذا الجذر وحيد لانه اذا كان $0 > \beta > \alpha > 1$ ، فان

$$- \text{ق (ب)} = (\alpha - \beta) (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 5) > 0$$

لهذا فان ق (ب) < 0 . كذلك ق (ب) > 0 اذا كان $\alpha > \beta > 1$.

لنكتب المعادلة على صورة $\text{س} = \frac{\text{س}^2 + 3}{\text{س}}$ ، ونأخذ العلاقة التكرارية $\text{س}_{n+1} =$

$\frac{\text{س}_n^2 + 3}{\text{س}_n}$ ، ونبدأ بالتقريب الاول $\text{س}_1 = 0$. اذا عرفنا ان (س_ن) تقاربية ، س_ن \rightarrow حـ

مثلا ، فان حـ $= \frac{\text{حـ}^2 + 3}{\text{حـ}}$ لهذا فان ق (حـ) $= 0$. وبما ان $0 > \text{س}_n > 1$ لكل $n \geq N$

وق (١) < 0 ، ق (١) > 0 ، نحصل على $0 > \text{س}_n > 1$ ومنه حـ $= \alpha$ لان α وحيدة .

نثبت الآن ان (س_ن) تقاربية لكي نحصل على متتالية تقاربية من تقريبات للجذر .

فباستخدام $0 > \text{س}_n > 1$ ، نحصل على $|\text{س}_{n+1} - \text{س}_n| \geq \left| \frac{3}{\text{س}_n} - \text{س}_n \right|$ س_ن - ١
ومن $|\text{س}_{n+1} - \text{س}_n| \geq \left| \left(\frac{3}{\text{س}_n} \right) - \text{س}_n \right|$ س_ن - ١ ، وهذا يعني ان (س_ن) هي متتالية كوشية . اذن هي تقاربية .

لقد وجدنا التقريبات التالية باستخدام آلة حاسبة صغيرة مع ان الحساب باليد سهل .

وجدنا ان $\text{س}_7 = 0,625$ ، $\text{س}_8 = 0,645$ ، $\text{س}_9 = 0,6566$. فالتقارب ليس سريعا ولكن العمليات الحسابية سهلة و $0,6566$ صحيح لاربع منازل عشرية .

تمارين ٤ - ٥

(تمجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - حل علاقة فيبوناتشي $\text{س}_{n+2} = \text{س}_{n+1} + \text{س}_n$ ، س_١ = س_٢ = ١ ومنه جد قيمة

$$\frac{\text{س}_n}{\text{س}_{n+1}}$$

٢ - قسمت القطعة المستقيمة أ ب بالنقطة ب بحيث أن $\frac{أب}{بب} = \frac{أب}{بأ}$. جد القيمة الحسابية لـ $\frac{أب}{بب}$ وقارن مع نها $\frac{س_ن}{س_{ن+١}}$ في السؤال ١ .

٣ - حل العلاقات التكرارية التالية (أ) $س_{ن+١} = ٣س_ن + ٢ - س_{ن-١}$ ، $س_١ = ٢$ ، (ب) $س_{ن+١} = -س_ن$ ، $س_١ = ٢$ ، (ج) $س_{ن+١} = ٢س_ن + ١$ ، $س_١ = ٠$ ، (د) $س_{ن+١} = ٢س_ن$ ، $س_١ = ٠$.

٤ - العلاقة التكرارية $س_{ن+١} = \frac{س_ن + ١٠٠س_١}{٢}$ ، حيث $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ١٠٠$ ، تتكرر كثيراً

في مسائل رمي قطعة النقد ، في نظرية الاحتمالات . حل العلاقة وجد نها $س_ن$.

٥ - عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{س_ن + ١}$ ، $٠ < س_١$ ، $٠ < س_٢$. أثبت أن $س_ن$ تق وجد النهاية .

٦ - عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢} [س_ن + \frac{١}{س_ن}]$ حيث $٠ < س_١$ ، $٠ < س_٢$. أثبت أن $س_ن$

وتبرية متناقصة محصورة من أسفل . استنتج أن $س_ن \leftarrow \sqrt{١}$. استخدم العلاقة التكرارية لحساب $\sqrt[٣]{٣٧}$ مقرباً إلى عشرين عشريين .

٧ - عرف $س_{ن+١} = \sqrt[٣]{س_ن + ٤}$ ، حيث $س_١ = ١$. أثبت أن $س_ن$ تق وجد النهاية .

٨ - عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢} (س_ن + س_{ن+١})$ و $س_{ن+١} = \frac{٢س_ن}{س_١ + س_٢}$ حيث $س_١ + س_٢ > ٠$.

• لكل $ن \geq ١$ ، أثبت أن $س_ن < س_{ن+١}$. أثبت أن $س_١ \leq ٠$ فائت أن نها $س_ن = \sqrt[٣]{١٠٠س_١}$.

٩ - عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢} (س_ن + س_{ن+١})$ و $س_{ن+١} = \sqrt[٣]{س_١ + س_٢}$ ، $س_١ \leq ٠$ ، $س_٢ \leq ٠$. أثبت أن $س_ن$ ، $س_{ن+١}$ تتقاربان إلى نفس النهاية .

الفصل الخامس

التسلسلات

١. التقارب والتقارب المطلق

إذا اعطينا متتالية اعداد مركبة $A = (A_n) = (A_1, A_2, A_3, \dots)$ فانه بالامكان تكوين متتالية جديدة، $S = (S_n)$ ، من المجاميع: باضافة الحدود A_n على التتابع، اي ان $S_1 = A_1$ ، $S_2 = A_1 + A_2$ ، $S_3 = A_1 + A_2 + A_3$ ، $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. وهذا يمهد لفكرة المتسلسلة $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ وهي أحياناً تدعى متسلسلة لانهاية.

المتسلسلة: المتسلسلة هي زوج مرتب من المتتاليات (A, S) . حيث $A = (A_n)$ معطى، $S = (S_n)$ تعتمد على A ، ومعروفة بـ $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. ونسمي S_n المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (A, S) . وكذلك نكتب $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ بدلا من (A, S) ونحدث عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + \dots$.

المثال ١ .

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ هي المتسلسلة $((\frac{1}{r}))$ ، $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots)$. يجب ملاحظة أن $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ هو متغير يمكن استبداله بأي حرف آخر. لهذا فإن كلا من $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$ هو نفس المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$.
وأحيانا يكون من المفيد أن نبدأ المتسلسلة بعدد صحيح غير الواحد فمثلا،

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ ، $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$.
على أي حال سنعتبر أن $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ تعني $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ إلا إذا ذكر غير ذلك. ونؤكد هنا أن $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ ما هو إلا مجرد رمز ليعني الزوج المرتب (أ، س). ولا يعني ذلك وضع $r = \infty$ داخل إشارة المجموع \sum .

وبالنسبة لجمع عدد منته من الحدود فسوف نعرف

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (\text{إذا كان } n < \infty)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \quad (\text{إذا كان } n = \infty)$$

$$= 0 \quad (\text{إذا كان } n > \infty)$$

ومن الطبيعي أن نقول أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية تقاربية .
المتسلسلة التقاربية . نقول أن المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ (أ، س) هي متسلسلة تقاربية إذا وفقط إذا كانت $s \geq 0$. لهذا فإن $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ تقاربية تكافئ $s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \text{نهاية ما عندما } n \rightarrow \infty$. فإذا كانت $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ تقاربية وكانت $s = 0$ أفسوف نكتب $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 0$.
ونسمي أ مجموع المتسلسلة التقاربية $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$. ونعرف γ (جاما) كما يلي:
 $\gamma = \{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \mid s \geq 0 \} = \{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \mid \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \text{ تقاربية} \}$
ونسمي γ مجموعة جميع التسلسلات التقاربية . والمتسلسلة غير التقاربية تسمى تباعدية .

لقد كنا متساهلين في نقطتين. فقد استخدعنا $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ ليعني المتسلسلة ويعني مجموعها (عندما تكون تقاربية). ولن يحدث التباس في ذلك. ثم ان γ هي مجموعة متتاليات، وليست مجموعة متسلسلات (a ، s). ولن يحدث هنا التباس أيضا ولكن المهم التمييز بين γ و Σ . وسوف نبين ان γ مجموعة جزئية فعلية من Σ .
والأمثلة التالية تبين أهمية المجاميع الجزئية من Σ للمتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$.

المثال ٢ [المتسلسلة الهندسية].

$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ لكل $|x| < 1$ ، أي ان المتسلسلة تكون تقاربية عند $|x| < 1$ ويكون $\frac{1}{1-x}$ هو مجموعها. فإذا كانت $|x| \leq 1$ فان المتسلسلة تكون تباعدية. ولا معنى للحديث عن مجموعها.

ولأثبت ذلك نستخدم $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n$. اذن عندما $x \neq 1$ ، نحصل على

$$s_n = \sum_{r=0}^{n-1} x^r = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

إذا كانت $|x| < 1$ فان $x^n \rightarrow 0$ (خذ $\alpha = 0$ في المتتالية الخاصة ٢، الفصل الرابع). اذن

$$s_n \rightarrow \frac{1}{1-x} \text{ لهذا فان } \sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

وإذا كان $x = 1$ فان $s_n \rightarrow \infty$ ، لهذا فان $\sum_{r=0}^{\infty} 1^r$ تباعدية. ولجميع قيم x الأخرى يبدو واضحا ان $\sum_{r=0}^{\infty} x^r$ تباعدية.

المثال ٣ [المتسلسلة التوافقية].

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \text{ تباعدية. قد لا تكون هذه النتيجة واضحة لانه قد}$$

يظن القاريء انه بما ان الحدود تصبح صغيرة جدا فان ذلك يؤدي الى التقارب. ولكن في معركة التقارب فان صغر الاعداد يقابله كثرة عددها، وفي هذه الحالة تنتصر الكثرة.

وسوف نثبت هذه النتيجة بان نبين ان $s_n \leftarrow \infty$. لنفرض ان $\exists R$ نختار $m < 1/2$ ، ونأخذ $n < 2^{-m}$ ، اذن $s_n \leq s_m$ و

$$s_n = (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^m})$$

$$\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}$$

اذن $s_n < 1$ لكل $n \leq m$ ، لهذا ومن التعريفات في الفصل الثاني، البندين (3، 4) نحصل على $s_n \leftarrow \infty$.

المثال 4 [المتسلسلة التلسكوبية].

المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} (b_r - b_{r+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$ تكون تقاربية اذا فقط اذا كانت (b_r) تق. وينتج هذا مباشرة من الحقيقة القائلة ان $\sum_{r=1}^n (b_r - b_{r+1}) = b_1 - b_{n+1}$. لهذا، ويحذف الحدود، فان المجاميع الجزئية تشبه التلسكوب في طريقة اغلاقه.

المثال 5.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots = 1$$

لأن $b_r = \frac{1}{r}$ تعطي $b_r - b_{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$

لذا فان المتسلسلة تلسكوبية و $\sum_{r=1}^n (b_r - b_{r+1}) = b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$1 = 0$

المثال ٦ .

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ تقاربية ، مجموعها $\frac{\pi}{6}$ ، ولكن ليس من السهل اثبات ذلك . لا تبدو هذه المتسلسلة مختلفة كثيرا عن المتسلسلة التوافقية التباعدية (المثال ٣) .

ولكن زيادة الصغر الناتجة عن تربيع $\frac{1}{r}$ كانت كافية لانتاج التقارب . ولايثبات التقارب نرى ان

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} + 1 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r} \geq 2 > \frac{1}{(1-r)^2}$$

وذلك من نتيجة المثال ٥ . الآن من $n+1$ - من $n = \frac{1}{(1+n)^2} < 0$. اذن (س_ن) هي متتالية

وتيرة متزايدة ومحصورة من اعلى بـ ٢ ، اذن (س_ن) \Rightarrow تق حسب النظرية ٣ ، في الفصل ٣ ، البند ١* .

المثال ٧ .

$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ تباعدية لان (س_ن) = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، ...) ، . . . تباعدية .

المثال ٨ .

هذا المثال يوضح استخدام الاقواس في المتسلسلات . لنفرض ان $\sum_{r=1}^{\infty} a_r = 1 + \frac{1}{2} + \dots$

* ينتج من هذه النظرية مبدأ أكثر شمولاً هو انه اذا كان (ب_ر) متتالية حقيقية فيها ب_ر ≤ ٠ لكل ر ∈ N ، وكانت ايضاً (س_ن) محصورة من اعلى ، تكون $\sum_{r=1}^{\infty} b_r$ تقاربية .

... وس = (س_١ ، س_٢ ، ...). فالتسلسلة (أ_١ + أ_٢) + (أ_٣ + أ_٤) + ... تعني التسلسلة التي متتالية مجاميعها الجزئية هي (س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ...). لاحظ ان المتتالية الاخيرة هي متتالية جزئية من س. كذلك التسلسلة (أ_١ + أ_٢ + أ_٣) + (أ_٤ + أ_٥ + أ_٦ + أ_٧) + ... متتالية مجاميعها الجزئية هي (س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، س_٤ ، س_٥ ، س_٦ ، ...). لهذا فان (١ - ١) + (١ - ١) + (١ - ١) + ... هي تقاربية مجموعها صفر. قارنها بالمثال ٧. لكن (١ - ١) + ١ - (١ + ١ - ١) + ١ - (١ + ١ - ١) + ... هي تباعدية.

يتضح ان ادخال اقواس في متسلسلة تقاربية يولد متسلسلة تقاربية جديدة لها نفس المجموع، لان متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التي بها الاقواس هي متتالية جزئية من س. ولكن حذف الاقواس في متسلسلة تقاربية يمكن ان يولد متسلسلة تباعدية، كما رأينا في (١ - ١) + (١ - ١) + ...

المثال ٩.

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots = 0 \quad \text{لأن س} \\ = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots) \ni \text{تق.}$$

فأول نظرية نناقشها حول التسلسلات تعكس خاصية التهام في \mathbb{N} وتعطي شرطا كافيا وضروريا لأن تكون التسلسلة تقاربية.

النظرية ١ [القاعدة العامة لتقارب التسلسلة].

تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تقاربية اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $N = N(\epsilon)$ بحيث ان $\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right| < \epsilon$ لكل $N \geq N$ ولكل $m \geq 0$.

البرهان .

لنفرض ان $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ اذن $\sum a_r$ تقاربية اذا فقط اذا كان s_n تق. ولكن نق = ك. (من النظرية ١ في الفصل الثاني). لهذا نحصل على النتيجة المطلوبة لان $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m} = s_{n+m} - s_n$.

نتيجة .

اذا كانت $\sum a_r$ تقاربية فانه لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث ان $\left| \sum_{r=N}^{\infty} a_r \right| < \epsilon$ لكل $n \leq N$.

البرهان .

المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ هي متسلسلة تقاربية لكل $n \in \mathbb{N}$. لان مجاميعها الجزئية $s_n - s_{n-1}$ ، $s_{n-1} - s_{n-2}$ ، ... ، ومن النظرية ١ يوجد N ($\frac{\epsilon}{4}$) بحيث ان $\left| \sum_{r=N}^{\infty} a_r \right| < \frac{\epsilon}{4}$ لكل $n \leq N$. ولكل $m \leq \infty$ ،
(١) وبما ان $\sum_{r=1}^m a_r = s_m$ ، يمكننا اخذ النهايات في (١) عندما $m \rightarrow \infty$ ونحصل على $|a_n + a_{n+1} + \dots| \leq \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$ مما يثبت النتيجة .
وهناك طريقة اخرى لصياغة النتيجة هي القول ان $\sum a_r$ تقاربية تتضمن $\sum_{r=1}^{\infty} a_r < \infty$.
($n \rightarrow \infty$) .
وهناك تعريفان هامان .

المتسلسلة ذات التقارب المطلق : نقول ان المتسلسلة $\sum a_r$ ذات تقارب مطلق اذا فقط اذا

كانت $\sum |a_r|$ تقاربية . ونعرف $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| = L$.

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \geq |\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \geq \epsilon$$

لهذا، وباستخدام النظرية ١ ثانية، نرى أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ تقاربية أي } \exists \epsilon \text{ ما يثبت أن } l' \supset \epsilon.$$

لنفرض الآن أن $\exists \epsilon$. باخذ $\epsilon = 0$ في النظرية ١ نحصل على $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| > \epsilon$ لكل $n \leq \infty$ ، إذن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$ ، أي أن \exists تق. أي أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0$. واليك طريقة أخرى لبرهنة ذلك. نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لكل $n < \infty$ ومنه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leftarrow \dots$

لقد تم برهنة الاحتمالين تق. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تق. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سابقا، وقد جئنا بها هنا لاكمال الصورة.

ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$ المذكورة في المثال ٩، تقاربية.

ولكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ هي تباعدية، كما في المثال ٣. إذن فالاحتمال $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

فعلي. كذلك $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ تق. ولكن $(\frac{1}{n})$ $\nrightarrow 0$ ، كما في المثال ٣، لهذا فان الاحتمال $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تق. هو ايضا فعلي. ولقد عرفنا في السابق ان الاحتمالات الاخرى فعلية. وهذا يثبت النظرية.

المثال ١٠.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}) \text{ ذات تقارب مطلق، فهي إذن تقاربية. لان } |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ تقاربية، من المثال ٢، باخذ } \epsilon = \frac{1}{n}.$$

المثال ١١.

المتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$ ذات تقارب مشروط، من المثالين

٣ ، ٩ . والمتسلسلة $\sum_{r=1}^{(1-)} \frac{1}{r}$ ليست ذات تقارب مشروط ، من المثال ٦ . والمتسلسلة التوافقية $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ ليست ذات تقارب مشروط .

ومن الاسباب الرئيسية في اهمية التقارب المطلق هو انه كثير ا ما يكون التعامل مع المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ من الحدود غير السالبة اسهل من التعامل مع المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$. فاذا استطعنا اثبات ان $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$ تقاربية ، فاننا نستنتج ان $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ تقاربية ، من النظرية ٢ . ولكن اذا كانت $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$ تباعدية فلا نستطيع استنتاج ان $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ تباعدية (انظر المثال ١١) وفي هذه الحالة علينا دراسة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ بدقة اكثر لمعرفة سلوكها .

لقد لاحظنا في الفصل الرابع ، البند ١ ، ان L^{∞} هي فضاء خطي مركب وان C_0 و C هي فضاءات خطية جزئية من L^{∞} . والنظرية التالية تبين ان L^1 ، ℓ^1 هي فضاءات خطية من C_0 واذن من L^{∞} . وكالعادة نعرف $A+B = (A+B)$ ، $\alpha A = (\alpha A)$ لكل $A \in C_0$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

النظرية ٣ .

٢ ول 1 هما فضاءان خطيان وجزئيان من الفضاء الخطي المركب C_0 ، الذي يتكون من جميع المتتاليات الصفرية . كذلك اذا كان $A \in C_0$ ، $B \in C_0$ و $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| < \infty$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} |b_r| < \infty$ ب يرمزان لمجموع المتسلسلة فان

$$\sum_{r=1}^{\infty} (a_r + b_r) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r + \sum_{r=1}^{\infty} b_r \quad (٢)$$

كل $A \in C_0$ ، $B \in C_0$.

البرهان .

لأثبت ان ℓ^1 هي فضاء جزئي من C_0 علينا اثبات ان $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| < \infty$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} |b_r| < \infty$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r + b_r| < \infty$. الآن اذا كان $A \in \ell^1$ ، $B \in \ell^1$ فان $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| < \infty$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} |b_r| < \infty$ ، $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r + b_r| < \infty$.

ح. ولكن $\overline{A} = (ح + د) \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} \cdot ح + د$ ، من النظرية ٣ ، الفصل الرابع ، البند ١ . اذن $ح + د \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} \cdot ح + د$ ، وبذا نتحقق (٢) .

الآن لنفرض ان $أ ، ب \in L$ واحد ، $د \in \mathcal{C}$. اذن $\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A} \vee \overline{B} \cdot د + د \cdot \overline{A} \vee \overline{B}$.
تقاربتان . فاذا وزنا للمجموعين $\overline{A} \vee \overline{B}$ ، $\overline{A} \vee \overline{B} \cdot د + د \cdot \overline{A} \vee \overline{B}$ يكون
س. $\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A} \vee \overline{B} \cdot د + د \cdot \overline{A} \vee \overline{B} \geq \overline{A} \vee \overline{B} \cdot د + د \cdot \overline{A} \vee \overline{B} \geq \overline{A} \vee \overline{B}$.

اذن (س) هي متسالية وتيرية متزايدة محصورة من اعلى ، اذن يجب ان تكون تقاربية . ولهذا فان $\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A} \vee \overline{B} \cdot د + د \cdot \overline{A} \vee \overline{B}$ اي ان $ح + د \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} \cdot ح + د$ مما يثبت ان L هو فضاء جزئي من \mathcal{C} . وهذا يثبت النظرية .

والطالب يعرف بالطبع طريقة كتابة الاعداد الحقيقية على الصورة العشرية . مثل $\frac{1}{7} = ٠,١٤٢٨٥٧١٤٢٨٥٧ \dots$ ، وكذلك $\sqrt{2} = ١,٤١٤٠٠ \dots$ وبصورة عامة فان الاعداد النسبية نكتب على صورة عشرية غير منتهية ، اي انها لا تنتهي باصفار . والعدد الذي يكتب على صورة عشرية غير منتهية هو في الحقيقة حالة خاصة من المتسلسلات ، وفي النظرية التالية نثبت انه يمكن كتابة كل عدد حقيقي بصورة عشرية . والصورة العشرية للارقام النسبية هي عبارة عن وحدات من الارقام مكررة عددا لا نهائيا من المرات ، فمثلا $\frac{1}{4} = ٠,٢٥٠ \dots$ ، $\frac{1}{7} = ٠,١٤٢٨٥٧ \dots$ حيث الخط تحت الارقام يعني ان تلك الارقام مكررة عددا لا نهائيا من المرات . نسمي هذه الصورة صورة دورية .

النظرية ٤ [الكسور العشرية]

لكل $R \in \mathcal{C}$ صورة عشرية على شكل متسلسلة غير منتهية

$$س = أ. + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \dots + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

حيث $a_n \exists Z$ لكل $n \leq 0$ و $a_n \geq 1$ لكل $n \leq 1$.
 وبالعكس فإن كل متسلسلة من النوع a_1, a_2, a_3, \dots ، حيث $a_n \geq 1$ لكل $n \leq 1$ تعرف عدداً حقيقياً.
 وتكون الصورة العشرية لـ s غير دورية (غير مكررة) إذا وفقط إذا كان s عدداً غير نسبي.

البرهان.

افرض ان $a_1 = [s]$ أكبر عدد صحيح في s . لهذا فان $a_1 \exists Z$ و $s - a_1 > 0$.
 $s = a_1 + (s - a_1)$ لنكتب $s = a_1 + f_1$ لهذا فان

$$s = a_1 + f_1 = a_1 + \frac{1}{10^{a_1}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1-1}} + f_{a_1} \text{ حيث } f_{a_1} > 0.$$

لهذا فان $a_2 \geq 10^{a_1} f_{a_1}$. لنكتب $a_2 = [10^{a_1} f_{a_1}]$ اذن $a_2 \geq 10^{a_1} f_{a_1}$. اذن

$$10^{a_1} f_{a_1} = a_2 + f_{a_2} = a_2 + \frac{1}{10^{a_2}} + \dots + \frac{1}{10^{a_2-1}} + f_{a_2+a_1} \text{ حيث } f_{a_2+a_1} > 0.$$

$$s = a_1 + \frac{1}{10^{a_1}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1-1}} + \frac{1}{10^{a_1+a_2}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1+a_2-1}} + f_{a_1+a_2+a_1}$$

نستمر بالاستقراء لنحصل على

$$s = a_1 + \frac{1}{10^{a_1}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1+a_2-1}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1+a_2+a_3-1}} + \dots$$

وبما ان $a_n \leftarrow \infty$ (ن $\leftarrow \infty$) فاننا نحصل على الصورة العشرية لـ s باخذ النهاية عندما $n \leftarrow \infty$.

وبالعكس لتأخذ متتالية من النوع a_1, a_2, a_3, \dots حيث $a_n \geq 1$ لكل $n \leq 1$ لكل

$$n \leq 1. \text{ بما ان } \frac{1}{10^{a_1}} + \frac{1}{10^{a_2}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1+a_2-1}} + \dots + \frac{1}{10^{a_1+a_2+a_3-1}} + \dots$$

... هي ايضا تقاربية . ومن القاعدة العامة للتقارب ، نرى ان لكل $\epsilon > 0$ يوجد n_0 بحيث ان

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon > \epsilon \text{ لكل } n \leq n_0 , m \leq n_0 .$$

بما ان $0 \leq a_n \leq 9$ فاننا نحصل على

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{1}{10^n} \right| > \epsilon , \text{ لكل } n \leq n_0 , m \leq n_0 .$$

اذن ... a_1, a_2, a_3, \dots هي ذات تقارب مطلق ، واذن تقاربية . لهذا فان مجموعها حقيقي .

لتفرض ان s عدد غير نسبي ، ولنفرض ، ان امكن ، ان صورته دورية . ولتبسيط

الامور افرض ان

$$s = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

$$s = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} s$$

حيث $s = Q$. فمن الواضح ان $s \in Q$ ، مما يناقض ان s عدد غير نسبي . لهذا يجب ان تكون الصورة غير دورية .

اخيرا افرض ان s عدد نسبي ، $s = \frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ ، $b \in \mathbb{N}$. سوف نثبت

ان صورة s دورية . فلنكتب $a = [s]$. لهذا فان $a = b + b_1$ ، حيث $a_1 \in \mathbb{Z}$ ، $0 \leq a_1 < b$.

$\geq b_1 > 0$. كذلك نكتب $a_1 = b_1 + b_2$ ، حيث $b_2 \geq 0$ ، $0 \leq b_2 < b_1$. لهذا فان

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} + \dots = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} + \dots$$

نستمر بالاستقراء لنعين متتاليتين (a_n) ، (b_n) حيث $0 \leq a_n < b_n$ ، $0 \leq b_n < b_{n-1}$ ،

$$(3) \dots\dots\dots \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\underbrace{(n-1) \cdot n}} + \frac{1}{\underbrace{n \cdot 1}} = \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 1}}$$

الاحتمال الثاني ان تكون $b < 0$ لكل $n \leq 0$. يمكن ان نأخذ b القيم $1, 2, \dots$ ، a ، $b - 1$ فقط. لنفرض ان b هي اول عدد يتكرر لنقل $b = 1$ من a الى b . اذن $a = 1$ لهذا فان $a = 1$ ، $a + 1 = b + 1$ وهذا يتضمن $b = 1$ من a الى b واذن $a = 2$ ، $a + 1 = 3$ ، $a + 2 = 4$ ، ونستمر على هذا فنجد ان

تمارين ٥ - ١

١- لنفرض ان $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a = 2$ ، $b = 3$ ، أثبت ان $a + b = 5$

٣- باستخدام الطريقة التلصكوية أثبت ان $\sum_{j=1}^n \frac{1}{(j+1)(j+2)(j+3)} = \frac{1}{4}$

$$\frac{1+r}{r(1+r)^T} \sum_{t=1}^T \text{جد مجموع}$$

- ٥ - اثبت ان γ ليست جبرية جزئية من \mathbb{L} ، ولكن \mathbb{L}^1 هي مثالية في \mathbb{L} .
- ٦ - اثبت انه يوجد تشاكل بين الفضاءين الخطيين γ و γ^* .
- ٧ - لكل $\alpha \in \mathbb{L}^1$ عرف $||\alpha|| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$. اثبت ان هذا هو معيار على \mathbb{L}^1 .
اي ان $||\alpha|| = 0 \iff \alpha = 0$ اذا وفقط اذا كانت $\alpha = 0$ ، $||\alpha|| = ||\beta|| \iff \alpha = \beta$ ، $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$ ، $||\alpha|| \geq 0$ ، $||\alpha|| = 0 \iff \alpha = 0$.
- اثبت كذلك ان γ مع $||\alpha||$ $\geq ||\beta||$ لكل $\alpha \in \mathbb{L}^1$.
- ٨ - عرف $\mathbb{L}^2 = \{\alpha \in \mathbb{L} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\}$. اثبت ان $\mathbb{L}^1 \subset \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}$ ، والاحتواءات فعلية . اثبت كذلك ان \mathbb{L}^2 و γ يتقاطعان ولكن لا يحتوي اي منهما الآخر .
- ٩ - افرض ان $\alpha \in \mathbb{L}$ ، β متتاليتان حقيقيتان . ان بعض العبارات التالية صحيحة وبعضها خطأ .
اثبت العبارات الصحيحة و بين خطأ العبارات الخطأ (بإعطاء امثلة) .
- (١) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty$ كانت $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) < \infty$ تباعدية .
 - (٢) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ، $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty$ تقاربيتين كانت $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_i) < \infty$ ان β تقاربية .
 - (٣) اذا كانت $\alpha_n \leftarrow 0$ فان $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_p - a_{p+1} + \dots$ تقاربية .
 - (٤) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية و $\beta_n \leftarrow 1$ فان $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_i) < \infty$ ان β تقاربية .
 - (٥) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية و $\beta_n \leftarrow 1$ فان $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_i) < \infty$ ان β تقاربية .
 - (٦) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (٧) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (٨) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (٩) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (١٠) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تباعدية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تباعدية .
 - (١١) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (١٢) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية ، (ان) متناقصة ، فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .
 - (١٣) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية و $\beta_n \leftarrow 0$ فان $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_i) < \infty$ ان β تقاربية .
 - (١٤) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية فان $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ان α تقاربية .

اختبارات تقارب يكون من السهل تطبيقها، وتحتوي على الحدود أن فقط للمتسلسلة أو على اقترانات سهلة لها.

والاختبارات الرئيسية التي سنبحثها هي: اختبار المقارنة واختبار الجذر النوني، واختبار النسبة، واختبار رابي. ونشدد هنا على أن الاختبارات تنص فقط على شروط كافية للتقارب (أو التباعد). لهذا سنجد دائما متسلسلات تقاربية أو تباعدية لا تنطبق عليها شروط الاختبار. فعلى سبيل المثال، أن اختبار الجذر النوني ينص على أنه إذا كانت $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ فإن $\sum a_n$ ذات تقارب مطلق، وفيها أن $|a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ مثل $\sum \frac{1}{n}$.

النظرية ٥.

إذا كان $a_n \neq 0$ أي أن $a_n \neq 0$ فإن $\sum a_n$ تباعدية.

البرهان.

من النظرية ٢ نعرف أن $\sum a_n$ تقاربية تعطي $a_n \rightarrow 0$ ، لهذا فإنه إذا كان $a_n \neq 0$ فإن $\sum a_n$ ليست تقاربية.

المثال ١٢.

$\sum \frac{(1-n)^n}{1+n} = \frac{(1-n)^n}{1+n}$ تباعدية لأن $\frac{(1-n)^n}{1+n} \rightarrow 1$. كذلك $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ تباعدية لأن $(1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots) \neq (0, \dots)$ في تقه.

المثال ١٣.

عكس النظرية ٥ خطأ. فمثلا $\sum \frac{1}{n}$ تباعدية، $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

النظرية ٦. [اختبار المقارنة للحدود غير السالبة].

(أ) افرض انه يوجد $\exists N$ بحيث ان $0 \leq a_n \leq b_n$ لكل $n \leq m$. فان $\sum b_n$ تقاربية تتضمن $\sum a_n$ تقاربية.

(ب) افرض انه يوجد $\exists N$ بحيث ان $0 \leq b_n \leq a_n$ لكل $n \leq m$. اذن $\sum b_n$ تباعدية تتضمن $\sum a_n$ تباعدية.

البرهان .

(أ) اذا كان $n \leq m$ ، $d \leq 0$ فاننا نحصل على .

$$(٤) \quad 0 \leq \sum_{n=1}^m a_n \leq \sum_{n=1}^m b_n \leq 0 \dots \dots \dots$$

لنفرض ان $\epsilon < 0$. فبما ان $\sum b_n$ تقاربية ، فان القاعدة العامة للتقارب تعطي n بحيث ان $b_1 + b_2 + \dots + b_n > \epsilon$ لكل $n \leq m$ ، $d \leq 0$. من (٤) نحصل على $0 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n > \epsilon$ لكل $n \leq m + n$ ، $d \leq 0$ ، وباستخدام القاعدة العامة للتقارب نحصل على $\sum a_n$ تقاربية .

(ب) لو كانت $\sum a_n$ تقاربية فانه باستخدام (أ) واستبدال a_n بـ b_n نحصل على $\sum b_n$ تقاربية ، مما يناقض $\sum b_n$ تباعدية . اذن $\sum a_n$ تباعدية .

ملاحظة .

يمكن اثبات (أ) بملاحظة ان $a_n \leq 0$ تعطي $s_n - s_{n+1} = a_{n+1} \leq 0$ لهذا فان $(s_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ وتيرة متزايدة . ولكن $\sum b_n$ تقاربية تعطي ان $(b_1 + a_2 + \dots + b_n)$ محصورة من اعلى ، اذن (s_n) محصورة من اعلى ، اذن (s_n) تقاربية ، اي ان $\sum a_n$ تقاربية .

نتيجة .

إذا كانت (a_n) متتالية اعداد مركبة ، وكان $b_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ بحيث ان a_n $\frac{1}{b_n}$ موجودة فان $\sum b_n$ تقاربية تعطي $\sum a_n$ ذات تقارب مطلق (فهي اذن تقاربية) .

البرهان

تقارب المتتالية $\frac{1}{b_n}$ يتضمن انها محصورة .

اذن $|a_n| \leq M b_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. لكن $\sum M b_n$ تقاربية . اذن تقارب $\sum |a_n|$ ينتج من النظرية ٦ (أ) .

وتعتمد الاستفادة من اختبار المقارنة ونتيجته على معرفة متسلسلات $\sum b_n$ ، لنتم المقارنة بها . واليك اهم هذه المتسلسلات .

$b_n = \frac{1}{n^p}$ حيث $p > 1$ ثابت . (٥)

$b_n = \frac{1}{n^p}$ حيث $p < 1$ (٦)

$b_n = \frac{1}{n^p}$ (٧)

نعرف ان المتسلسلة التي تتولد من (٥) تقاربية والتي تتولد من (٧) تباعدية . وفي حالة $p = 1$ ، مثال ٦ ، يتبين ان المتسلسلة المكونة من (٦) تقاربية . وفي المثال التالي نعالج $p < 1$.

المثال ١٤ [اقتران زيتا]

إذا كانت $\alpha \in \mathbb{Q}$ فان $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ تكون تباعدية إذا كانت $\alpha \leq 1$ ، وتقاربية إذا

كانت $\alpha < 1$. لانبات ذلك لاحظ ان $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ اذا كانت $\alpha \geq 1$. لهذا فان التباعد

ينتج من اختبار المقارنة . واذا كانت $\alpha \leq 2$ فان $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$. والتقارب ينتج من

اختبار المقارنة مع المتسلسلة التقاربية $\sum \frac{1}{n^2}$.

تبقى الحالة $1 > \alpha > 2$. والبرهان الذي سوف نقدمه ينطبق على اي $\alpha < 1$.

لنأخذ $N \geq 3$ ولنكتب $s_N = 1 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^N}$. فالتتالية (s_N) هي متتالية وثيرية متزايدة . ولكل $N < 1$ تكون $s_N \geq s_{(N)}$ حيث $(N) = 2 - \alpha$ ، و

$$s_{(N)} = 1 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^4} + \dots + \frac{1}{\alpha^{1-2N}} > \frac{1}{\alpha^{1-2N}}$$

$$= 1 + s + s + \dots + s + \frac{1}{\alpha - 1} > \frac{1}{1 - \alpha^2} \text{ ، حيث } s = \frac{1}{1 - \alpha^2} > 1$$

اذن (s_N) محصورة من اعلى ، لهذا فهي تقاربية . لاحظ اننا في الحقيقة اثبتنا المتباينة

$$1 > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{1 - \alpha^2} \text{ لكل } \alpha \geq Q \text{ ، } \alpha < 1$$

خلاصة ماورد انه عندما تكون $\alpha \geq Q$ ، $\alpha < 1$ فان المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ تقارب . ويرمز لمجموعها بالرمز $\zeta(\alpha)$. والاقتران ζ ، Q : $\{ \alpha \mid \alpha < 1 \} \leftarrow R$ يسمى اقتران زيتا (Zeta) . وفيما بعد ، عندما تعرف معنى ζ حيث α أي عدد حقيقي ، وليس نسبيا فقط ، فسوف نثبت ان $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ تقاربية لكل $\alpha \geq R$ ، $\alpha < 1$. وتصبح ζ معرفة على $\{ \alpha \mid \alpha < 1 \}$.

المثال ١٥ .

لتفرض ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \zeta(\alpha)$. فلأي قيم $s \geq Q$ تكون المتسلسلة تقاربية؟

حينما تكون n كبيرة فإن a_n تكون «شبيهة» من حيث سلوكها بـ $\frac{1}{n^2}$. وهذا يوحي

بان نأخذ $b_n = \frac{1}{n^2}$ ، في نتيجة النظرية ٦، ونفترض ان $s < 3$. لهذا فان $\sum b_n$ تقاربية، من المثال ١٤. اذن

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + 3^n + \dots + n^n}{n^{2n}} \leftarrow 2 \text{ عندما } n \rightarrow \infty.$$

اذن $\sum a_n$ تكون ذات تقارب مطلق حينما تكون $s < 3$.

وإذا كانت $s \geq 3$ فمن الواضح ان $a_n \not\rightarrow 0$ ، لهذا فان $\sum a_n$ تباعدية. واخيرا افرض ان $2 > s \geq 3$. اذن $a_n \rightarrow 0$ ولكن هذا وحده غير كاف لضمان تقارب $\sum a_n$. وفي الحقيقة ان $\sum a_n$ تكون تباعدية، كما سنرى.

$$\text{الآن } \sum b_n = \sum \frac{n^{2n}}{n^{2n}} \text{ ذات تقارب مطلق، لان } s < 2. \text{ ولكن } s \geq 3$$

تعطي

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n^{2n}}{n^{2n+1}} \leq \frac{n^{2n}}{n^{2n+1}}$$

$$\text{اذن } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n^{2n+1}} \text{ تباعدية، بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية التباعدية}$$

$$\sum \frac{1}{n}$$

الآن $s_n = (b_1 + \dots + b_n) + (c_1 + \dots + c_n) = l_n + m_n$ ، لقد اثبتنا ان $l_n \rightarrow$ نهاية ما، $m_n \rightarrow \infty$. اذن (s_n) تباعدية.

والاختبار التالي ينسب الى كوشي، وهو كثير الفائدة، وبخاصة عند دراسة متسلسلات القوى (التي سوف ندرسها في فصل قادم).

النظرية ٧ [اختبار الجذر النوني].

افرض ان $A = \overline{A} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}}$. فان:

(١) $A > 1$ تعطي $\sum A_n$ ذات تقارب مطلق.

(٢) $A < 1$ تعطي $\sum A_n$ تباعدية.

(٣) $A = 1$ لا تعطي اي استنتاج، اي ان الاختبار يفشل في اعطاء نتيجة. فقد تكون $\sum A_n$ تباعدية او تقاربية.

البرهان.

(١) من النظرية ٥، الفصل الرابع، نجد انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد n_0 بحيث ان $\mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} > 1 + \epsilon$ ولكل $n \geq n_0$. بما ان $A > 1$ فيمكن ان نختار $\epsilon = \frac{A-1}{2} > 0$. اذن $\mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} > 1 + \epsilon$ لكل $n \geq n_0$. حيث $\epsilon > 0$ ، $A = 1 + \epsilon > \frac{1+\epsilon}{2}$. اذن $\mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} > \frac{1+\epsilon}{2}$ ،

بالمقارنة مع المتسلسلة الهندسية التقاربية $\sum \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)^n$ من n_0 .

(٢) خذ $\epsilon = 1 - A < 0$. اذن $\mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} < 1 - \epsilon = 1 - (1 - A) = A$ لعدد غير منته من n ، لهذا فان $\mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} < 1$ لكل هذه الاعداد. اذن $\sum A_n$ تباعدية، من النظرية ٥.

(٣) اذا كان $A_n = 1$ لكل n فان $A = 1$ ولكن $\sum A_n$ تباعدية. اذا كان $A_n = \frac{1}{n}$ فان $A = 1$

(باستخدام $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$) ولكن $\sum A_n$ تقاربية.

ملاحظة.

من حسن الحظ اننا كثيرا ما نستطيع استبدال \overline{A} بها في اختبار الجذر النوني، ويبقى الاستنتاج صحيحا.

(٢) إذا كانت $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 < 1$ ، فإنه باستخدام النظرية ٥ ، الفصل الرابع ،

يوجد n_0 بحيث أن $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ لكل $n \leq n_0$. إذن باخذ $n = n_0$ نحصل على

$|a_n| < |a_{n+1}| < 1$ لكل $n \leq n_0$ ، إذن $a_n \neq 0$. وهذا يعطي $\sum a_n$ تباعدية .

(٣) إذا كان $a_n = 1$ لكل n فإن $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ولكن $\sum a_n$ تباعدية . إذا كان a_n

$= \frac{1}{n}$ فإن $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ولكن $\sum a_n$ تقاربية . وهذا يثبت النظرية .

المثال ١٧ [المتسلسلة الاسية] .

ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ هامة جدا في

التحليل . وهي تعرف الاقتران الاسي سا : ع ← ع ، وسوف ندرسه بالتفصيل في فصل

قادم . نريد الآن ان نثبت ان المتسلسلة تقاربية (في الحقيقة ذات تقارب مطلق) لجميع قيم ع

∃ ع . واختبار النسبة هو الاختبار المناسب . فالحالة ع = 0 بدئية لان المتسلسلة تصبح 1 +

0 + 0 + 0 + ... الآن لنفرض ان |ع| < 0 ونطبق اختبار النسبة لـ $\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

فنحصل على

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| < 1 \quad (n \leftarrow \infty)$$

لكل ع ∃ ع . إذن $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| < 1$. إذن $\sum |a_n|$ إذن $|a_n|$

تقاربية ، باستخدام النظرية ٨ (١) .

المثال ١٨ .

$$\text{المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ هي تقاربية لان}$$

$$207100 = 0 \text{ لان } 1 > \frac{1}{8} \leftarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right|$$

والاختبار التالي يصلح لمعالجة بعض الحالات التي يكون بها $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \leftarrow 1$ في اختبار النسبة .

النظرية ٩ [اختبار رايب] .

افرض ان $|a_n| < 0$ لكل $n \in N$. اذن

$$\text{نُها ن } (1 - \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right|) > 1 -$$

تعطي ان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ذات تقارب مطلق .

البرهان .

افرض ان نُها تساوي $1 - 2$ حيث $d < 0$ ، اذن يوجد $m = m(d) \in N$ بحيث ان

$$m \text{ تعطي } n \left(1 - \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \right) > 1 - d . \text{ وعمليات حسابية ينتج } d |a_n| >$$

$$(1 - n) |a_n| - n |a_{n+1}| ، \text{ ومن هذا نستنتج ان}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| > \frac{(1-m)}{d} |a_n| \text{ لكل } n \leq 1 .$$

اذن مجاميع $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ الجزئية محصورة ، اذن تقاربية .

المثال ١٩ .

نعرف ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ تقاربية ولكن لنأخذها كمثال . يفشل اختبار النسبة في اعطاء نتيجة لان $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{1} = 1$.
 فاذا استخدمنا اختبار راى نجد ان

$$1 - \gamma \leftarrow \frac{\gamma - \gamma^2}{\gamma(1 + \gamma)} = \left(1 - \left| \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right| \right) \gamma$$

مما يستلزم التقارب.

وجميع الاختبارات السابقة هي اختبارات تقارب مطلق، ولكننا نعرف انه يوجد متسلسلات ذات تقارب مشروط. فعلى سبيل المثال، $1 - 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \dots$ بشكل عام يصعب حل هذه المتسلسلات. ولكن النتيجة التالية تساعد في حل مسائل التقارب المشروط.

النظرية ١٠ [اختبار دید کند]

نفرض ان (أ₁) ، (ب₁) متاليتان من الاعداد المركبة. ولنكتب س₁ = 1 + 1 + 1 + ...
 + 1 و Δ₁ = ب₁ - ب₁₊₁. ان الشروط التالية (س₁) ∃ ∞ ، |Δ₁|
 < ∞ تعطي ان ∑₁ ا₁ ب₁ = ∑₁ س₁ Δ₁.

البرهان.

يستند البرهان الى متطابقة تعرف باسم صيغة آبل للجمع الجزئي :

$$\sum_{r=1}^n \Delta_r = s_n + \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \quad (A)$$

بما ان $s_1 = A$ ، فان (A) تتحقق لـ $n=1$. افرض ان $n < 1$. اذن $A = s_r - s_{r-1}$ لكل $r < 1$. والطرف الايمن من (A) يساوي

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \dots + (s_n - s_{n-1}) + s_n - s_{n-1} \\ s_n + s_{n-1} + (s_{n-1} - s_{n-2}) + \dots + (s_2 - s_1) + s_1 - s_0 \\ \text{مما يثبت (A).}$$

بما ان $(s_n) \rightarrow \infty$ وب $n \rightarrow \infty$ ، فان $s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$ ، وهذا يعالج الحد الاول في (A) . كذلك وبما ان $|s_r| \geq M$ لكل $r \geq N$ ، فان $\sum_{r=N}^{\infty} \Delta_r > \infty$. ومن اختبار المقارنة نحصل على $\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r > \infty$. اذن $\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r$ تقاربة ، وبذا تكون المجاميع الجزئية تقاربة . وهذا يعالج الحد الثاني في (A) . اذن $\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r$ تقاربة ومجموعها هو $\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r$.

المثال ٢٠ .

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^r}{r} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ تقاربة . (ليست}$$

بالطبع ذات تقارب مطلق) . خذ $A_r = (1 - (-1)^r)^{-1}$ وب $r = \frac{1}{r}$ في اختبار ديدكند . اذن s_n

$= 1$ أو صفراً ، حسب كون n فردية أو زوجية . اذن $|s_n| \geq 1$ اي ان $(s_n) \rightarrow \infty$.

$$\Delta_r = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r = \sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)} \text{ ، من المثال ٥}$$

في الفصل ٥ ، البند ١ . اذن $\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r$ تقاربة ومجموع المتسلسلة هو في الحقيقة 1 ، ولكن لا نستطيع إثبات هذا الآن .

سوف نعطي الآن حالة خاصة من النظرية ١٠ تعميم المثل السابق :

النظرية ١١ [اختبار ليبتس أو اختبار المتسلسلات المتناوبة] .

إذا كانت (ب_ن) متتالية حقيقية صفرية وكانت أيضا وتيرة متناقصة ، تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots \text{ تقاربية. كذلك فإن } b_1 - b_2 \geq b_3 - b_4 \geq \dots \geq b_{2r-1} - b_{2r} \geq b_{2r+1} - b_{2r+2}.$$

البرهان.

خذ $a_r = (-1)^{r-1} b_r$ في النظرية ١٠. اذن (س_ن) \exists لـ ∞ نعرف أن $b_n \leftarrow 0$ وبما أن $b_r \leq b_{r+1}$ ، فإن المجموع الجزئي النوني من $\sum_{n=1}^r a_n$ Δ ب_ر | يساوي $b_1 - b_n \leftarrow b_1$ ، اذن $\sum_{n=1}^r a_n \Delta$ ب_ر | تقاربية. كذلك $\sum_{n=1}^r (-1)^{n-1} b_n = \sum_{n=1}^r a_n \Delta$ س_ر Δ ب_ر = $b_1 - b_{2r} - (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \dots$ والتي هي $\leq b_1 - b_{2r}$. اخيرا $b_n \leftarrow 0$ ، (ب_ن) متناقصة تعطي $b_n \leq 0$ لكل ن. لهذا فإن المجموع الجزئي النوني لـ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ اقل من أو يساوي ب_١. وهكذا اثبتنا النظرية.

المثال ٢١.

المتسلسلة $1 - 2^{-2} + 3^{-2} - 4^{-2} + \dots$ هي تقاربية، باستخدام اختبار ليبتس. وفي الحقيقة هي ذات تقارب مطلق. لنرمز لهذا المجموع بالرمز s . فباستخدام اختبار ليبتس نجد أن $2^{-5} - 2^{-6} \geq 2^{-6} - 2^{-7} \geq \dots \geq 2^{-5}$. وبإيجاد قيم الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلة نجد أن $0,81 > s > 0,84$.

تمارين ٥ - ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - ناقش التقارب المطلق والتقارب للمتسلسلات \sum أن حيث أن معطاة كما يلي:

$$\begin{aligned} & (أ) (1 - \frac{1}{n})^n (\frac{1}{n} + 1)^{-n} \quad (ب) \frac{n^2}{100n} \quad (ج) \frac{n^2}{n^3} \\ & (د) (1 - \frac{1}{n})^n \quad (هـ) \frac{n^2}{\sqrt{4 + 2n^3}} \quad (و) \frac{n}{(1+n)(2+n)} \\ & (ز) (\frac{n}{1+n})^n \quad (ح) \frac{n}{n} \text{ لكل } n \in \mathbb{N} \\ & (ك) \frac{(n!)^2}{1(n^3)} \text{ حيث } n \in \mathbb{R} \\ & (ل) (1 - \frac{1}{n})^n |1 - \frac{1}{n}| \text{ حيث } n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$(م) \frac{(1 - \frac{1}{n})}{(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1)}$$

٢ - إذا كان $a_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \frac{1}{n}$ فاثبت ان $\sum a_n$

تباعدية. ناقش تقارب

$$\sum \frac{1 \cdot (1+1) \dots (1+n)}{1 \cdot (1+b) \dots (1+n)}$$

١ -

٢ -

٣ - هل العبارة التالية صحيحة ام خطأ؟

إذا كان $a_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n}$ فاثبت ان $\sum a_n$

تباعدية.

٤- إذا كان $a_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $\frac{1}{a_n} \leftarrow (n \leftarrow \infty)$ فثبت أن $a_n \leftarrow \infty$.
استخدم هذه النتيجة لحساب قيمة $\frac{1}{(n)^{\frac{1}{2}}}$

٥- إذا كانت $s < 0$ عددا ثابتا فثبت أن

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4} - \dots \text{تقاربية،}$$

ولكن المتسلسلات التي نحصل عليها بتغير الاشارات الى (أ) $++--++--\dots$ ،
(ب) $+-+-+\dots$ هي تباعدية .

٦- [متسلسلة ذات الحدين] اثبت أن

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{84} + \frac{1}{112} + \frac{1}{144} + \frac{1}{180} + \frac{1}{224} + \frac{1}{270} + \frac{1}{324} + \frac{1}{384} + \frac{1}{450} + \frac{1}{528} + \frac{1}{612} + \frac{1}{700} + \frac{1}{800} + \frac{1}{912} + \frac{1}{1040} + \frac{1}{1188} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1512} + \frac{1}{1700} + \frac{1}{1920} + \frac{1}{2160} + \frac{1}{2420} + \frac{1}{2700} + \frac{1}{3024} + \frac{1}{3360} + \frac{1}{3744} + \frac{1}{4160} + \frac{1}{4608} + \frac{1}{5080} + \frac{1}{5600} + \frac{1}{6160} + \frac{1}{6768} + \frac{1}{7440} + \frac{1}{8160} + \frac{1}{8960} + \frac{1}{9840} + \frac{1}{10800} + \frac{1}{11840} + \frac{1}{12960} + \frac{1}{14160} + \frac{1}{15440} + \frac{1}{16800} + \frac{1}{18240} + \frac{1}{19760} + \frac{1}{21360} + \frac{1}{23040} + \frac{1}{24800} + \frac{1}{26720} + \frac{1}{28800} + \frac{1}{30960} + \frac{1}{33280} + \frac{1}{35840} + \frac{1}{38560} + \frac{1}{41440} + \frac{1}{44480} + \frac{1}{47680} + \frac{1}{51040} + \frac{1}{54560} + \frac{1}{58240} + \frac{1}{62080} + \frac{1}{66080} + \frac{1}{70320} + \frac{1}{74800} + \frac{1}{79440} + \frac{1}{84240} + \frac{1}{89280} + \frac{1}{94560} + \frac{1}{100000} + \dots$$

ذات تقارب مطلق إذا كان $|a| > 1$ ، وتباعدية إذا كان $|a| < 1$. لأي $a \in \mathbb{C}$.

وإذا كانت $|a| = 1$ فثبت أن المتسلسلة تكون ذات تقارب مطلق إذا كان الجزء الحقيقي من a < 0 . وتكون تباعدية إذا كان الجزء الحقيقي من a ≥ 0 .

٧- افرض أن $\sum a_n$ أو $\sum b_n$ تقاربية و $\sum c_n$ أو $\sum d_n$ تباعدية. فثبت أن $\sum (a_n + b_n)$ أو $\sum (c_n + d_n)$ تباعدية. اعط مثالا تبين فيه أن $\sum a_n$ أو $\sum b_n$ قد لا تكون ذات تقارب مطلق.

٨- إذا كانت $\sum a_n$ أو $\sum b_n$ تقاربية لكل $\gamma \in \mathbb{R}$ ، فثبت أن $\sum (a_n + b_n)$ أو $\sum (c_n + d_n)$ تباعدية.

٩- عرف $\text{تم} = \{b\} = \{a\} \mid \sum a_n$ أو $\sum b_n$ تقاربية. وهذه هي المتتاليات ذات التغير

المحصور. اثبت أن $L \supset \text{تم} \supset \text{تم}$ وأن تم هو فضاء خطي وجزئي من تم . اثبت كذلك أن γ كرم يتقاطعان ولكن لا يحوي أي منهما الآخر.

١٠- لنفرض ان n ترمز الى المجموع $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ كم حدا يجب ان نجمع كي تكون n صحيحة لست منازل عشرية؟

٣. ضرب المتسلسلات

في هذا البند سوف نفترض ان جميع المتسلسلات تبدأ عند $n=0$ ، لهذا فان $\sum a_n$ يرمز الى $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ وهذا يساعد عند دراسة ضرب المتسلسلات ولكنه ليس ضروريا منطقيا.

عندما نحتاج لجمع متالتين $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ فان الطريقة الطبيعية هي جمع الحدود اي ان الجمع هو $\sum (a_n + b_n)$. ولكن اذا احتجنا ان نضرب $\sum a_n$ و $\sum b_n$ فهناك مشكلة اذ انه لا يوجد طريقة طبيعية لترتيب حواصل الضرب $a_n b_m$.

لنأخذ (أ. $a_0 + a_1 + \dots$) (ب. $b_0 + b_1 + \dots$) ولنفكر بجميع حواصل الضرب المكتوبة فيما يلي

$$\begin{array}{rcl} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 \dots \end{array}$$

في هذه المرحلة لا نهتم بكون المتسلسلات تقاربية ام لا. كل ما يهمنا الآن هو تكوين حواصل ضرب مختلفة اعتمادا على قواعد محددة.

اذا سرنا من اليمين الى اليسار ونزولا على الاقطار نحصل على تعريف للضرب القطري لـ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ وهو المتسلسلة:

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$...
لاحظ انه لا يوجد اقواس في الضرب القطري، والمجاميع الجزئية هي

$$a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots$$

وهناك طريقة ضرب اخرى تفيد احيانا، نحصل عليها بوضع اقواس حول حدود كل قطر. تسمى هذه العملية عملية الضرب الكوشية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ وهي معرفة بـ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_1 + a_1 b_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

ويشكل عام فانه لكل $n \leq$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (9)$$

وبما أننا نحصل على $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ بوضع اقواس في $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ فإنه اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ تقاربية فان $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ تكون تقاربية (لنفس المجموع)، ويمكن اثبات ان العكس غير صحيح.

وتظهر عملية الضرب الكوشية عند ضرب المتسلسلات الاسية اي متسلسلات على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{حيث } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

فاذا ضربنا متسلسلتين من هذا النوع:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

حيث نجمع الحدود التي تحتوي على x^n ، c_1 ، c_2 ، ...، فاننا نحصل على حاصل الضرب الكوشي بوضع $c = 1$.

وهناك عملية ضرب اخرى تستحق الذكر وتسمى عملية الضرب المربع، ونحصل عليها بالترتيب التالي:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \dots & & & \dots & & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & & & \dots & & \end{array}$$

لهذا فالتنا تعرف حاصل الضرب المربع لـ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ على انه

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

واذا كتبنا $s_n = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}$ و $t_n = b_n + b_{n+1} + \dots + b_{2n-1} + b_{2n}$ فان من الواضح ان $s_n t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ ، لهذا فانه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربيتين $\leftarrow s_n \rightarrow s$ و $\leftarrow t_n \rightarrow t$ ، لهذا فان $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n = s t$. لهذا فان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يعطي ان حاصل الضرب المربع $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ تقاربي وكذلك

(١٠) $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$

ونتمنى ان تكون النتيجة المعبر عنها في (١٠) صحيحة لكل نوع من عمليات الضرب لأي متسلسلتين تقاربيتين.

ولكن الحظ فانه يمكن لحاصل الضرب الكوشي لمتسلسلتين تقاربيتين ان يكون متسلسلة تباعدية (بخلاف حاصل الجمع المربع).

المثال ٢٢.

نفرض ان $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. فتكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربية، وباستخدام اختبار لبيتس ومن (٩) نحصل على

$$|ح_n| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(1+r)(1-r-n)}}.$$

ولكن اذا كانت $0 \leq r \leq 1$ فإن $\sqrt{(1+r)(1-r-n)} \geq 1+n$ ، واذن لكل $n \leq 0$ ، $|ح_n| \leq 1$ لهذا فان $ح_n \rightarrow 0$ ومنه $\sum ح_n$ تباعدية.

نسال الآن ما هي الشروط التي يجب ان نضعها على المتسلسلتين $\sum ا_n$ ، $\sum ب_n$ لكي نضمن ان متسلسلة اي حاصل ضرب هي تقاربية. ونعني باي متسلسلة حاصل ضرب اي اعادة ترتيب حدود الحاصل الضرب القطري

$\sum د_n = د_0 + د_1 + د_2 + \dots$ ، على سبيل المثال $د_1 = د_0 + د_2 + د_3 + \dots$ والتعريف الدقيق هو:

اعادة الترتيب

لنفرض ان $(ا_n)$ هي متتالية اعداد مركبة ولنفرض ان ق:

$\{... , 2, 1, 0\} \leftarrow \{... , 2, 1, 0\}$ هو اقتران تقابل اي ان ق تبديلية على الاعداد الصحيحة غير السالبة. نسمي $(ا_q)$ = $(ا_n)$ ، $ا_q$ = $(ا_n)$ اعادة ترتيب لـ $(ا_n)$ وكذلك نسمي $\sum ا_q$ اعادة ترتيب لـ $\sum ا_n$.

سوف نبين ان التقارب المطلق لـ $\sum ا_n$ و $\sum ب_n$ هو شرط كاف لضمان ان اي متسلسلة حاصل ضرب $\sum ص_n$ تكون ذات تقارب مطلق حيث يكون $\sum ص_n = (\sum ا_n)(\sum ب_n)$.

ولكي تتمكن من برهنة هذه النظرية سوف نبرهن اولاً نظرية عن اعادة الترتيب لمتسلسلة ذات تقارب مطلق.

النظرية ١٢.

لنفرض ان $\sum ا_n$ ذات تقارب مطلق. اذن اي اعادة ترتيب $\sum ا_q$ تكون ذات

من ٢، مثلاً $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ ثم نتبعها بـ ١. اذن $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} < 1$

١. ثم نأخذ اعداداً موجبة أخرى مجموعها أكبر من $\frac{3}{4}$ مثلاً $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

ثم نتبعها بـ $-\frac{1}{4}$. اذن $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} < 1$

٢. ونستمر بهذه الطريقة ونعيد ترتيب ١ - $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$ بحيث ان المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة الجديدة والذي حده الاخير $-\frac{1}{n}$ يكون أكبر من ن. اذن تكون

المتسلسلة الجليدة تباعدية.

هذا المثال هو عبارة عن حالة لنظرية لريمان تنص على انه اذا كانت $\sum a_n$ ذات تقارب مشروط فانه يمكن اعاده ترتيبها بحيث تكون المتسلسلة الناتجة تباعدية، أو تقارب لأي عدد نزيه

نعود الآن لعملية ضرب المتسلسلات.

النظرية ١٣.

اذا كانت كل من $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ ذات تقارب مطلق، فان اي متسلسلة حاصل ضرب $\sum c_n$ تكون ذات تقارب مطلق حيث يكون $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$ البرهان.

من التعريف $\sum c_n = \sum d_n$ ، لتبديل ما، ق، على $\{0, 1, 2, \dots\}$

حيث $\sum d_n$ هو حاصل الضرب القطري. من الواضح ان

$$\sum_{i=0}^n |d_i| \geq \sum_{i=0}^n |a_i| + \sum_{i=0}^n |b_i|$$

لكل $m \leq n$ ، واذن $\sum |d_n|$ تقاربية، ومنه $\sum d_n$ تقاربية.

نعيد ترتيب \sum د_ن لنحصل على متسلسلة الضرب المربع ، ولكن دون اقواس ، اي
 ان $\sum_{ن=1}^{\infty} ا.ب. = ا.ب. + ا.ب. + ا.ب. + ا.ب. + \dots$. فمن النظرية ١٢ نعلم ان \sum
 م_ن ذات تقارب مطلق و $\sum_{ن=1}^{\infty} م = د$. ويوضع اقواس في \sum م_ن لنحصل على \sum
 س_ن لا يتغير المجموع لهذا فان $\sum_{ن=1}^{\infty} د = \sum_{ن=1}^{\infty} م = \sum_{ن=1}^{\infty} س$. ولكن $\sum_{ن=1}^{\infty} ا.ن$ ، $\sum_{ن=1}^{\infty} ب.ن$
 تقاربيتان. اذن من (١٠) نحصل على $\sum_{ن=1}^{\infty} د = \sum_{ن=1}^{\infty} س = \sum_{ن=1}^{\infty} (ا.ن) (ب.ن)$ مما
 يثبت النظرية .

نتيجة .

اذا كانت كل من $\sum_{ن=1}^{\infty} ا.ن$ ، $\sum_{ن=1}^{\infty} ب.ن$ ذات تقارب مطلق فان حاصل الضرب الكوشي
 $\sum_{ن=1}^{\infty} ح.ن$ ذو تقارب مطلق وكذلك $\sum_{ن=1}^{\infty} ح.ن = (\sum_{ن=1}^{\infty} ا.ن) (\sum_{ن=1}^{\infty} ب.ن)$.

المثال ٢٤ .

لنرمز للمتسلسلة الاسية بالرمز سا(ع) = $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ع^n}{ن!}$. من مثال ١٧ نعلم ان هذه
 المتسلسلة ذات تقارب مطلق ، لجميع قيم ع $\in \mathbb{C}$. لناخذ اي ع ، م $\in \mathbb{C}$ ولنطبق النتيجة

$\sum_{ن=0}^{\infty} ح.ن = (سا(ع)) (سا(م))$ حيث
 $ح.ن = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ع^n}{ن!} \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{م^n}{ن!} = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ع^n م^n}{(ن!)^2} = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(ع.م)^ن}{ن!}$
 من نظرية ذات الحدين . ولكن سا(ع + م) = $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(ع+م)^ن}{ن!}$ لهذا فقد اثبتنا نظرية هامة
 بالنسبة للاقتران الاسي وهي ان
 سا(ع + م) = سا(ع) * سا(م) .
 وهذا تعميم هام لنتيجة النظرية ١٣ وينسب الى ميرتس .

النظرية ١٤ [ميرتس]

إذا كانت $\sum a_n$ ذات تقارب مطلق وكانت $\sum b_n$ تقاربية (ليست بالضرورة ذات تقارب مطلق). فإن متسلسلة حاصل الضرب الكوشي تكون تقاربية ويكون

$$\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n).$$

البرهان.

لنكتب $c_n = a_n + \dots + a_1 + b_n + \dots + b_1$ ، لن $c_n =$
 $+ c_1 + \dots + c_n$. كذلك نكتب $\sum a_n = m$ ، $\sum b_n$ الآن $c_n =$
 $c_n = a_n + b_n$.

$c_1 = a_1 + b_1$
 $c_n = a_n + b_n + a_{n-1} + b_{n-1} + \dots + a_1 + b_1$
 بإضافة الحدود عمودياً نحصل على

$$c_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + b_n + b_{n-1} + \dots + b_1$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = (m + m^{-1})$$

$$c_n = m + m^{-1} + \dots + (m + m^{-1}) \dots \dots \dots (13)$$

الآن $m \leftarrow \infty$ ، $m \leftarrow \infty$. لهذا فالتنا نريد ان نثبت ان نهاية الحد الثاني في (١٣) هي الصفر؛ لأي $\epsilon > 0$ يوجد $m = m(\epsilon)$ بحيث ان $|m - m^{-1}| < \epsilon$ لكل $r < m$. كذلك يوجد n بحيث ان $|a_r| + |a_{r+1}| + \dots + |a_{r+n}| < \epsilon$ لكل $r < n$ ، $d \leq 0$. وبما ان $m - m^{-1} \leftarrow 0$ فان $|m - m^{-1}| < \epsilon$ لكل $r \leq 0$ ، لهذا فان $c_n < m + n$. تعطي ان

$$\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i| = \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i|$$

$$\begin{aligned} & \geq \sum_{j=1}^n |a_{j-1}| \epsilon + \sum_{j=1}^n |a_{j-1}| \epsilon \\ & \geq \epsilon + \sum_{j=1}^n |a_{j-1}| \epsilon \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (14)$$

ولكن ك، $\sum_{j=1}^n |a_{j-1}|$ عدنان ثابتان ولا يعتمدان على ن، ϵ لهذا فان (14) تعطي ان نهاية
الحد الثاني في (13) هي الصفر. وهذا يثبت نظرية (ميرتس).

تمارين ٥ - ٣

(تجد في اخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - جد $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ بحيث ان $\sum c_n$ تقاربية ولكن $\sum d_n$ تباعدية.

٢ - اذا كانت (ع) \exists تق فاثبت ان اي اعادة ترتيب (ع) ق(ن) \exists تق ونها ع = نها ق(ن)

٣ - جد مجموع $1^{-3} + 2^{-3} + 3^{-3} + 4^{-3} + 5^{-3} + \dots$

٤ - لنرمز لمجموع $1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + 4^{-2} + \dots$ بالرمز س. اعد الترتيب لتحصل على

$\sum b_n = 1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + 4^{-2} + 5^{-2} + \dots$ بحيث ان كل حد موجب

يتبعه حدان سالبان. بدراسة $m_{1+2n}, m_{2+2n}, m_{3+2n}$ اثبت ان $\sum b_n = \frac{S}{4}$.

٥ - اذا كانت (أ_ن) متتالية جزئية من (أ_ن) فاننا نعرف $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots$ على

انها متسلسلة جزئية من $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots$. اثبت ان المتسلسلة $\sum a_n$ تكون ذات

تقارب مطلق اذا فقط اذا كانت كل متسلسلة جزئية، تقاربية.

٦ - اثبت ان متسلسلة الضرب الكوشي للمتسلسلتين التباعديتين $3 + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + \dots$

... كـ ٢-٢+٢+٢+٢+٢+٢+٢... هي ذات تقارب مطلق.

٧- أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha}$ حيث $\alpha > 1$.

٨- إذا كان $\alpha > 1$ فاثبت ان

$$(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} (\dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1})$$

٩- اثبت انه لكل $\alpha \in \mathbb{Q}$ تكون المتسلسلتان $\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ذات تقارب مطلق. باخذ حاصل الضرب الكوشي،

ص $(\alpha) = 1 - \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} - \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots$ ذات تقارب مطلق. باخذ حاصل الضرب الكوشي،

اثبت ان $[\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha}] + [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}] = 1$. لاحظ ان الجيب وجيب التمام يحققان هذه المطابقة.

١٠- اعط مثالا لـ $\alpha \in \mathbb{Q}$ و $\beta \in \mathbb{Q}$ بحيث ان متسلسلة حاصل الضرب الكوشي $\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha}$ ليست ذات تقارب مطلق. هل يناقض هذا نظرية ميرتنس؟

١١- لنفرض ان $\alpha_n = \beta_n = (1+n)^{-\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{Q}$. ضع شروطا على α تضمن ان متسلسلة حاصل الضرب الكوشي تقاربية.

١٢- لاقترا ن زيتا، ζ ، اثبت ان $\zeta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha}$ لكل $\alpha > 1$ حيث α هو عدد

عوامل ن بيا فيها ١، ن.

١٣- لـ $\alpha > 1$ ، أوجد مجموع

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\alpha} + \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

هل تكون المتسلسلة تقاربية لـ $\alpha \leq 1$ ؟

١٤- إذا كان $\alpha_n = \frac{(1+n)^{-\alpha}}{1+n}$ فاثبت ان حاصل الضرب الكوشي لـ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ في نفسها يحقق

$$ح_n = \frac{2(1-n)}{2+n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

اثبت كذلك ان $\sum ح_n$ تقاربية.

١٥ - لنفرض ان $\sum ا_n$ متسلسلة اعداد مركبة. اثبت ان $\sum ا_n$ تكون ذات تقارب مطلق اذا وفقط اذا كانت كل متسلسلة تحصل باعادة الترتيب تقاربية [استخدم النظرية ١٢ ونظرية ريمان المذكورة بعد المثال ٢٣].

افضل السادس

النهايات والاتصال

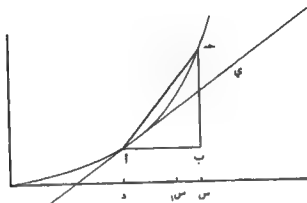
١ . نهاية الاقتران عند نقطة

اهتم الاغريق القدامى ونجحوا في اعطاء البناء الهندسي للجاسات منحنيات مثل الدائرة والقطع الناقص واللولب . فسفترض معرفة بدائية بفكرة المماس للمنحنى عند نقطة عليه . ولسوء الحظ فان معظم تعريفات المماس المعطاة في كتب الهندسة القديمة لا معنى لها . واعتقد ان التعريف الوحيد المعقول للمماس يعتمد على التحليل . ولكن ، من اجل خلق الحافز ، لا ضرر من اللجوء الى الافكار الهندسية .

كانت طريقة التفكير في المنحنيات في القرن السابع عشر تقوم على ان المنحنيات معطاة بصيغ أو معادلات مثل $y = x^2$ ، وهي معادلة القطع المكافئ . وقد اهتم ليبتنس في ايجاد صيغ ميل المماس للمنحنى على كل نقطة عليه . اما اسحق نيوتن مخترع ومطور فكرة

التفاضل، فكان مهتما في المسائل التي تتعلق بالنهايات في نسبة التغير وقد جابهها في نظريته عن الحركة والجاذبية.

لنأخذ القطع المكافئ $ص = س^2$ ولنحاول إيجاد ميل المماس عند $س = د$ في الرسم نفترض ان $د < ٠$.



لنأخذ $س < د$ ونفترض ان $أ = (د، د^2)$ ، $ح = (س، س^2)$ هما نقطتان على القطع المكافئ كما هو مبين. فمن التعريف فان ميل الوتر أ ح هو

$$\frac{ح ب}{أ ب} = \frac{س^2 - د^2}{س - د} = س + د \text{ لأن } س < د.$$

افترض الآن ان $س$ تقترب من $د$ ، وقد أصبحت عند $س_١$ ، ولنأخذ النقطة المقابلة $ح_١ = (س_١، س_١^2)$ على المنحنى. فميل الوتر الجديد هو $س_١ + د$. وكلما اقتربت $س$ من $د$ وبقيت أكبر من $د$ لنقل $س = س_٢$ أصبح ميل أ ح هو $س_٢ + د$ ، وهذا المقدار يقترب من $٢د$. فإذا تخيلنا متتالية $س_١، س_٢، س_٣، \dots$ بحيث ان $س_١ < د < س_٢ < س_٣ < \dots$ ، $س_١ < د$ فان ميل أ ح يقترب من $٢د$ ($د < \infty$). فمن الطبيعي ان نعتبر ان $٢د$ هو ميل المماس أي. لاننا نفكر في أي انه الخط المعرف بنهاية الاوتار أ ح. ويمكن تطبيق نفس الطريقة لقيم $س > د$.
بقي ان نبين بدقة اكثر ان:

$$(١) \quad \frac{s^2 - d^2}{s - d} \leftarrow 2d \text{ (عندما } s \leftarrow d) \dots \dots \dots$$

نريد ان تقترب الكمية $\frac{s^2 - d^2}{s - d}$ من 2 عندما تقترب s من d بحيث تبقى s \neq d.

وبدقة اكثر نريد ان يكون لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث ان $|s - d| < \delta$ يعطي

$$| \frac{s^2 - d^2}{s - d} - 2 | < \epsilon, \text{ فالشرط } |s - d| < \delta \text{ يتضمن ان}$$

s \neq d.

في الحالة التي ندرسهاخذ $\epsilon = \delta$. اذا كان $\epsilon > 0$ و $\delta = \epsilon$ فان $|s - d| < \delta$ يعطي $| \frac{s^2 - d^2}{s - d} - 2 | < \epsilon$ وهذا فان

$$| \frac{s^2 - d^2}{s - d} - 2 | = | s + d - 2 | = | s - d | < \delta = \epsilon.$$

وقبل اعطاء التعريف الدقيق لنهاية الاقتران عند نقطة نعطي مثالين توضيحيين.

المثال ١.

لنأخذ منحنى المعادلة التكميلية $s = s^3$. فلأي $d \in \mathbb{R}$ نحصل على

$$\frac{s^3 - d^3}{s - d} \leftarrow d^2 \text{ (س } \leftarrow d). \text{ لنحاول برهنة ذلك اعتمادا على تعريف } (\epsilon, \delta)$$

المعطى بعد (١) ويعد استبدال s^2 بـ s^3 ، d^2 بـ d^3 . لأي s ، د نحصل على (س - د)

$$(s^3 - d^3) = (s + d + d^2)(s^2 - sd + d^2) \text{ ، ولهذا فان } |s - d| < \delta \text{ يعطي}$$

$$| \frac{s^3 - d^3}{s - d} - d^2 | = | s^2 + s + d^2 + d^2 | = | s^2 + s + 2d^2 |$$

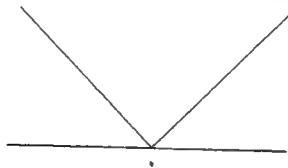
$$\geq |s - d| (|s| + |s| + |d| + |d|)$$

$$(٢) \quad \geq |s - d| (|s| + |s| + |d| + |d|) \dots \dots \dots$$

لأن $|س + د| = |س - د + د| \geq |س - د| + |د|$. يتضح من (٢) كيف نختار δ .
 لأنه إذا كان $\epsilon > 0$ يمكن اختيار $\delta = \frac{\epsilon}{|د| + 1}$. إذن $|س - د| > 0$.
 δ تعطي ان القيمة في (٢) أقل من $\delta (|د| + 1)$. $\epsilon > \delta$.
 وبلغة هندسية فإن ميل المماس لـ $س = س^3$ عند $(د ، ٣د)$ هو $٣د^2$.

المثال ٢ .

مهما يكن ما يعنيه الفرد بكلمة منحنى ، فقد يوجد منحنيات لا مماس لها عند نقطة ما .
 فإذا اتفقنا على ان $ص = |س|$ تمثل منحنيا فان لا يوجد مماس له عند $س = ٠$.
 لنفرض ان امكن انه يوجد مماس للمنحنى $ص = |س|$ عند $(٠ ، ٠)$ وميله $م$ اي
 افترض ان $\frac{|س|}{س} \leftarrow (س \leftarrow ٠)$. نأخذ $\epsilon = ١$ ، إذن يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $٠ < \frac{|س|}{س} \leftarrow (س \leftarrow ٠)$.
 $|س| > \delta$ تعطي $\frac{|س|}{س} \leftarrow (س \leftarrow ٠) > ١$. فباخذ $س = \frac{\delta}{٢}$ نحصل على $|١ - م| > ١$
 وباخذ $س = -\frac{\delta}{٢}$ نحصل على $|١ - م| > ١$. إذن وبكتابة $|١ - م| = ٢$.
 (م) | ويتطبق المتباينة الثلاثية نحصل على $|١ - م| + |١ - م| > ٢$ وهذا تناقض .
 وعدم وجود مماس عند $(٠ ، ٠)$ يتضح ايضا «هندسيا» من مخطط $ص = |س|$:



والتعريف التالي تحليلي محض ولا يعتمد على أي فكرة هندسية :

نهاية الاقتران عند نقطة ؛ لتكن \mathbb{R} مجموعة جزئية من \mathbb{Q} وافترض ان $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$.
افترض كذلك ان نقطة تراكم لـ \mathbb{R} . اذن نقول انه يوجد لـ q نهاية عند a اذا فقط اذا كان
يوجد $\epsilon > 0$ بحيث انه لكل $\delta > 0$ يوجد $\delta = \delta(a, \epsilon) < \epsilon$ بحيث ان $s \in \mathbb{R}$
حيث $|s - a| > \delta$ تعطي $|q(s) - a| > \epsilon$.
نسمي a نهاية q عند a ، ونكتب $q(s) \rightarrow a$ (س) \leftarrow م (أ) أو $q(s) \rightarrow a$ (س) = م .
وايضا نقول ان $q(s)$ تقترب من a عندما تقترب s من a .
يمكن تطبيق هذا التعريف على الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من

R .

والسبب في افتراض ان نقطة تراكم للمجموعة \mathbb{R} هو لضمان وجود $s \in \mathbb{R}$ بحيث
ان $|s - a| > \delta$ لكل $\delta > 0$.
ومن المهم ان نلاحظ ان a ، بسبب عامة ، لا يلزم ان تكون عنصرا في \mathbb{R} ، وليس من
الضروري ان يكون الاقتران q معرفا عند a . كما انه ، بصورة عامة ، لا يوجد علاقة بين a ،
 $q(a)$ عندما تكون $a \in \mathbb{R}$.
وقد ذكرنا في التعريف $\delta = \delta(a, \epsilon)$ للدلالة على ان δ تعتمد بصورة عامة
على كل من a ، ϵ ، وهذا واضح من المثال ١ .

المثال ٣ .

لتكن $\mathbb{R} = (-1, 1)$ ، وعرف $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بق $q(s) = 0$ اذا كانت $s \neq 0$
و $q(0) = 1$. فيكون $q(s) \rightarrow 0$ (س) \leftarrow ، كما سنبين . وفي هذه الحالة فان نهاية q
عند 0 موجودة ولكنها لا تساوي $q(0)$.

لأثبت ذلك لاحظ ان $\epsilon > 0$. افترض ان $\delta < \epsilon$. ونخذ $\delta = 1$. اذن $s \in \mathbb{R}$
حيث $|s - 0| > \delta$ تعطي $s \neq 0$ و $|q(s) - 0| = 0 < \delta$ ، اذن $q(s) \rightarrow 0$ (س) \leftarrow .
ع .

المثال ٤ .

لنكن ق : $(٠, ١) \leftarrow R$ معرفة بـ ق (س) = س . اذن ق (س) $\leftarrow ١$ عندما س $\leftarrow ١$.
 ١ . لأن $١ \in (٠, ١)$ ، وإذا كان $\epsilon > ٠$ نأخذ $\delta = \epsilon$. اذن س $\in (٠, ١)$ و $٠ < |س - ١| < \delta$ تعطي | ق (س) - ١ | = ١ - س $> \epsilon$.

المثال ٥ .

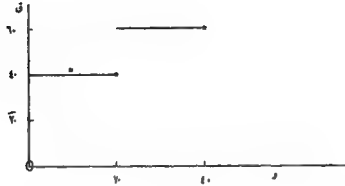
لنأخذ المثال الاصيل ص = س^٢ . خذ اي د $\in P$ وعرف ص = { س $\in R$ | س \neq د }
 د { اي ان س هي R بدون النقطة د . اذن د نقطة تراكم لـ س . لهذا اذا عرفنا ق : س \leftarrow
 R بـ ق (س) = $\frac{س^٢ - د^٢}{س - د}$ نحصل على ق (س) \leftarrow ٢ د (س \leftarrow د) .

المثال ٦ [اقتران مكتب البريد]

إذا كان وزن رسالة مساويا ، او اقل من ، قيمة معينة ، فان تكلفة ارسالها بالبريد تبلغ قيمة ما محددة . وإذا زاد وزنها عن تلك القيمة فان تكلفتها تزيد وتبقى التكلفة ثابتة الى ان يصل الوزن الى قيمة اخرى محددة . وكذلك تزيد التكلفة مع الزمن .

ففي زمن ما كان الاقتران ق : { الوزن بالغرام } \leftarrow { التكلفة بالفلوس } معرفا كالتالي : ق (٠) = ٤٠ اذا كان $٠ < و \geq ٢٠$ وق (٠) = ٦٠ اذا كان $٢٠ > و \geq ٤٠$. نتوقع طبعاً ان ق (٠) = ٠ . ولنفرض ان مكتب البريد يرفض الرسائل التي يزيد وزنها عن ٤٠ غراما .

ولنهمل وزن الطوابع لانها تزيد من وزن الرسالة مما يؤدي الى زيادة التكلفة .
 فالصورة كما في الشكل :



إذا كانت $s = (0, 40)$ فإنه من السهل أن نرى أن $q : s \leftarrow \{ \text{التكاليف} \}$ لانهاية لها عند ٢٠. ولكن إذا كانت $s = (40, 20)$ فإن $q : s \leftarrow \{ \text{التكاليف} \}$ لها نهاية عند ٢٠، وفي الحقيقة أن q (و) $q \leftarrow (20)$. يبين هذا المثال أن وجود النهاية قد يعتمد على مجال الاقتران.

المثال ٧.

عرف $q : R \leftarrow R'$ بدق (س) = ٠ إذا كان س عددا نسبيا و q (س) = ١ إذا كان س عددا غير نسبي. إن محاولة رسم مخطط لهذا الاقتران عديمة الجدوى. ولكن نقول على سبيل التقريب أن q تقفز إلى أعلى وإلى أسفل باستمرار عندما تتحرك s على الخط الحقيقي. سوف نثبت أنه لا يوجد نهاية لـ q عند أي نقطة $a \in R$ ، فلنفرض أن أمكن أنه يوجد $a \in R$ بحيث أن q (س) $\leftarrow m$ (س) $\leftarrow a$. خذ $\epsilon = 1$ ، إذن يوجد $\delta < \epsilon$ بحيث أن $|s - a| > \delta$ نعطي q (س) $\leftarrow 1$ إذا كان $a > 1$. فإنتار عددا غير نسبي $s \in (a, a + \delta)$ ، لهذا فإن q (س) $\leftarrow 1$ وإذا كان $a \in Q$ فإنتار نختار عددا نسبيا $s \in (a, a + \delta)$ ، لهذا فإن q (س) $\leftarrow 1$ وإذا كان $a \in Q$ فإنتار نحصل على تناقض.

والنتيجة التالية تصف q (س) $\leftarrow m$ (س) $\leftarrow a$ بدلالة المتاليات.

النظرية ١ .

ق (س) \leftarrow م (س \leftarrow أ) إذا وفقط إذا كان ق (س_ن) \leftarrow م (ن \leftarrow ∞) لجميع المتتاليات (س_ن) في م_ه التي تحقق س_ن \nrightarrow أ_ن \leftarrow ∞ .

البرهان .

افرض ان ق (س) \leftarrow م (س \leftarrow أ) . اذن م \ni م_ه و_ه $>$ |س - أ| $\delta >$ تعطي |ق (س) - م| $\leq \epsilon$ ، لأي $\epsilon > 0$. خذ اي متتالية (س_ن) كالموصوفة في النظرية (يوجد على الاقل متتالية واحدة مثلها من تعريف نقطة التراكم) . الآن يوجد ن_ه = ن_ه (δ) = ن_ه (ϵ) لأن δ تعتمد على ϵ ، بحيث ان $\delta > |س - أ|$ لكل ن \leq ن_ه . اذن |ق (س_ن) - م| $\leq \epsilon$ لكل ن \leq ن_ه اي ان ق (س_ن) \leftarrow م (ن \leftarrow ∞) .

وبالعكس افترض ان ق (س_ن) \leftarrow م (م \leftarrow ∞) لجميع المتتاليات (س_ن) الموصوفة ولكن افترض ان ق (س) \nrightarrow م (س \leftarrow أ) . اذن يوجد $\epsilon > 0$ بحيث انه لجميع $\delta > 0$ يوجد س \ni م_ه ، $\delta > |س - أ|$ و |ق (س) - م| $\leq \epsilon$.

لنكن ن \ni N خذ $\delta = \frac{1}{N}$. اذن يوجد س_ن \ni م_ه ، $\delta > |س - أ|$ و $\frac{1}{N} > |س - أ|$ ق (س_ن) \leftarrow م (م \leftarrow ∞) . اذن يوجد متتالية (س_ن) في م_ه ، س_ن \nrightarrow أ_ن \leftarrow ∞ (لكن ق (س_ن) \leftarrow م . مما يناقض الفرض . وهذا يثبت النظرية .

نتيجة .

إذا كان لـ ق نهاية عند أ فان هذه النهاية وحيدة .

البرهان .

افرض ان ق (س) \leftarrow م_ه (س \leftarrow أ) و ق (س) \leftarrow م_ه (س \leftarrow أ) . يوجد (س_ن) \ni م_ه بحيث ان ق (س_ن) \leftarrow م_ه و ق (س_ن) \leftarrow م_ه .
اذن ومن النظرية ٢ ، الفصل ٤ نستنتج أن م_ه = م_ه .

النظرية ٢ .

إذا كان ق (س) \leftarrow م_١ (س \leftarrow أ) وهـ (س) \leftarrow م_٢ (س \leftarrow أ) فإن ق (س) + هـ (س) \leftarrow م_١ + م_٢ (س \leftarrow أ)، ق (س) - هـ (س) \leftarrow م_١ - م_٢ (س \leftarrow أ)، ق (س) - هـ (س) \leftarrow م_١ م_٢ (س \leftarrow أ)، حـ ق (س) \leftarrow حـ م_١ (س \leftarrow أ) لكل ح $\in \mathbb{C}$.

وكذلك اذا كان $m \neq 0$ و $(s) \neq 0$ في س $\frac{q}{h}$ فان $\frac{q}{h} \leftarrow \frac{q}{h} \frac{(s)}{(s)} \leftarrow (s) \leftarrow 0$.

البرهان .

ينتج هذا مباشرة من التعريف. وبطريقة أخرى يمكن استخدام النظرية ١ مع النتائج المقابلة للمنتاتيات في النظرية ٣ في الفصل الرابع.

۸. ایشانی .

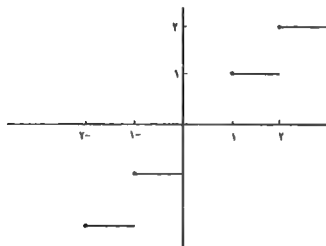
لنفرض ان h ، د اعداد مركبة. فيكون

$$(3) \dots\dots\dots (1 \leftarrow x) \leftarrow \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} = (2) \text{ ق}$$

هذا واحد من الأمثلة الشائعة التي لا يعطى بها مجال للاقتراح . لهذا فإنه لا معنى للحديث عن النهايات هنا . ولكن سنحاول معرفة هل الاقتراح معرف على مجموعة والصفر نقطة تراكم لهذه المجموعة . ففي الحقيقة ، عندما ع ← نلاحظ ان ع^٢ ← ٥ ، دع^٢ ← ٥ ، حسب النظرية ٢ ، لذا فإن دع^٢ - حع + ١ ← ١ . لهذا فإنه يوجد ٥ < بعث ان |دع^٢ - حع| + ١ < $\frac{1}{n}$ لكل |ع| > ٥ . لهذا فإن معرف على القرص المفتوح {ق ، ٥} . ونحصل

على النتيجة ٣ من النظرية ٢. وبطريقة مشابهة نجد ان $\frac{ع}{ع+١} \leftarrow \frac{١-ت}{٢} \leftarrow (ع) \leftarrow$ (ت).

واحيانا نستخدم في R فكرة النهاية من جهة واحدة. ولتوضح ذلك بمثال: عرف ق : $R \leftarrow Z$ بق (س) = [س] اعني اكبر عدد صحيح في س. واليك مخطط ص = [س] موضحا ادناه.



اذا كانت س = R فان نها \leftarrow [س] غير موجودة. ولكن اذا كانت س = (٠ ، ١) وحلدنا ق على (٠ ، ١) فان نها \leftarrow [س] = ٠ هذا لان س تقترب من الصفر على القيم الموجبة. وفي هذه الحالة نكتب نها \leftarrow [س] = ٠. كذلك نكتب نها \leftarrow [س] = -١. وفي الاقترانات العامة ق وعند وجود النهاية من جهة واحدة فاننا نتحدث عن النهاية اليمنى ق (أ+) والنهاية اليسرى ق (أ-). حيث

$$ق (أ+) = \text{نها} \leftarrow [س] \text{ وق } (أ-) = \text{نها} \leftarrow [س].$$

ولا يتضمن تعريف نهاية الاقتران عند نقطة، الحالة التي توجد بها متالية (ق_n) تقارب

نقطة ما عندمان $\leftarrow \infty$. لهذا يجب وضع تعريفات لمعالجة حالات النهايات عند $\pm \infty$ و «النهايات غير المنتهية» . والجدول التالي يوضح جميع الاحتمالات للاقتراانات الحقيقية .

\leftarrow س	ا	ا	ا	∞	∞	∞	$\infty -$
ق (س) \leftarrow	م	∞	$\infty -$	م	∞	$\infty -$	∞

لقد عرفنا معنى ق (س) \leftarrow م (س) \leftarrow ا وهو العمود الاول . وفي العمود الثاني نعرف ق (س) \leftarrow ∞ (س) \leftarrow ا بقولنا: لاي ل $\exists R$ يوجد $\delta < \epsilon$ بحيث ان س \in سين و $|s - a| > \delta$ تعطي ق (س) $< \epsilon$.
وباستبدال ق (س) $< \epsilon$ ل بروق (س) $> \delta$ نعرف معنى ق (س) \leftarrow $\infty -$ (س) \leftarrow ا .
لنأخذ العمود الرابع: ق (س) \leftarrow م (س) \leftarrow ∞ . المشكلة هنا ان ∞ لا تدخل ضمن نقط تراكب مجموعة جزئية من R . ويمكن معالجة هذا بان نقول ان ∞ هي نقطة تجمع لـ سين $\Rightarrow R$ اذا وفقط اذا كان لكل ل $\exists R$ ، (ل ، ∞) \cap سين $\neq \emptyset$ اي ان كل مجموعة مفتوحة {س $\in R$ | س $< \epsilon$ } تحوي نقاطا من سين .
لهذا اذا كان ق : سين $\leftarrow R$ ، ∞ نقطة تجمع لـ سين فاننا نعرف ق (س) \leftarrow م (س) \leftarrow ∞ اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon < \delta$ يوجد س. = س. (ϵ) بحيث ان س \in سين ، س $< \delta$ تعطي |ق (س) - م| $> \epsilon$.

المثال ٩ .

افرض ان ق : $N \leftarrow R$ ، اي ان ق متتالية حقيقية . اذا اخذنا ل $\exists R$ فانه يوجد ن $\exists N$ بحيث ان ن $< \epsilon$ (من مسلمة ارخميدس) . اذن من تعريفنا اعلاه فان ∞ هي نقطة تراكب لـ N . فمن الواضح الآن ان التعريف الجديد لـ ق (س) \leftarrow م (س) \leftarrow ∞ يطابق التعريف الاصلي لـ ق (ن) \leftarrow م (ن) \leftarrow ∞ ، في الحالة الخاصة التي تكون فيها سين = N .

المثال ١٠

$$\text{ان } \frac{1-s^3}{1-s^2} \leftarrow \frac{1-s}{2} \leftarrow (s \leftarrow \infty), \text{ لان الاقتران معرف على } \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$(s \leftarrow \infty) \text{ و } s < \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ تعطي}$$

$$\frac{1-s^3}{1-s^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-2} \leftarrow \frac{1-s}{2} \leftarrow (s \leftarrow \infty).$$

أما الاعمدة الباقية في الجدول فاننا نتركها للقاريء لكتابة التعريفات لها.

وبالنسبة للاقترانات ق: س ← ∅ حيث س ⊃ ∅ فانه يمكن ان نعرف |ق(ع)| ← ∞
 (ع ← أ)؛ ق(ع) ← م (أ ← |ع| ← ∞)؛ |ق(ع)| ← ∞ (أ ← |ع| ← ∞).
 على سبيل المثال افرض انه لكل نق < ∅ ان {ع} ⊃ ∅ |ع| < نق {نحوي نقطة
 من س. اذن ق(ع) ← م (أ ← |ع| ← ∞) اذا فقط اذا كان لكل ε < ∅ يوجد نق < ∅
 بحيث ان ع ⊃ س، |ع| < نق تعطي |ق(ع) - م| > ε.

المثال ١١

$$\text{ان } \frac{e}{e+1} \leftarrow 0 \leftarrow (e \leftarrow \infty), \text{ لان } |e| < 1 \text{ تعطي } |e+1| \leq |e| - |e+1|$$

$$1 < 0, \text{ لهذا فان الاقتران معرف على } \{e \mid |e| < 1\}.$$

$$\text{لهذا فاذا كان } |e| < \sqrt{2} \text{ فان}$$

$$|e| \geq \frac{e}{e+1} \geq \frac{e}{1-e} \leftarrow 0 \leftarrow (e \leftarrow \infty).$$

تمارين ٦-١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١- إذا كان $N \ni$ فعين ميل المماس لـ \mathcal{C} عند (a, a') .

٢- عرف: $[\infty, 0) \leftarrow R$ بق (س) \sqrt{s} . استعمل تعريف (E, e). لاثبات

ان ق (س) $\leftarrow \sqrt{a}$ (س $\leftarrow a$) لكل $a \in [\infty, 0)$. من الافضل عزل الحالة $a = 0$.

٣- اثبت انه يوجد مماس لـ \mathcal{C} عند (a, \sqrt{a}) لكل $a > 0$ ، ولكن لا يوجد مماس

عند $(0, 0)$ بمعنى ان $\frac{\sqrt{s}}{s} \leftarrow \infty$ (س $\leftarrow +0$). نقول هندسيا ان المماس رأسي، أو

ميله ∞ ، ولكن في التحليل فاننا نعتبر فقط المماسات التي ميلها عدد حقيقي منته.

٤- افرض ان $k = (a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n)$ حيث a_0, a_1, \dots اعداد مركبة

ثابتة وان $n \neq 0$. نسمي الاقتران ق : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ حدودية في (ع) درجتها n .

استخدم النظرية ٢ لاثبات ان ق (ع) \leftarrow ق (أ) (ع \leftarrow أ).

اذا كان $n \leq 1$ فاثبت ان | ق (ع) | $\leftarrow \infty$ (ع $\leftarrow \infty$)، اي اثبت انه لكل $L <$

∞ يوجد δ بحيث ان | ق (ع) | $< L$ لكل | ع | $< \delta$.

٥- عرف ق : $R \leftarrow R$ بق (س) $= s - [s]$ ، حيث $[s]$ هو اكبر عدد صحيح في

س. ناقش وجود النهايات والنهايات من جهة واحدة لـ ق عند كل $a \in R$. هل تقترب ق

(س) من نهاية عندما $s \leftarrow \infty$ ؟

قد يساعد رسم الاقتران قبل محاولة الحل.

٦- عرف ق (س) $= \frac{[s]}{s}$. اثبت ان ق محصورة على $(0, \infty)$ اي انه يوجد عددان

ثابتان δ, ϵ ، لـ بحيث ان $\delta \leq$ ق (س) $\leq \epsilon$ لـ لكل $s < 0$ هل توجد نهايتان لـ ق (س)

إذا كانت النهاية موجودة جد قيمتها. كذلك ما هي ق (+0). ارسم بدقة مخطط ص = ق (س) على الفترة (0 ، 4].

٧- افرض ان ق : [١ ، ∞) ← R بحيث ان ق (س) ← م (س) ← ∞. اثبت ان المتتالية ق (ن) = ق (١)، ق (٢)، ... تقاربية الى م. اعط مثالا لاقتران هـ: [١ ، ∞) ← R بحيث ان هـ (ن) متتالية صفرية ولكن هـ (س) لا تقترب من نهاية عندما س ← ∞.

٨- افرض ان ق ، هـ: (٠ ، ١) ← R ، افرض ان $\exists (٠ ، ١)$ ،

(١) اثبت ان ق (س) ← م (س) ← أ تعطي | ق (س) | ← م | ق (س) |.

(٢) اذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} | ق (س) | = ٠$ هل تكون نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س)$ موجودة؟ اذا كان الجواب بالاجاب ما قيمتها. اثبت جوابك.

(٣) اذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س) = ٠$ هل تكون نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س)$ هـ (س) موجودة بالضرورة؟ اثبت صحة ذلك أو بطلانه.

(٤) اذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س) = ٠$ وكانت هـ محصورة على (٠ ، ١). هل تكون نها ق (س) هـ (س) موجودة؟ اذا كان الجواب بالاجاب ما هي قيمتها؟ برهن ذلك.

(٥) اذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} | ق (س) |$ موجودة وموجبة، هل تكون نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س)$ موجودة بالضرورة؟ برهن.

(٦) اذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} ق (س) = ٠$ ، و $| ق (س) | < ٠$ عندما $s \in (٠ ، ١)$ ، هل

تكون نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{١}{ق (س)}$ موجودة بالضرورة؟ برهن.

٩- في المثال ٧ أعطينا مثالا لاقتران بحيث انه لا توجد نهاية له عند اي نقطة في R. اعط مثالا مع البرهان لاقتران هـ : R ← R لا توجد له نهاية الا عند الصفر.

١٠- اعط مثالا لاقتران ق : R ← R له نهاية عند كل نقطة في R يحقق ق (س) ← ١ (س) ← ١، ق (س) ← ١ (س) ← ١، ق (س) ← ٠ (س) ← ٠، ق (س) ← ٠ (س) ← ٠. هل الاقتران محدود على R.

٢ . الاقترانات الوتيرية

لنتكن من مجموعة غير خالية وجزئية من R وليكن Q : $\leftarrow R$. نعرف الاقتران الوتيري فنقول ان Q وتيري على S اذا كان متناقصا او متزايدا حيث
 (أ) يكون Q متزايدا على S اذا وفقط اذا كان Q (س) \geq (ص) عندما يكون $S >$
 ص و S ، ص \exists .
 (ب) يكون Q متناقصا على S اذا وفقط اذا كان Q (س) \leq (ص) عندما يكون S ،
 ص \exists . و $S >$ ص .
 نعرف «متزايدا فعلا» و «متناقصا فعلا» بتغيير \geq الى $>$ في (أ) و \leq الى $<$ في (ب) .

المثال ١٢ .

عرف Q : $\leftarrow R$ بق (س) = ص^٢ . Q اقتران متزايد فعلا على R . لاثبات ذلك
 نأخذ S ، ص $\exists R$ ، $S >$ ص ، (س^٢ - ص^٢) = (س - ص) (س + ص + ص^٢) ، و
 هـ (س ، ص) = س^٢ + ص + ص = ص^٢ + (س + ص^٢) + ص^٣ . هناك حالتان ، ص
 = ٠ و ص \neq ٠ ، اذا كان ص = ٠ فان س $>$ ٠ و هـ (س ، ص) = س^٢ < ٠ ومنه س^٢ - ص^٣
 ، ٠ > .

اذا كان ص \neq ٠ فان هـ (س ، ص) \leq ص^٣ + ص^٢ ومنه ايضا س^٢ - ص^٣ > ٠ . في الحالتين
 حصلنا على Q (س) > (ص) لهذا فان Q متزايد فعلا على R .

المثال ١٣ .

عرف Q : $\leftarrow [١ ، ٠]$ بق (س) = ١ اذا كان ١ \geq س \geq ٠ و $\frac{1}{٢}$ و (س) = ٠ .

إذا كان $\frac{1}{p} > s \geq 1$. من الواضح ان ق متناقص (ليس فعلا) على $[1, 0]$. لاحظ ان ق «تقفز» عند $s = \frac{1}{p}$ وان لـ ق نهايات من جهة واحدة عند $\frac{1}{p}$ ، اي ان ق $(-\frac{1}{p}) = 1$ وق $(\frac{1}{p}+) = 0$. ومع ذلك فانه لا يوجد لـ ق نهاية عند $\frac{1}{p}$.

ان وجود النهايات من جهة واحدة هو من خصائص الاقتارات الوترية . والنظرية التالية تعالج الاقتارات المتزايدة . وهناك نتيجة مشابهة في حالة الاقتارات المتناقصة .

النظرية ٣ .

إذا كان ق : $(أ ، ب) \leftarrow R$ متزايدا على $(أ ، ب)$ فان النهاية اليمنى والنهاية اليسرى ق $(س+)$ ، ق $(س-)$ تكونان موجودتين لكل $s \in (أ ، ب)$ ويكون ق $(س-)$ \geq ق $(س)$ \geq ق $(س+)$.

البرهان .

خذ $s \in (أ ، ب)$ ولناخذ المجموعة غير الخالية $\{ق(ر) | r > s > s\}$. اذا كان $s \in \text{ص}$ فان $ق(ر)$ لعنصر ما $\in (أ ، س)$. بما ان ق متزايدة فان ق $(ر) \geq ق(س)$ ، لهذا فان $ق(س) \geq ق(ر)$ لكل $ص \in \text{ص}$. ومن مسلمة الحاصر الاعلى نستنتج انه يوجد اصغر حاصر اعلى $م$ لـ $س$ ، $م \geq ق(س)$.

سوف نثبت ان $م = ق(س-)$ حيث

$$ق(س-) = \text{نها} \leftarrow ق(ص) \dots \dots \dots (٤)$$

لاثبات ذلك خذ $\epsilon > 0$ فبما ان $م$ هي اصغر حاصر اعلى لـ $س$ فانه يوجد $\delta \in (أ ، س)$ بحيث ان $م - \epsilon > ق(ر) \geq م$.

لناخذ $\delta = س - ر < 0$. اذن $س - \delta > س > س$ تعطى ق $(ر) \geq$

ق(ص)، لهذا فان $m - \epsilon > q(p) \geq q(v) \geq m + \epsilon$ ، اي ان $|q(v) - m| > \epsilon$ ، مما يثبت (٤). وبطريقة مشابهة نثبت ان $q(v) \geq q(s) + \epsilon$ حيث $q(s) = 0$. وهكذا اثبتنا النظرية .
 وهناك فكرة «تزايد الاقتران عند نقطة» وهذه سوف نستخدمها في النظرية ١٢ من البند ٣ من الفصل ٧ . اما الآن فسوف نعطي تعريف التزايد الفعلي عند نقطة ما . ونحصل على تعريف التناقص الفعلي باجراء التغييرات المناسبة في المتباينات .

التزايد الفعلي عند نقطة .

افرض ان $q : (a, b) \leftarrow R$ وافرض ان $\exists (a, b)$. نقول ان q متزايد فعلا عند c اذا وفقط اذا كان يوجد فترة $K(c, \delta)$ بحيث انه لكل $s \in K(c, \delta)$ ، $q(s) > q(c)$ اذا كان $s > c$ وكان $q(s) < q(c)$ اذا كان $s < c$.

ملاحظة .

يمكن للاقتران ان يكون متزايدا فعلا عند نقطة دون ان يكون متزايدا فعلا في اي فترة تحوي تلك النقطة . فعلى سبيل المثال عرف $q : (-1, 1) \leftarrow R$ بـ $q(s) = s$ اذا كان s عددا نسبيا و $q(s) = s^2$ اذا كان s عددا غير نسبي . اذن $q(0) = 0$ و $q(s) > 0$ اذا كان $s > 0$ ، $q(s) < 0$ اذا كان $s < 0$ ، اذن q متزايد فعلا عند الصفر ولكن اذا كانت (a, b) فترة تحوي الصفر واخذنا c عددا نسبيا بحيث ان $0 < c < a$ ص $\{1, b\}$ فان $q > c$. لنأخذ الآن s عددا غير نسبي بحيث ان $c < s < c + \frac{1}{3}$. اذن $s^3 > c$ ، أي ان $q(s) > q(c)$ مع ان $c > s$. اذن q ليس متزايدا فعلا على (a, b) .

تمارين ٦ - ٢

(تجدد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - عرف ق : $R \leftarrow R$ بـ ق (س) = س^٢ - س^٣ + ١ . عين الفترات ف_١ ، ف_٢ ، ف_٣ حيث ف_١ U ف_٢ U ف_٣ = R وحيث ان ق متزايد على ف_١ وف_٢ ومتناقص على ف_٣ .
٢ - افرض ان ق : [أ ، ب] \leftarrow متزايد فعلا على [أ ، ب] . اثبت ان الاقتران النظير ق^{-١} موجود وهو ايضا متزايد فعلا في مجاله .

٣ - اعط مثالا لاقتران ق : [٠ ، ٢] \leftarrow R بحيث يكون واحدا لواحد ولا يكون وتيريا .
٤ - اذا كان ق ، هـ اقترانين متزايدين على [٠ ، ١] . هل من الضروري ان تكون الاقترانات التالية متزايدة (أ) ق + هـ ، (ب) ق - هـ ، (ج) ق هـ ؟
٥ - اذا كان ق متزايدا على (أ ، ب) وكان أ > س > ص > ب فاثبت ان ق (س) + ق (ص) \geq ق (هـ) .

٦ - لنفرض ان ق : [أ ، ∞) \leftarrow متزايدة . اثبت ان (أ) اذا كان ق محصورا من اعلى فان ق (س) تقترب من نهاية ما عندما س \leftarrow ∞ ، (ب) اذا كان ق غير محصور فان ق (س) \leftarrow ∞ (س) \leftarrow ∞ .

٧ - افرض ان ق : $R \leftarrow R$ اقتران له الخاصية الجمعية ، اي ان ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص) لكل س ، ص \in R . اذا كان ق متزايدا على R فاثبت ان ق (س) \leftarrow ٠ (س) \leftarrow ٠ .

٨ - افرض ان ق متناقص على [أ ، ب] وافرض ان {س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن} هي مجموعة نقاط تحقق أ = س_١ > س_٢ > ... > س_ن = ب . عين عددا م بحيث ان

$$\sum_{i=1}^n |ق(س_i) - ق(س_{i-1})| \geq م$$

٩ - افرض ان م \in R * جد اقتران متناقصا ق : (٠ ، ١) \leftarrow R وبمجموعة نقاط {س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن} حيث ٠ < س_١ < س_٢ < ... < س_ن < ١ بحيث ان

$$\sum_{i=1}^n |ق(س_i) - ق(س_{i-1})| < م .$$

٣. الاقترانات المتصلة

ان مفهوم الاتصال من اهم مفاهيم التحليل والتبولوجيا واكثرها فائدة فان يكن عند القاريء افكار بدائية عن الموضوع فيستحسن ان تترك مثل هذه الافكار جانباً الى ان ندرس التعريف الرسمي لها بالتفصيل . فعلى سبيل المثال يقال احياناً ان الاقتران المتصل هو الاقتران الذي يمكن رسم مخططه دون رفع القلم عن الورقة . هذا اغراق في التحديد لانه يتطلب ان يكون مجال الاقتران فترة (مترابطة بمعنى ما) على اي حال فان التحليل لا يتعلق برسم المخططات ، مهما كانت هذه مفيدة أو مساعدة في دعم الحلول المنطقية أو الانجاء بها .

ان جزءاً كبيراً من التعريف التالي مشترك مع تعريف نهاية الاقتران عند نقطة ، وعلى القاريء ان يلاحظ الفرق بعناية .

الاقتران المتصل

لنفرض ان \mathbb{R} مجموعة جزئية غير خالية في \mathbb{C} ، وان $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. نعتبر q متصلاً عند $a \in \mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ بحيث ان $s \in \mathbb{R}$ ، $|s - a| < \delta$ تعطي $|q(s) - q(a)| < \epsilon$.
ونعتبر q متصلاً على \mathbb{R} اذا وفقط اذا كان q متصلاً عند كل نقطة في \mathbb{R} .
ويمكن تطبيق هذا التعريف على الاقترانات ذات القيم الحقيقية والمعرفة على مجموعات جزئية من \mathbb{R} .

المثال ١٤ .

عرف $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $q(s) = s^2$. لنبرهن ان q متصل على \mathbb{R} . خذ اي $a \in \mathbb{R}$ وافرض ان $\epsilon > 0$. الآن $|q(s) - q(a)| = |(s - a)(s + a)|$ وكذلك $|s + a|$

$$\geq |s - |f + |f + 1| | . \text{ فإذا اخذنا } \delta = |s - 1| \text{ فإن } \left\{ \frac{\epsilon}{|f + 1|}, 1 \right\} \text{ فإن } |s - f| >$$

δ تعطي $|f - q|$ (س) - q (أ) $> \epsilon$.
اذن q متصل على R .

المثال ١٥ .

ليكن $q : N \rightarrow \mathbb{C}$ اي اقتران . فيكون q متصلا على N ، كما سنبرهن . وقد يبدو هذا غير محتمل من نظرة بدئية ولكنه يبين سعة تعريفنا المعتمد .

لنأخذ اي $f \in N$ وأي $\epsilon > 0$. ولنأخذ $\delta = 1$. فإذا كان $s \in N$ ، $|s - f| > 1$ فإن $s = f$. وهذا يعطي $q(s) = q(f)$ ومنه $|q(s) - q(f)| < \epsilon$. اذن q متصل على f . لاحظ انه تم اختيار δ بحيث لا تعتمد على ϵ او f وهذه حالة نادرة جدا .

المثال ١٦ .

عرف $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $q(e) = |e|$. اذن q متصل على \mathbb{C} لانه اذا كان $f \in \mathbb{C}$ ، $\epsilon > 0$ فإن $|f - e| > \epsilon$ تعطي $|q(e) - q(f)| \geq ||f| - |e|| \geq |f| - |e| \geq \epsilon$. لاحظ اننا استخدمنا النظرية ٢٠ من الفصل ٢ .

والنتيجة التالية تعرف الاتصال بدلالة المجموعات المفتوحة وهي اساس تعريف الاتصال في الفضاءات التبولوجية . ولن نستخدم هذا التعريف في برهنة النظريات اللاحقة ويستطيع القاريء اذا رغب ان يملأه .

النظرية ٤ .

يكون الاقتران $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ اقترانا متصلا اذا وفقط اذا كان اصل الصورة لكل

مجموعة مفتوحة هو مجموعة مفتوحة أيضا.

الرهان.

لنفرض ان q متصل على C كما عرفناه. ولناخذ اي مجموعة مفتوحة $H \subset C$. فاذا كان $q^{-1}(H) = \emptyset$ فان $q^{-1}(H) \subset \text{الفصل } 3$. واذا كان $q^{-1}(H) \neq \emptyset$ خذ $e \in q^{-1}(H)$ ، اذن $q(e) \in H$. وبما ان H مفتوحة فانه يوجد قر (ق) (e, δ) ، ومن اتصال q فانه يوجد $\delta' < \delta$ بحيث ان $e \in (e, \delta')$ ، تعطي $q(e)$ $\in q^{-1}(H)$ ، ومن هذا ينتج ان $q^{-1}(H) \subset (e, \delta')$ ، واذن $q^{-1}(H) \subset \text{مفتوحة}$.

وبالعكس افرض ان q^{-1} (ح) مفتوحة لكل ح مفتوحة، اذن q^{-1} (قرق) (ع)،
 ((ع) مفتوحة لكل ع. $\exists \tilde{e} \in E$ ولكل $e \in E$ اذن يوجد

قرع، ϵ ، \supset 1^{-} (قرق (ع)، ϵ ، \ll (٥)
 لهذا إذا كان أ-ع. $| \epsilon > \epsilon$ فإن ع \supset قرع، ϵ ، ومنه ق (ع) \supset قرق (ع)، ϵ
 من (٥)، وهذا يعطي ا (ق) - ق (ع)، $| \epsilon > \epsilon$. إذن متصل على كل نقطة ع $\in \mathbb{R}$.
 وهذا يثبت النظرية.

النظرية ٥ .

افرض ان ق: [أ، ب] \leftarrow R . يكون ق متصلا على [أ، ب] اذا فقط اذا كان ق: (س) \leftarrow ق (ح) (س \leftarrow ح) لكل ح \in [أ، ب].

البرهان .

لنفرض ان q متصل على $\{a, b\}$. حذ نقطة تجمع لـ $\{a, b\}$ ، وإذا كان $\epsilon <$
فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $\{a, b\} \cap (s - \delta, s + \delta) \neq \emptyset$ تعطي $|q(s) - q| < \epsilon$

(ح) $\epsilon > |$. اذن $\exists [أ ، ب] \text{ و } 0 < |س - ح| > \epsilon$ تعطي $|ق (س) - ق (ح)| > \epsilon$ ، لهذا فان $ق (س) \leftarrow ق (ح) (س \leftarrow ح)$.

وبالعكس ، افرض ان $ق (س) \leftarrow ق (ح) (س \leftarrow ح)$ لكل $ح \in [أ ، ب]$. فاذا كان $\epsilon < 0$ فانه يوجد $\delta < 0$ بحيث ان $\exists [أ ، ب]$ ، $0 < |س - ح| < \delta$ تعطي $|ق (س) - ق (ح)| > \epsilon$. ولكن $س = ح$ تعطي $|س - ح| = 0$ $|ق (س) - ق (ح)| > \epsilon$. اذن $\exists [أ ، ب] \text{ و } |س - ح| > \delta$ تعطي $|ق (س) - ق (ح)| > \epsilon$ اذن $ق$ متصل على $ح$. وهذا يتم البرهان .

سوف ندرس الآن البناء الجبري للاقتارات المتصلة . افرض ان $س$ مجموعة غير خالية جزئية من \mathbb{C} ، $ق$ ، $هـ$ اي اقرانين من $س$ الى \mathbb{C} . تعرف الاقترانات $ق + هـ$ ، $أق$ ، $ق هـ$ ، $|ق|$ ، $\frac{1}{ق}$ على $س$ كما يلي (تتحقق جميع المعادلات لكل $س \in \mathbb{C}$) :

$$(ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س)$$

$$(أق) (س) = أ (ق (س))$$

$$(ق هـ) (س) = ق (س) هـ (س)$$

$$|ق| (س) = |ق (س)|$$

$$\frac{1}{ق} (س) = \frac{1}{ق (س)} \text{ على شرط ان } ق (س) \neq 0 .$$

والنتيجة التالية تعالج اتصال توافق بسيط لاقترانات متصلة .

النظرية ٦ .

افرض ان $س$ مجموعة غير خالية ، جزئية من \mathbb{C} وافرض ان $ق$ ، $هـ$ اقرانان متصلان على $س$. اذن لأي $ب$ ، $ح \in \mathbb{C}$ يكون

(١) ب ق + ح ه متصل على س .

(٢) | ق | متصل على س ه .

(٣) $\frac{1}{ق}$ متصل على س بشرط ان ق (س) * ٠ لكل س \exists س ه .

(٤) الاقتران المتصل لاي اقتران متصل هو اقتران متصل اي انه اذا كان ه متصلا على س وكان ق متصلا على ه (س) فان ق \circ ه يكون متصلا على س .

البرهان .

سوف نبرهن (١) ، (٤) ونترك (٢) ، (٣) كتارين . لنأخذ اي \exists س ه و $\epsilon > ٠$. بما ان ق متصل على أ فانه يوجد δ بحيث ان س \exists س ه و | س - أ | $< \delta$ تعطي | ق (س) -

ق (أ) | $< \frac{\epsilon}{(1+|ب|)^2}$. وبشكل مشابه فان اتصال ه على أ يعطي | ه (س) - ه (أ) |

$< \frac{\epsilon}{(1+|ح|)^2}$ لكل س \exists س ه و | س - أ | $< \delta$ لعنصر ما $\delta < ٠$. فاذا اخذنا

$\delta = \min \{ \delta , \delta \}$ فان س \exists س ه و | س - أ | $< \delta$ تعطي؛

| (ب ق - ح ه) (س) - (ب ق - ح ه) (أ) | \leq | ب ق (س) - ب ق (أ) | + | ح ه (س) - ح ه (أ) |

(س) - ح ق (أ) | $\leq \frac{\epsilon}{(1+|ب|)^2} + \frac{\epsilon}{(1+|ح|)^2}$ ، وهذا يثبت اتصال ب ق

+ ح ه عند أ . ولأثبت اتصال ق ه عند أ نكتب :

ق (ه) (س) - ق (ه) (أ) = ق (س) - ه (س) - ه (أ) + ه (أ) - ق (س) - ق (أ) (أ)

= ق (س) - ق (أ) + ق (أ) - ه (س) - ه (أ) + ه (أ) - ق (س) - ق (أ) . .

(٦)

الآن | ق (س) - ق (أ) | $> \epsilon$ اذا كان | س - أ | $< \delta$ وكذلك | ق (س) - ق (أ) | $>$

$\frac{\epsilon}{2(1+|h(A)|)} |A| - \epsilon > 0$. كذلك $|h(A) - h(A)| > \epsilon$
 $\frac{\epsilon}{2(1+|h(A)|)} |A| - \epsilon > 0$. لهذا اذا كان \exists $|A| - \epsilon > 0$
 $\{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \}$ فان (ϵ_1) تعطي $|h(A) - h(A)| > \epsilon$. اذن Q هـ متصل عند A مما يثبت (١).

ولاثبات (٤) نخذ \exists $\epsilon > 0$. الآن $h(A) \in (h(A) - \epsilon, h(A) + \epsilon)$ و Q متصل على $h(A)$ ، اذن يوجد δ بحيث ان \exists $h(A) - \delta < h(A) < h(A) + \delta$ تعطي $|h(A) - h(A)| > \epsilon$.
 Q هـ $|h(A)| > \epsilon$.

ولكن هـ متصل على A . اذن يوجد $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ بحيث ان \exists $|h(A) - h(A)| < \delta$ تعطي $|h(A) - h(A)| > \epsilon$. اذن Q هـ $|h(A) - h(A)| > \epsilon$.
 $\delta > 0$ وهذا يعطي $|h(A) - h(A)| > \epsilon$ $|h(A) - h(A)| > \epsilon$ $|h(A) - h(A)| > \epsilon$ $|h(A) - h(A)| > \epsilon$.
 $\epsilon > 0$ ، اذن Q هـ متصل على A .

نتيجة.

اذا كانت M (ي) هي مجموعة جميع الاقترانات المتصلة ذات القيم المركبة على M فان M (ي) تكون جبرية تبديلية مركبة ذات عنصر محايد.

البرهان.

اذا كان Q ، $h \in M$ (ي) وب، $h \in M$ فان النظرية ٦ (أ) تعطي ان $Q + h$ $\in M$ (ي)، وهكذا فان عمليتي الجمع والضرب العدديتين هما عمليتان ثنائيتان على M (ي).

واذا كان $L \in M$ (ي) فان لكل $S \in M$ ، حسب تعريف $Q + h$ ونخاصية التجميع لعملية الجمع في M ينتج ان:

$(ق + (هـ + ل)) = (س) = (ق + س) + (هـ + ل) (س)$
 $= (ق + س) + (هـ + س) + (ل + س) = (ق + س) + (هـ + س) + (ل + س)$
 $= (ق + هـ + س) + (ل + س) = ((ق + هـ) + ل) (س).$
 إذن $ق + (هـ + ل) = (ق + هـ) + ل$ اي ان عملية الجمع على م (س) تجميعية. الآن $ق +$
 $(هـ + س) = (ق + س) + هـ = (س) + هـ = (ق + س) + هـ = (ق + هـ) + س$
 واذن $ق + هـ = هـ + ق$ اي ان عملية الجمع تبديلية. والصفر في م (س) ، $+$ هو الاقتران
 المتصل θ المعروف بان $\theta = 0$ لكل $س \in M$ لأن $(ق + \theta) (س) =$
 $ق (س) + \theta (س) = ق (س)$ لكل $س \in M$ واذن $ق + \theta = ق$
 ونظير $ق$ هو بالطبع $- ق$. وهكذا اثبتنا ان م (س) ، $+$ هي زمرة تبديلية.
 وينفس الطريقة نتأكد من ان م (س) تحقق الشروط الباقية للجبريات التبديلية. فعلى
 سبيل المثال، اذا كان $ق ، هـ \in M$ فان $ق + هـ \in M$ (س) من النظرية ٦. لهذا فان
 عملية الضرب هي عملية ثنائية على م (س).
 والعنصر المحايد في م (س) هو الاقتران المتصل θ المعروف بـ $\theta = 1$ لكل $س \in$
 M لان $(ق + \theta) (س) = ق (س) + \theta (س) = ق (س)$ لكل $س \in M$ لهذا فان $ق + \theta = ق$.
 وهذا يثبت النتيجة.

المثال ١٧ .

كل حدودية $K (ع) = أ_٠ + أ_١ ع + \dots + أ_n ع^n$ نعرف اقترانا متصلا $\theta : \leftarrow \theta$
 لاثبات ذلك عرف $ق. (ع) = أ_٠$ ، $ق. (ع) = ع$ لكل $ع \in \mathbb{C}$ واضح ان $ق. ، ق. هـ$
 اقترانان متصلان على \mathbb{C} ، اذن $ق. + أ_١ ق. + \dots + أ_n ق.$ هو اقتران متصل على \mathbb{C} من النظرية ٦. الآن
 $ق. + أ_١ ق. + \dots + أ_n ق.$ هما اقترانان متصلان على \mathbb{C} . اذن $ق. + أ_١ ق. + \dots + أ_n ق.$ هو اقتران
 متصل على \mathbb{C} ، وبشكل عام ترى ان θ متصل على \mathbb{C} .
 من الواضح ايضا ان الحدوديات الحقيقية، اي التي يكون بها $أ_٠ ، \dots ، أ_n$ و $س$
 اعدادا حقيقية، هي ايضا متصلة على R .

كذلك من النظرية ٦، نرى ان اي اقتران نسبي $\frac{ك}{ل}$ ، حيث ك، ل حدوديتان، هو ايضا اقتران متصل على كل نقطة ع $\in \mathbb{Q}$ ، بشرط ان ل (ع) $\neq 0$. على سبيل المثال

$$\frac{ع-١}{ع+١}$$
 يعرف اقترانا متصلا على \mathbb{Q} ، باستثناء ع = ت، ع = -ت. لاحظ ان
$$\frac{س-١}{س+١}$$
 يعرف اقترانا متصلا على R لان $س+١ \neq 0$ لكل س $\in R$.

المثال ١٨.

اذا كان ل : $R \leftarrow R$ معرفا بـ ل (س) = $\left| \frac{س-٢}{س+١} \right|$ ، فان ل يكون متصلا على R. لاثبات ذلك نأخذ ق (س) = |س| وهـ (س) = $\frac{س-٢}{س+١}$. من المثال ١٧ فان الاقتران النسبي هـ متصل على R. كذلك ق متصل على R. لهذا فانه متصل على هـ (R) $\supset R$. اذن ومن النظرية ٦، نستنتج ان ل = ق \circ هـ هو اقتران متصل على R.

ان التعريف العام للاتصال يسمح لـ س ان تكون اي مجموعة غير خالية جزئية من \mathbb{Q} . ولكن اذا حددنا س بحيث تكون مجموعة محصورة ومغلقة فاننا نحصل على نتيجة هامة بالنسبة للاقترانات المتصلة التي تأخذ قيما حقيقية. قبل اثبات هذه النتيجة ندون ملاحظتين.

أولا، القول ان ق : س $\leftarrow R$ (أو \mathbb{Q}) محصور على س يعني ان ق (س) مجموعة محصورة اي انه يوجد م < ٠ بحيث ان |ق (س)| \leq م لكل س \in س.

ثانيا، القول ان ق : س $\leftarrow R$ يأخذ قيما حاصرة يعني انه يوجد م. ٠، ص \in س بحيث ان ق (س) = (ص \cap ق (س) | س \in س) وق (ص) = (ك \cap ق (س) | س \in س) \cap س.

س. اذن اذا كان ق يأخذ قيما حاصرة، فانه يوجد قيم عظمى وصغرى له. وللاختصار سنكتب ص ح (ق) (ق) وكـ ح (ق) عندما يكون واضحا ان ق معرف على مجموعة ما.

النظرية ٧.

لنفرض ان بين مجموعة جزئية مغلقة ومحصورة في \mathbb{C} وافرض ان q : سهم $\leftarrow R$ متصل على بين . إذن q محصور على سهم ويأخذ قيماً حاصرة .

البرهان .

لنفرض ان امكن ان q غير محصور على بين . لنأخذ اي $N \ni$. اذا كان $|q(s)|$ \geq لكل $s \in$ بين يكون q محصورا على بين . اذن يوجد $s_0 \in$ بين بحيث ان $|q(s_0)| < N$. اذن يوجد متتالية (s_n) في بين وهي محصورة لان بين محصورة . ومن النظرية ٨ ، الفصل ٤ ، يوجد متتالية جزئية $s_{n_r} \leftarrow s \leftarrow (r \leftarrow \infty)$. ومن النظرية ٩ ، الفصل ٣ ، ينتج ان $s \in$ بين ، ولكن بين مغلقة اذن سهم $=$ بين ومنه $s \in$ بين

q متصل على $s \in$ بين ، فبأخذ $E = 1$ فانه يوجد $\delta < 1$ بحيث ان $s \in$ بين و $|s - s_0| > \delta$ تعطي $|q(s) - q(s_0)| > 1$. ولكن $|s - s_0| > \delta$ لكل $r \leq m$ ، لان $s_{n_r} \leftarrow s$ ، اذن $|q(s) - q(s_{n_r})| > 1$ لكل $r \leq m$. اذن $|q(s) - q(s_{n_r})| > 1 + |q(s_{n_r})|$ لكل $r \leq m$ (٧)

من (٧) نحصل على ان $1 > \frac{1 + |q(s)|}{n_r}$ لكل $r \leq m$. وعندما $r \rightarrow \infty$ نحصل على

$1 \geq 0$. وهذا التناقض يبين ان q يجب ان يكون محصورا على بين .

وبما ان q محصور فانه يوجد $m = \sup q(s)$ من سلسلة الحد الاعلى . اذن $q(s) \leq m$ لكل $s \in$ بين . افرض ، ان امكن ، ان $q(s) > m$ لكل $s \in$ بين . اذن $m - q(s) < 0$ على سهم q - m متصل على سهم . فمن النظرية ٦ (ح) نحصل على ان $\frac{1}{m - q(s)}$ متصل على سهم . ومن الجزء الاول من نظريتنا الحالية ، فانه يوجد $m^* < 0$ ، بحيث ان $0 > \frac{1}{m - q(s)} \geq m^*$ لكل $s \in$ بين ، ومن هذا نحصل

على ق (س) $\geq m - \frac{1}{2}$ لكل $m \geq 3$. ولكن هذا يناقض ان m هو اصغر حاصر اعلى لـ ق (س).

اذن من الخطأ ان نعتبر ان ق (س) $> m$ لكل $m \geq 3$ ، اذن يوجد $s \geq 3$ بحيث ان ق (س) $= m$.

وبنفس الطريقة يوجد $s' \geq 3$ بحيث ان ق (س') $= m$ (لأن m د ق (س)).
فقد تم اثبات النظرية.

ومن الواضح ان نتيجة النظرية ٧ صحيحة للمجموعات الجزئية المغلقة المحصورة في R .
وبشكل خاص اذا كان ق : $[A, B] \rightarrow R$ حيث $[A, B]$ فترة مغلقة ومحصورة في R
فان ق يكون محصورا ويأخذ قيمة الحاصرة في $[A, B]$.

المثال ١٩.

اذا حذفنا كلمة محصورة أو كلمة مغلقة من نص النظرية ٧ فقد تصبح النتيجة خطأ.
وعلى سبيل المثال، \mathcal{C} مغلقة وغير محصورة وق : $\mathcal{C} \rightarrow R$ المعروف بدق (ع) $= [ع | ع]$ متصل على \mathcal{C} ولكن غير محصور على \mathcal{C} . كذلك الفترة المفتوحة $(0, 1)$ محصورة في \mathcal{C} ولكن غير مغلقة. والاقتران ق : $(0, 1) \rightarrow R$ المعروف بدق (س) $= \frac{1}{s}$ متصل على $(0, 1)$ ولكن غير محصور على $(0, 1)$.

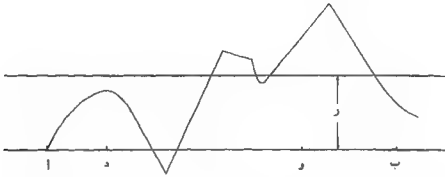
والنظرية التالية عليها مسحة يدوية وتعبر عن فكرة (بقاء القلم على الورقة) المذكورة في اول البند بالنسبة للاقتران المتصل. وهي مثل نظرية ٧ تعتمد على كون ق متصلا على نوع معين من المجموعات؛ في هذه الحالة على فترة مغلقة في R .

النظرية ٨ [نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة].

اذا كان ق : $[A, B] \rightarrow R$ متصلا على $[A, B]$ ، فان ق تأخذ كل قيمة بين اي قيمتين لها.

البرهان .

علينا ان نثبت انه اذا كان د، وفي [أ ، ب] وكان ر عددا بين ق (د) و ق (و) فانه يوجد ح د [أ ، ب] بحيث ان ق (ح) = ر . والشكل التالي يوضح احد الاوضاع الممكنة



في هذا المثال يوجد في الحقيقة اربع نقط ح بحيث ان ق (ح) = ر، وثلاث منها في [د ، و] .
لبرهنة ذلك سنفرض ان د > و، ق (د) > ق (و) و ق (د) > ر > ق (و) . وبطريقة
مماثلة تعالج الحالات الأخرى مثل د < و و ق (و) > ق (د) .

لنأخذ س = { س ∈ [د ، و] | ق (س) ≥ ر } . اذن ق (د) > ر تعطي د ∈ س .
لهذا فان س ≠ ∅ ومن محصورة من اعلى بـ و . اذن من مسلمة الحاصل الاعلى نستنتج انه
يوجد ص ∈ س . هـ = ح ، لهذا فان د ≥ ح ≥ و .

نريد ان نثبت ان ق (ح) = ر، لاثبات ذلك افرض ان امكن ان ق (ح) ≠ ر . اذا كان
ق (ح) > ر فان ح ≠ و . من اتصال ق على ح وياخذ ε = ر - ق (ح) فانه يوجد δ < 0 .
بحيث ان | ق (س) - ق (ح) | < ε عندما يكون س ∈ (ح - δ ، ح + δ) ∩ [د ، و] .
اذن ق (س) > ر لكل س ∈ (ح - δ ، ح + δ) . وياخذ س = ح + δ/4 نحصل على ق
(س) > ر ، اذن س ∈ س ومنه س = ح = ص . ص ∈ س مما يناقض δ < 0 .

واذا كان ق (ح) > ر فان ح ≠ د . ومن اتصال ق عند ح فانه يوجد δ < 0 بحيث

ان :

(٨) $\langle \text{س} \rangle < \text{ر لكل س} \exists \langle \text{ح} - \text{ع} , \text{د} \rangle \supset [\text{د} , \text{و}]$
 ومن تعريف اصغر حاصر علوي فانه يوجد $\text{ص} \exists$ بحيث ان $\text{ح} - \text{ع} > \text{ص} \geq \text{ح}$.
 اذن $\text{ص} \exists$ ينعطي $\text{ق} \langle \text{ص} \rangle \geq \text{ر}$. ولكن من (٨) $\text{ح} - \text{ع} > \text{ص} \geq \text{ح}$ تعطي ان $\text{ق} \langle \text{ص} \rangle < \text{ر}$ ، اذن $\text{ر} > \text{ق} \langle \text{ص} \rangle \geq \text{ر}$ ، وهذا تناقض. اذن $\text{ق} \langle \text{ح} \rangle = \text{روفي الحقيقة}$ ، لقد أثبتنا ان $\text{د} > \text{ح} > \text{و}$. وهذا يثبت النظرية.
 تمكنا هذه النظرية من اعطاء برهان سهل جدا لوجود الجذر النوني (راجع النظرية ٢، البند ٣).

المثال ٢٠

لكل $\text{ن} \exists \text{N}^+$ و $\text{أ} < \text{و}$ يوجد $\text{ص} < \text{و}$ وحيدة بحيث ان $\text{ص}^{\text{ن}} = \text{أ}$. لاثبات ذلك خذ الاقتراح $\text{ق} \langle \text{س} \rangle = \text{س}^{\text{ن}}$. الآن $\text{ق} \langle \text{أ} + ١ \rangle = (\text{أ} + ١)^{\text{ن}} \leq \text{ن} + ١ < \text{أ} + ١$. لهذا فان $\text{ق} \langle \text{و} \rangle > \text{أ} > \text{ق} \langle \text{أ} + ١ \rangle$. ولكن ق متصل على $[١ , \text{أ} + ١]$ ، لهذا، وباستخدام النظرية ٨، فانه يوجد $\text{ص} \exists \langle \text{و} , \text{أ} + ١ \rangle$ بحيث ان $\text{ق} \langle \text{ص} \rangle = \text{أ}$ ، اي ان $\text{ص}^{\text{ن}} = \text{أ}$. ويمثل ما سبق يتم اثبات ان ص وحيدة.

المثال ٢١

اذا استبدلنا أ ، ب في النظرية ٨ بمجموعة اخرى فان الاستنتاج قد يكون خطأ.
 على سبيل المثال، اذا كانت س هي اتحاد $[١ , ٢]$ و $[٣ , ٤]$ و $\text{ق} \langle \text{س} \rangle = \text{س}$ ، فان ق متصل على س . $\text{ق} \langle ١ \rangle > \frac{٣}{٢} > \text{ق} \langle ٢ \rangle$ ولكن $\text{ق} \langle \text{س} \rangle \neq \frac{٣}{٢}$ لكل $\text{س} \exists \text{س}$.
 سوف ندرس الآن طريقة تفيد احيانا في التحليل العددي.

التصنيف المكرر

نظرية القيم الوسطى للاقتارات المتصلة هي الاساس في ايجاد جذور الاقتارات الحقيقية بالطرق العددية. على سبيل المثال، اذا كان ق اقترانا متصلا، وكان $\text{ق} \langle \text{أ} \rangle > ٠ > \text{ق} \langle \text{ب} \rangle$

ق (ب)، فانه يوجد حـ ٥ (أ، ب) بحيث ان ق (حـ) = ٠، اي انه يوجد صفر للإقتران بين أ و ب. اي ان حـ هي جذر للمعادلة ق (س) = ٠. ومع اننا نعلم انه يوجد حـ بحيث ق (حـ) = ٠، بين أ و ب، الا اننا لا نعلم قيمته العددية. لايجاد قيمة تقريبية لحـ فاننا ننصف [أ، ب] وندرس قيم ق على نقطة المنتصف $d = \frac{a+b}{2}$. واذا كان ق (د) = ٠، وهذا ممكن، ولكن

مستبعد في الحالات العملية، فاننا نكون قد وجدنا صفر الإقتران د. واذا كان حـ ≠ د فانه اما ان يكون ق (د) < ٠ عندها وبما ان ق (أ) > ٠ فان نظرية القيم الوسطى تنص على انه يوجد صفر في (أ، د). واما اذا كان ق (د) > ٠ فانه يوجد صفر في (د، ب). لهذا فقد عرفنا ان الصفر موجود في احد نصفي الفترة [أ، ب]. بتنصيف الفترة التي وجدنا بها الصفر، وتكرار ذلك، يمكن حساب قيمة الصفر لاي درجة من الدقة. ومع ان هذه الطريقة طويلة في العادة، لكن بساطتها تجعل بالامكان استخدامها في اجهزة الحاسب الالكتروني.

عمليا، وقبل البدء في العمليات الحسابية، يكون من الافضل رسم مخطط دقيق للإقتران ق (س) = ص على فترة ما ثم نختار [أ، ب] بحيث يكون الصفر فيها وحيدا، ان امكن ذلك.

وقبل اعطاء مثال عددي، سوف نبرهن نظرية تتعلق باصفار الحدوديات. وهي تتعلق باصفار الحدوديات ذات القيم المركبة، لهذا فهي تصح على الحدوديات الحقيقية كحالة خاصة. ويجب ان نتذكر انه يمكن للحدودية الحقيقية ان يكون لها اصفار مركبة مثل س^٢ - س^٢ + س - ١ فاصفاراها هي ١، ت، -ت.

النظرية ٩.

افرض ان ع، أ^١، ...، أ^٥ اعداد مركبة. وافرض ان ك (ع) = ع^٥ + أ^١ع^٤ + ... + أ^٥. اي ان ع هو صفر للحدودية ك: ع ← ع. اذن |ع| + ١ ≥ م حيث م = آك { |أ^١|، ...، |أ^٥| }.

البرهان .

يكفي ان نثبت ان $|ع| + 1 < م$ تعطي $|ك(ع)| < ٠$. فمن المتباينة الثلاثية نحصل

على

$$\begin{aligned} |ك(ع)| &\leq |ع| - |١| - |١| - |١| - \dots - |١| \\ &\leq |ع| - |١| - |١| - |١| - \dots - |١| \\ &= |ع| - |١| \end{aligned}$$

لكن $|ع| + 1 < م$ تعطي ان

$$\begin{aligned} |ك(ع)| &= |ع| - |١| - |١| - |١| - \dots - |١| \\ &< م - |١| - |١| - |١| - \dots - |١| \\ &< ٠ \end{aligned}$$

كما يثبت النظرية .

المثال ٢٢ .

استخدم طريقة التنصيف المكرر لإيجاد جذور $ك(س) = س^٣ - س + ١ = ٠$ لثلاث

منازل عشرية .

من النظرية ٩ نرى انه اذا كان $س$ جذرا للمعادلة فان $|س| \geq ٢$. اذن تقع الجذور في $[٢, -٢]$. $ك(٢) = -٥$ ، $ك(-٢) = ١$ ، بما ان $ك$ متصل ، اذن يوجد جذر $ح$ في $(٢, -٢)$ ، ومن السهل اثبات ان $ح$ وحيد وان $ك(س) < ٠$ لكل $س \leq -١$ ، اذن $ح$ هو الجذر الحقيقي الوحيد . وهناك جذران آخران مركبان (انظر التمرين ٦ - ٣) . وبتطبيق التنصيف واستخدام ثلاث منازل عشرية في التقريب نحصل على ما يلي (تركنا بعض الخطوات المتوسطة) :

س :	٢	١	١,٥٠٠	١,٢٥٠	١,٣٢٤	١,٣٢٦	١,٣٢٥
ق(س) :	-٥	١	-٠,٨٧٥	-٠,٢٩٧	-٠,٠٠٣	-٠,٠٠٥	-٠,٠٠١

اذن - ١,٣٢٥ > ح - > - ١,٣٢٤ ، اذن - ١,٣٢٤ هو الجذر الحقيقي مقربا لثلاث منازل عشرية.

ويمكن استخدام نظرية القيم الوسطى في :

الاقتران العكسي

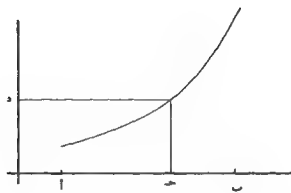
لنأخذ مثالا بسيطا لتوضيح الفكرة. افرض ان $0 \leq a < b$ و v : [أ ، ب] $\leftarrow R$ معطى بـ v (س) = s^2 . اذن v متزايد فعلا على [أ ، ب] ، ومتصل. كذلك لأي v \exists [ص (أ) ، ص (ب)] يوجد v وحيدة في [أ ، ب] بحيث ان $v = s^2$ أو $v = \sqrt{s}$. من الواضح ان الاقتران هـ المعروف بـ هـ (ص) = \sqrt{v} هو متزايد فعلا. والسؤال هنا هو: هل هـ متصل؟ أي هل الاقتران النظير متصل؟ في هذه الحالة من السهل اثبات ان هـ متصل على [أ^٢ ، ب^٢] إثباتاً مباشراً. والنظرية التالية تعالج الحالة العامة.

النظرية ١٠

افرض ان v : [أ ، ب] $\leftarrow R$ متزايد فعلا ومتصل على [أ ، ب]. اذن يوجد لـ v اقتران عكسي v^{-1} : [ق (أ) ، ق (ب)] $\leftarrow R$ بحيث ان v^{-1} متزايد فعلا ومتصل على [ق (أ) ، ق (ب)] .
وهناك نتيجة مشابهة بالنسبة للاقترانات المتناقصة فعلا .

البرهان .

الرسم التوضيحي التالي يساعد في فهم الفكرة



بما أن q متزايد فعلا فإنه تبائي (واحد لواحد). وإذا كان q (أ) $\geq d \geq q$ (ب)، فإنه يوجد $h \in [a, b]$ بحيث أن $q(h) =$ د كمن نظرية القيم الوسطى. إذن q شامل؛ وبما أنه تبائي، إذن هناك إقتران q^{-1} : q (أ)، q (ب) $\leftarrow R$.

ولتبسيط الرموز سوف نكتب $h = q^{-1}$. الآن q (أ) $\geq v_1 \geq v_2 \geq q$ (ب) تعطي $h = (v_1) > h = (v_2)$ ، وإلا كان $h = (v_1) \leq h = (v_2)$ وهذه تعطي: q (هـ) $(v_1) \leq q$ (هـ) (v_2) ، أي أن $v_1 \leq v_2$ مما يناقض $v_1 > v_2$. إذن h متزايد فعلا.

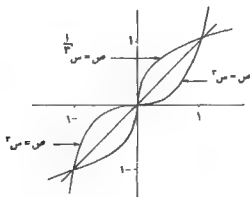
سوف نثبت أن h متصل عند $d \in q$ (أ)، q (ب): يوجد $h \in [a, b]$ بحيث أن $q(h) = d$. خذ $\epsilon > 0$ بحيث أن $a < h - \epsilon < h < h + \epsilon < b$. إذن q (ج) $\epsilon < d < \epsilon + h < \epsilon + b$ ونختار $\delta < \epsilon$ أصغر العددين $q(h + \delta) - d$ و $d - q(h - \delta)$ (ج) ϵ إذن $v \in [q(h), q(b)]$ $\Rightarrow |v - d| < \delta$ تعطي $v - q(h) < \delta$ و $q(h) - v < \delta$ ، أي أن $v > q(h) - \delta$ وأن $h = (v) > h - \delta$ و $h = (v) < h + \delta$. وبشكل مشابه q (ج) $\epsilon < d < \epsilon + h < \epsilon + b$ ، لهذا فإن $h = (d) - \epsilon < h = (v) < h + \delta$ ، إذن $h = (v) - \delta < h < h + \delta$. لهذا فإن h متصل على d .

ولا يختلف البرهان إذا كانت d هي إحدى نقطتي النهاية $q(a)$ أو $q(b)$. وهناك نقطة يجدر ذكرها هنا: وهي أننا اخترنا $\epsilon > 0$ بحيث أن $b - h < \epsilon$

> ح - أ ، ولم نأخذ أي $\epsilon < 0$ كما هو مطلوب في تعريف الاتصال . ولكن اذا اخذنا و =
 \overline{A} ص { ب - ح ، ح - أ } واذا كان $\epsilon \leq$ ونستبدل ϵ السابقة بـ $\frac{\epsilon}{4}$. اذن يوجد $\delta = \delta'$
 $(\frac{\epsilon}{4})$ بحيث ان | ص - د | > δ تعطي | هـ - (ص) - هـ (د) | > $\frac{\epsilon}{4}$ و $\epsilon \geq$ ، اذن
 هـ متصل عند د . وهذا ينهي برهان النظرية .

المثال ٢٣ .

لنأخذ ق : $R \leftarrow R$ معرفة بق (س) = س^٣ . لقد اثبتنا في المثال ١٢ ان ق متزايد فعلا
 ولذلك ، وبما ان ق حدودية ، اذن هو متصل على R . فلتطبق النظرية ١٠ خذ اي فترة [أ ،
 ب] في R . عند النظر الى تحديد ق على [أ ، ب] فانه يوجد ق^{-١} : [ب^٣ ، ب^٣] $\leftarrow R$
 بحيث ان ق^{-١} متزايد فعلا ومتصل . نكتب عادة ق^{-١} (س) = س ^{$\frac{1}{3}$} وبما ان [أ ، ب] كانت
 اي فترة فان ق^{-١} متزايد فعلا ومتصل على R . والشكل ادناه يمثل مخطط ص = س^٣ ومخطط
 ص = س ^{$\frac{1}{3}$} ، لاحظ ان مخطط ص = س ^{$\frac{1}{3}$} هو صورة ص = س^٣ على المستقيم ص = س .



في النظرية ١٠ كان الاقتران ق اقتران تقابل متصلا على مجاله . ومن النظرية استنتجنا

متصل فإن ق (س_ن) ← ق (س)، ولكن ق (س_ن) ← ص، إذن ص = ق (س) و ق (س_{هـ}) . إذن ق (س_{هـ}) مغلقة عما يناقض ق (س_{هـ}) فترة مفتوحة .
تتعلق النظرية الأخيرة في هذا البند بنوع معين من الاقترانات، يسمى اقتران التقلص . والنظرية هامة لذاتها وهي مفيدة أيضا في التحليل العددي، كما سنرى عندما ندرس طريقة نيوتن في إيجاد الجذور.

النظرية ١١ . قاعدة النقطة الثابتة

افرض ان ق هو اقتران تقلص على [أ ، ب]، اي افرض ان ق : [أ ، ب] ← [أ ، ب] وأنه يوجد عدد ثابت ح، $0 < ح < ١$ بحيث ان | ق (س) - ق (ص) | < ح | س - ص | لكل س ، ص و [أ ، ب] . إذن ق متصل على [أ ، ب] ويوجد له نقطة ثابتة وحيدة .
اي انه يوجد حل وحيد للمعادلة ق (س) = س في [أ ، ب]، فلنسمه م .
وكذلك اذا كانت س_٠ نقطة في [أ ، ب] فاننا نعرف س_١ = ق (س_٠) لكل ن = ٠ ، ١ ، إذن س_٠ ← م ← ن ← ∞ و

$$| س_٠ - م | \geq \frac{ح^٥ | س_٠ - س_١ |}{١ - ح} ، \text{ لكل } ن \leq ١ .$$

البرهان .

افرض ان $٠ < ح < ١$ ونخذ $٥ = \frac{ح}{١ - ح}$. إذن س ، ص و [أ ، ب] و | س - ص | < ٥ .
تعطي | ق (س) - ق (ص) | < ح | س - ص | و $٥ > ح$ واذن ق متصل على [أ ، ب] .
لنأخذ اي س_٠ و [أ ، ب] ونعرف س_١ = ق (س_٠) ، س_٢ = ق (س_١) ، إذن $| س_٠ - س_١ | \geq ٥ | س_١ - س_٢ |$.

سوف نثبت الآن ان (\mathcal{M}_n) هي متتالية كوشية؛ خذ $n \geq 1$ ، اذن

$$|s_n - s_{n-1}| = |q(s_{n-1}) - q(s_{n-2})|$$

$$\begin{aligned} & \geq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ & \dots \geq |x_2 - x_1| = n^{-\alpha} \end{aligned}$$

(9)

وذلك لان $\langle \cdot \rangle \succ \langle \cdot \rangle$. ولكن $\langle \cdot \rangle \succ \langle \cdot \rangle$ تعطي ان $\langle \cdot \rangle \leftarrow \langle \cdot \rangle$ (ن $\leftarrow \infty$) اذن (٩) تعطي ان (س_١) هي متتالية كوشية. ومن تمام R يتبع ان س_١ \leftarrow م (ن $\leftarrow \infty$)، وبما ان $\infty \geq \text{س}_1 \geq \text{ب} \geq \text{ا}$ فان $\text{ا} \geq \text{م} \geq \text{ب}$.

لكن من $\mathbb{N}_{+} \leftarrow m \leftarrow (n \leftarrow \infty)$ وبما ان q متصل فانه يتبع من \mathbb{N}_{+} q (س) ان
 نها من \mathbb{N}_{+} $m = q$ (م)، اذن m هي نقطة ثابتة لـ q .

الآن م وحيلة لانه اذا وجد $m^* = q(m^*)$ فان $m - m^* = |q(m) - q(m^*)| \geq |m - m^*|$ وبما ان $m - m^* > 1$ فان $m - m^* = 1$ ومنه $m = m^*$.

اخيراً نتج من (٩) ان $|س_ن| \geq |س_١|$ - س. | (١ - ح) - ١^- ، لهذا فانه اذا ثبتنا $١ \leq$ ، وتكرر $\leftarrow \infty$ ، نحصل على $|م - س_ن| \geq |س_١|$ - س. | (١ - ح) - ١^- لان $س_ن \leftarrow \infty$ (ر - ∞). وهذا يثبت النظرية.

٨- افرض ان S مجموعة جزئية من \mathbb{C} غير خالية وثابت لكل $s \in \mathbb{C}$ عرف

$$m = (m, s) = \{ | m - s |, | m |, | s | \}$$

نسمي m (س، س η) المسافة بين النقطة s والمجموعة $S\eta$. اثبت ان $m: C \rightarrow H$ هو اقتران متصل على C .

٩- افترض ان $q : [a, b] \rightarrow [a, b]$ متصل على $[a, b]$. وتطبيق نظرية القيم الوسطى على اقتران ملائم اثبت انه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث ان $q(c) = c$. ومن هذا نستنتج انه اذا كان $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ متصلا وعصورا على $[0, 1]$ فانه يوجد $d \in [0, 1]$ بحيث $h(d) = d$.

اعط مثالا لاقتران ل : $(\infty, 0] \leftarrow (\infty, 0]$ حيث يكون متصلا على $(\infty, 0]$ ويكون ل (س) \neq س لكل س $\in (\infty, 0]$.

١٠- في المثال ٢٢ بينا ان $س^٣ - س + ١ = ٠$ له جذر حقيقي واحد. بكتابة $س = ا + ب$ ، اثبت ان المعادلة تتحقق اذا كان $ا^٣ + ب^٣ = ١$ و $ا ب = ١$. ومنه بين انه اذا كان $ا، ب$ و $س$

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\xi}{\gamma V} - 1 \right) - 1 = r_{\text{by}}, \quad \frac{1}{V} \left(\frac{\xi}{\gamma V} - 1 \right) + 1 = r_{\text{ly}}$$

فان ا + ب، ح ا + ح ا^٢ب، ح ا^٣+ ح ب هي حلول س^{-٣} - س + ١ = حيث ٢ ح = ١- ت + ٣√

۱۱۔ اعط مثالا لاقران متصل ومتزايد فعلا علی $[۰, ۱] \cup [۲, ۳]$ بحيث ان عكسه ليس متصلا.

۱۲- افرض ان ق : [ا، ب] \leftarrow R متصل علی [ا، ب] بحيث ان ق (س) < ۰ لكل س و [ا، ب]. اثبت انه يوجد عدد ثابت موجب ح بحيث ان ق (س) \leq ح لكل س و [ا، ب].

اعط امثلة لتبين ان الاستنتاج يكون خطأ اذا استبدلنا [أ ، ب] بـ [٠ ، ١] أو [٠ ، ∞).

١٣ - افرض ان ق : [أ ، ب] ← R متصل وتبايني . افرض ان ق (أ) > ق (ب) . استخدم نظرية القيم الوسطى لاثبات ان ق متزايد فعلا .

١٤ - افرض ان ق : [أ ، ب] ← R متصل على [أ ، ب] . عرف هـ (س) = ص ح مع { ق (ر) | أ ≤ ر ≤ س } . اثبت ان هـ (أ) = ق (أ) ، هـ متزايد ، هـ متصل عند أ .

١٥ - اثبت ان R يكافئ تبولوجيا الفترة المفتوحة (١- ، ١) .

١٦ - افرض ان ق : [٠ ، ∞) ← R متصل على [٠ ، ∞) ويحقق ٠ ≥ ق (س) ≥ س لكل س ≤ ٠ . اذا كان أ ≤ ٠ ، أ_١ = ق (أ_١) لكل ن ≤ ١ . فاثبت ان أ_١ ← نهاية ما ، سمها م . واثبت ان ق (أ) = م .

اذا فرضنا بالاضافة لذلك ان ٠ ≥ ق (س) > س لكل س < ٠ فاثبت ان م = ٠ .

١٧ - اكتب ق (س) = س^٢ - س + ١ . اثبت ان ق : [٠ ، ١] ← [٠ ، ١] وأنه يوجد نقطة ثابتة وحيدة لـ ق في [٠ ، ١] ولكن ق ليس اقتران تقلص .

١

٤ . الاتصال المنتظم

ان افكار هذا البند اكثر نضجا مما رأيناه في البنود السابقة . فيكفي للعديد من القراء ان يتعرفوا على التعريف الاساسي للاتصال المنتظم وعلى حصيلة النظرية ١٢ ونتيجتها .

اذا نظرنا الى تعريف الاقتران المتصل نجد ان ق : س ← ع يكون متصلا على س اذا وفقط اذا كان لكل ع < ٠ ولكل ص ∃ س يوجد ع = ع (س) ، ص < ٠ بحيث ان س ∃ س' - ص | س' > ع تعطي | ق (س) - ق (س') | > ع . وبصورة عامة فان ع تعتمد على ع ، ص . لكن هناك حالات من الممكن فيها ايجاد ع . بحيث تعتمد على ع فقط ، وليس على ص .

المثال ٢٦ .

عرّف ق : $[١, ٠]$ ← H بـ ق (س) = س^٢ . سوف نثبت انه لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon) > ٠$ بحيث ان س ، ص \exists س-ص $\leq \delta$ تعطي |ق(س) - ق(ص)| $\leq \epsilon$.
واضح انه بالامكان اخذ $\delta = \frac{\epsilon}{٢}$ لان |س^٢ - ص^٢| = |س - ص| (س + ص) و
س + ص ≥ ٢ .

فان كان بالامكان ايجاد δ بحيث تعتمد على ϵ فقط فان δ تصلح لجميع س \exists ص وبانتظام . في هذه الحالة نقول ان ق متصل بانتظام على س . واليك التعريف الدقيق .

الاقتران المنتظم الاتصال . افرض ان ق : س ← \mathbb{R} . نقول ان ق منتظم الاتصال اذا فقط اذا كان لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon)$ تعتمد على ϵ فقط بحيث ان لكل س ، ص \exists س-ص $\leq \delta$ تعطي |ق(س) - ق(ص)| $\leq \epsilon$.
من الواضح انه اذا كان ق منتظم الاتصال فان ق متصل . والعكس غير صحيح ، كما سنرى في المثال التالي .

المثال ٢٧ .

عرف ق : $(١, ٠)$ ← \mathbb{R} بـ ق (س) = $\frac{١}{س}$. اذن ق متصل على $(١, ٠)$ كما عرفنا سابقا ، ولكن ق ليس منتظم الاتصال على س . لاثبات ذلك افرض ان امكن ان ق منتظم الاتصال على س . خذ $\epsilon = ١$ ، اذن يوجد $\delta = \delta(١) > ٠$ بحيث ان س ، ص \exists س-ص $\leq \delta$ تعطي $|\frac{١}{س} - \frac{١}{ص}| > \epsilon$. خذ س = $\frac{\delta}{\delta + ١}$ ، ص = $\frac{س}{٢}$.

اذن s ، $v \in (0, 1)$ ، $|s - v| > \frac{\epsilon}{4}$ ، اذن $\left| \frac{1}{s} - \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{sv} > \frac{1}{\delta} > \frac{\delta + 1}{\delta}$ مما يناقض $1 < \frac{\delta + 1}{\delta}$. اذن لا يمكن لـ q ان يكون منتظم الاتصال .
والنتيجة الهامة التالية تبين ان الاتصال يكون اتصالا منتظما اذا كانت s مغلقة ومحصورة .

النظرية ١٢ .

اذا كان $q : s \rightarrow \mathbb{C}$ متصلا على مجموعة مغلقة ومحصورة وغير خالية في \mathbb{C} فان q منتظم الاتصال .

البرهان .

افرض ان q غير منتظم الاتصال . اذن يوجد $\epsilon > 0$ بحيث انه لكل $\delta > 0$ يوجد s, v في s بحيث ان $|s - v| > \delta$ ولكن $|q(s) - q(v)| < \epsilon$.

بأخذ $\delta = 1$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ... فاننا نجد s_n, v_n ، $s_n \rightarrow s$ ، $v_n \rightarrow v$ ، $|s_n - v_n| > 1$ و $|q(s_n) - q(v_n)| < \frac{1}{n}$. بما ان s محصورة فان (s_n) محصورة ، ولهذا فانه يوجد متتالية جزئية تقاربية $s_{n_r} \rightarrow s$. من $|s_{n_r} - v_{n_r}| > 1$ نرى ان $v_{n_r} \rightarrow s$. وبما ان s مغلقة ، فان $s \in s$ ومن اتصال q على s يتبع ان $|q(s_{n_r}) - q(s)| < \frac{1}{n_r}$ و $|q(s_{n_r}) - q(v_{n_r})| < \frac{1}{n_r}$. لكن هذا يناقض $|q(s_{n_r}) - q(v_{n_r})| < \frac{1}{n_r}$. اذن q منتظم الاتصال على s مما يثبت النظرية .

نتيجة .

اذا كان $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ متصلا فان q يكون منتظم الاتصال .

البرهان .

[أ ، ب] مجموعة محصورة ومغلقة في \mathbb{R} .

والنظرية الاخيرة على الاقتران المتصلة نظرية معروفة وهامة وقد اثبتها فاير شتراس وهي تبين انه يمكن تقريب اي اقتران متصل على $[0, 1]$ تقريبا منتظما باستخدام حدوديات . وهذه الحدوديات التي نستعملها عرفها الرياضي الروسي برنشتين ، والبرهان الذي سنقدمه ليس هو برهان فاير شتراس الاصيل . ففي برهاننا سوف نستعمل بعض نتائج التفاضل التي من المحتمل ان يكون الطالب ملما بها .

النظرية ١٣ [نظرية فاير شتراس للتقريب] .

افرض ان $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ هو اقتران متصل على $[0, 1]$. اذن يوجد متتالية من الحدوديات $(B_n(x))$ تعتمد على f (وهذه هي حدوديات برنشتين) ، وتحقق انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث ان $|f(x) - B_n(x)| < \epsilon$ لكل $n \geq N$. لكل $x \in [0, 1]$.

البرهان .

اولا نحتاج الى المتطابقة :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = (x + (1-x))^n = 1$$

التي هي صحيحة لكل $x \in \mathbb{R}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وكالعادة فان $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$

فلايتات (١٠) خذ ما يلي :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = 1 \quad (11)$$

وهذا ينتج من نظرية ذات الحدين . خذ مشتقة الطرفين ثم اضرب بـ $(1 - s)$ تحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n = 0 \quad (12)$$

حيث s تعتمد على r ، n و s . خذ مشتقة طرفي (12) واضرب برس $(1-s)$ وبسط المعادلة تحصل على

$$-n(1-s)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(1-s)^{n-1} = 0 \quad (13)$$

ويقسمة طرفي (13) على n نحصل على (10).

الآن نعرف حدودية برنشتين ب n كما يلي:

$$b_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} \left(\frac{s}{n}\right)^r (1-s)^{n-r}$$

اذن، من (11)

$$b_n(s) - q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} \left\{ \left(\frac{s}{n}\right)^r - q(s) \right\} (1-s)^{n-r} \quad (14)$$

الآن لنأخذ أي $\epsilon > 0$ ، وبما ان q منتظم الاتصال على $[0, 1]$ فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان s ، v في $[0, 1]$ $|v - s| > \delta$ تعطي $|q(s) - q(v)| > \frac{\epsilon}{4}$.
بما ان q متصل على $[0, 1]$ فانه يوجد عدد ثابت M بحيث ان $|q(s)| > M$ لكل

$s \in [0, 1]$ من النظرية 7. نختار $n > \frac{M}{\frac{\epsilon}{4} \delta^r}$ ، $N \in \mathbb{N}$ ، $N \leq n$. سنرى بعد قليل سبب هذا الاختيار n .

خذ $s \in [0, 1]$ و $r \geq 0$. يمكن ان تكون ربيعث ان $|s - \frac{r}{n}| > \delta$.

في هذه الحالة نحصل على $|q(s) - q(\frac{r}{n})| > \frac{\epsilon}{4}$. اذن وبالجمع لكل ونحقق

$|s - \frac{r}{n}| > \delta$ نحصل من (١١) على

$$\sum_{(n)} |q(\frac{r}{n}) - q(s)| \geq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \geq \frac{\epsilon}{4} \cdot \dots \dots \dots (١٥)$$

ولكن لكل ربيعث ان $|s - \frac{r}{n}| \leq \delta$ نجمع ونحصل على

$$\sum_{(n)} \left\{ |q(\frac{r}{n}) - q(s)| + |q(s) - q(\frac{r}{n})| \right\} \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

$$\sum_{(n)} 2 \delta \leq \sum_{(n)} \left(|s - \frac{r}{n}| + \left| \frac{r}{n} - \frac{r}{p} \right| \right) \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{p}|$$

$$\sum_{(n)} 2 \delta \leq \sum_{(n)} \left(|s - \frac{r}{p}| + \left| \frac{r}{p} - \frac{r}{n} \right| \right) \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

$$2 \delta \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

$$2 \delta \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

$$\sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

$$0 \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}| \leq \sum_{(n)} |s - \frac{r}{n}|$$

ينتج من (١٤) ، (١٥) ، (١٦) أن

$$|b_n(s) - q(s)| \geq \frac{\epsilon}{4} > \epsilon$$

لاي $s \in [0, 1]$ ولكل $n \leq N$ وبذا يتم برهان النظرية.

تمارين ٦ - ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحلول بعض من هذه التمارين)

١ - عرف $Q : (1, \infty) \leftarrow R$ بـ $Q(s) = \frac{1}{s}$. اثبت ان Q منتظم الاتصال على $(1, \infty)$.

٢ - عرف $Q : [1, 0] \leftarrow R$ بـ $Q(s) = \sqrt{s}$. بيا ان Q متصل على $[1, 0]$ فاننا نعرف من النظرية ١٢ أن Q منتظم الاتصال. اذن يوجد $\delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$ تعمل بانتظام لكل $s \in [1, 0]$. وقيمة δ غير معروفة بشكل عام. ولكن في حالتنا هذه اثبت ان $\delta = \frac{\epsilon^2}{9}$ تصلح للعمل بانتظام على $[1, 0]$.

٣ - اثبت ان $Q : (0, \infty) \leftarrow R$ والمعروف بـ $Q(s) = \sqrt{s}$ هو منتظم الاتصال على $(0, \infty)$.

٤ - افرض ان $Q : (0, \infty) \leftarrow R$ متصل على $(0, \infty)$. وأن $Q(s) \leftarrow A(s) \leftarrow \infty$ اثبت ان Q منتظم الاتصال على $(0, \infty)$.

اعط مثالا لتبين ان الاستنتاج يكون خطأ اذا حذفنا $Q(s) \leftarrow A(s) \leftarrow \infty$.

٥ - يسمى الاقتران $Q : R \leftarrow R$ دوريا اذا فقط اذا وجد عدد ثابت $d < \infty$ بحيث ان $Q(s) = d + Q(s)$ لكل $s \in R$. ونسمي دورة الاقتران. اثبت ان الاقتران المتصل الدوري هو منتظم الاتصال على R .

٦ - عرف $Q : [1, 0] \leftarrow R$ بـ $Q(s) = |s - \frac{1}{4}|$. عين حدوديات برنشتين لـ Q .

١، ٢، ٣، ٤، ٥. وضع بالرسم كيف تقرب Q على $[1, 0]$.

٧ - (على فرض المعرفة بمبادئ التكامل). افرض ان $Q : [1, 0] \leftarrow R$ متصل على $[1, 0]$

استخدم نظرية فايرشتراش للتقريب لاثبات انه اذا كان $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix} \right\}$ ق (س) س^٣ دس = ٠ لـ

ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... فان $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix} \right\}$ ق^٢ (س) دس = ٠ . استنتج ان ق (س) = ٠ لكل س و
[١ ، ٠] .

افضل السابع

الاقترانات القابلة للتفاضل

١ . مشتقة الاقتران عند نقطة

في بداية الفصل السادس مهندنا للدراسة النهايات بان نظرنا نظرة هندسية الى مسألة المماسات ، وساقنا البحث الى دراسة كسور من النوع $\frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ وتدعى عادة كسور نيوتن . سنرمز لهذا الكسر بالرمز ك (س ، أ) وعندما س \rightarrow أ نحصل على ميل المماس عند (أ ، ق (أ))

للمنحني ص = ق (س) بشرط ان تكون نها $\frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ (س \rightarrow أ) موجودة .

ويساعد التفكير الهندسي على معرفة سلوك الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من R .

والآن سنسلك طريقا آخر، ونأخذ اقترانات معرفة على مجموعات جزئية من \mathbb{C} وتأخذ قيميا في \mathbb{C} . وهذا يتضمن الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من R مع استبدال مقياس الاعداد المركبة بالقسمة المطلقة.

مشتقة الاقتران عند نقطة: لنفرض ان s مجموعة جزئية غير خالية في \mathbb{C} ، وافرض ان $a \in s$ بحيث ان a نقطة تراكم لـ s . افرض ان $q : s \rightarrow \mathbb{C}$. نقول انه يوجد مشتقة لـ q عند a اذا وفقط اذا كان يوجد عدد $m \in \mathbb{C}$ بحيث ان

$$k(s, a) = \frac{q(s) - q(a)}{s - a} \leftarrow m(s) \leftarrow a$$

نسمي m مشتقة q عند a ، ونكتب $q'(a) = m$. واذا كان لـ q مشتقة عند a فاننا نقول ان q قابل للتفاضل (أو الاشتقاق) عند a . واذا كانت كل نقطة في s هي نقطة تراكم لـ s فاننا نقول ان q قابل للتفاضل (أو الاشتقاق) على s اذا وفقط اذا كان q قابلا للتفاضل عند كل نقطة في s .

ومن الواضح اننا نحتاج الى $a \in s$ كي تتمكن من حساب $q'(a)$. كذلك نحتاج الى $s \ni s$ ، $s \neq \emptyset$ لكي نحسب كسريوتن. ولأخذ النهاية عندما $s \rightarrow a$ فانه من الضروري، حسب تعريف النهاية، ان تكون a نقطة تراكم لـ s .

واحيانا يكون من الافضل كتابة $s = a + u$ وفي كسريوتن، واذن يكون لـ q مشتقة، $q'(a)$ ، اذا وفقط اذا كان

$$q'(a) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{q(a+u) - q(a)}{u}$$

واذا كانت كل نقطة في s هي نقطة تراكم لـ s وكان q ثابتا على s ، اي ان $q(s) = q(a)$ لكل $s \in s$ فان $q'(a) = 0$ لكل $a \in s$.

المثال ١.

عرف $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ بـ $q(z) = z^2$ حيث $z \in \mathbb{C}$.

اذن $ق(ع) = ن ع^{1-ن}$ لكل $ع \in \mathbb{C}$. ولانسابات ذلك نأخذ $هـ(ع، و) = \frac{ق(ع+و)-ق(ع)}{و}$ ، و $\neq 0$. فمن نظرية ذات الحدين نستنتج ان

$(ع + و)^{1-ن} ع^{1-ن} = ع^{1-ن} + ن ع^{1-ن-1} و + \dots + و^{1-ن} ع^{1-ن-1}$.
اذن $هـ(ع، و) = ن ع^{1-ن-1} + \dots + و^{1-ن-1} ع^{1-ن-1}$ (و $\leftarrow 0$) ، وهذا يثبت النتيجة .
وهذه النتيجة صحيحة للعدد الحقيقي $ن$ ايضاً .

والنظرية الاولى التالية تعبر عن قابلية التفاضل بطريقة مختلفة قليلاً ، وهي مفيدة في الحالات العملية ، وهامة لأمكانية تعميمها في مستويات اعلى (مثل تحليل الاقترانات عديدة المتغيرات ، والتحليل الدالي) .

النظرية ١ .

يكون $ق : س \rightarrow \mathbb{C}$ قابلاً للتفاضل عند $س$ اذا وفقط اذا وجد $م \in \mathbb{C}$ بحيث أنه لكل $ε > 0$ ، يوجد $δ = δ(ε، أ) > 0$ بالخاصية التالية :

$$س \in س، |س - أ| > δ \Rightarrow |ق(س) - ق(أ) - م(س - أ)| \leq ε$$

(١) . . .

البرهان .

افرض ان $ق$ قابل للتفاضل عند $أ$ ومشتقته $ق'(أ)$. اذن لكل $ε > 0$ يوجد $δ > 0$ بحيث ان $س \in س، |س - أ| > δ$ تعطي $|ق(س) - ق(أ) - ق'(أ)(س - أ)| < ε$ ، حيث $ق(س، أ)$ هو كسرينوتن . وبأخذ $م = ق'(أ)$ كمقام مشترك نحصل على (١) ، حيث $م = ق'(أ)$ ، في حالة $|س - أ| > δ$. اما اذا كان $|س - أ| = 0$ فان $س = أ$ ويكون كل من طرفي (١) صفراً

وبالعكس ، افرض انه يوجد $م \in \mathbb{C}$ بحيث ان (١) تتحقق . افرض ان $ε > 0$.

وهكذا $\frac{\epsilon}{\rho} < 0$. اذن يوجد $\delta = \delta(\frac{\epsilon}{\rho}, \rho)$ بحيث ان من $\rho \leq \delta$ $|s - a| > \delta$ تعطي $|q - (s)| = |q - a| - \rho \geq |q - a| - \frac{\epsilon}{\rho} > 0$. اذن اذا كان $|s - a| > \delta$ ، فبالقسمة على $|s - a|$ نحصل على $|k(s, a)| - \rho \geq \frac{\epsilon}{\rho} > \epsilon$ ، وهذا يتضمن ان ρ مشتقة من $q(a)$. وهذا يثبت النظرية .

واذا كان q قابلا للتفاضل عند a وكتبنا

$$l(s) = q(a) + (s - a)q'(a)$$

فاننا نحصل على اقتران $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. فاذا كان q اقترانا حقيقيا معروفا على مجموعة جزئية من \mathbb{R} ، فان مخطط l هو خط مستقيم ميله $q'(a)$ ، ويمر بالنقطة $(a, q(a))$. وهنا نعرف l على انه تماس q عند a ، $q(a)$. اما في حالة \mathbb{C} فان المعنى الهندسي لـ l يصبح أقل وضوحا ولن ندرسه .

ينتج من (١) ان $|q(s) - l(s)| \leq |s - a| \epsilon$ عندما يكون $|s - a| > \delta$. اذن يمكن استخدام التماس لتقريب q قرب a .

وعند دراسة طرق التفاضل والعمليات الجبرية للمشتقات نرى احيانا انه من المفيد ان

نستخدم رموزا للمشتقة غير $q'(a)$ مثل $\frac{dq}{ds}$ ، dq . فعلى سبيل المثال ، اذا كان q ، h اقتراين قابلين للتفاضل عند a فاننا نثبت في النظرية (٢) ان $q + h$ قابل للتفاضل عند a وان

$$(q + h)'(a) = q'(a) + h'(a)$$

وهناك طرق اخرى لكتابة هذا مثل

$$\frac{d}{ds}(q + h) = \frac{dq}{ds} + \frac{dh}{ds} \text{ عند } s = a . \text{ أو } (q + h)' = dq + dh \text{ عند } s = a .$$

المثال ٢ .

إذا كان Q قابلاً للاشتقاق عند A فإن Q يكون متصلًا عند A . والعكس غير صحيح.
ولإثبات ذلك. من النظرية ١ نحصل على

$$(٢) \quad |Q(A) - Q(A)| \leq |Q(A) + \epsilon| \cdot |A - A| \dots \dots \dots$$

إذا كان $|A - A| > \epsilon$ ، وكان Q قابلاً للتفاضل عند A . إذن، يجعل $|A - A| > \epsilon$

$$\left\{ \frac{\epsilon}{|A| + \epsilon}, \epsilon \right\}$$

نحصل على $|Q(A) - Q(A)| < \epsilon$. إذن Q متصل عند A .

بأخذ المثال $Q(A) = |A|$ على R . نرى أن Q متصل عند الصفر ولكنه غير قابل للتفاضل عند الصفر.

وسيكون اهتمامنا الرئيسي في هذا الفصل هو دراسة الاقتترانات الحقيقية القابلة للتفاضل، والمعرفة على R أو على فترة مفتوحة في R . وهذا التحديد يجعل موضوع التفاضل أسهل ويمكننا من إعطاء نتائج هامة مثل نظرية القيمة المتوسطة ونظرية تايلور. وهناك بعض الفروق الهامة بين خواص التفاضل للاقتترانات الحقيقية في متغير حقيقي، والاقتترانات المركبة في متغير مركب، والاختيرة تشكل موضوعاً قائماً بذاته. والمثال التالي يوضح أحد هذه الفروق.

المثال ٣ .

لنأخذ اقتتران القيمة المطلقة على R ثم اقتتران مقياس الأعداد المركبة.
في الحالة الأولى يكون $Q(A) = |A|$ لكل $A \in R$ ، اقتترانا قابلاً للتفاضل على R إلا عند الصفر، ومن السهل إثبات ذلك.
وفي الحالة الثانية يكون $Q(A) = |A|$ لكل $A \in \mathbb{C}$ غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة في \mathbb{C} ، بخلاف الوضع في R . ولإثبات ذلك خذ C ، و D ، وخذ $C = u + iv$ ، و $D =$

$\frac{|ع+و|-|ع|}{و}$. فإذا كان $ع = ٠$ نأخذ $و < ٠$ ، و $و > ٠$ ، و R ونرى ان
 $\frac{|و|}{و}$ لا نهاية لها عندما $و \rightarrow ٠$

وإذا كان $ع \neq ٠$ نكتب $هـ = (ع ، و)$

$$(٣) \quad \dots = \frac{|ع+و|^٢ - |ع|^٢}{(|ع+و|+|ع|)(|ع+و|-|ع|)} = \frac{|ع+و|^٢ - |ع|^٢}{(|ع+و|+|ع|)(|ع+و|-|ع|)}$$

فمن الواضح انه اذا كان $هـ = (ع ، و)$ نهاية عند $و \rightarrow ٠$ فان $\frac{|ع+و|^٢ - |ع|^٢}{|ع+و|+|ع|} \rightarrow ٠$ نهاية مام $(و \rightarrow ٠)$.

اذن يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $|\frac{|ع+و|^٢ - |ع|^٢}{|ع+و|+|ع|} - ٠| < \delta$ اذا كان $|و| < \delta$.

$\frac{\delta}{٢}$ ، ثم $و = \frac{\delta}{٢}$ نحصل على $|١ - م| < \delta$ ، $|١ - م| < \delta$ واذن $|١ - م| = ٢$.

$-(١ - م) < \delta$ وهذا تناقض . اذن $ق$ غير قابل للتفاضل عند اي نقطة في \mathbb{R} .

النظرية ٢ .

اذا كان $ق$ ، $هـ$ قابلين للتفاضل عند $أ$ \exists $س$. وكان $ب$ ، $ج$ \in كان $ب$ $ق + ج$ $هـ$

، $ق$ $هـ$ قابلين للتفاضل عند $أ$. كذلك اذا كان $هـ$ $(س) \neq ٠$ لكل $س$ \exists $س$ فان $\frac{ق}{س}$

قابل للتفاضل عند $أ$ وكذلك :

$$(١) \quad (ب ق + ج هـ)' = (ب ق)' + (ج هـ)'$$

$$(٢) \quad (ق هـ)' = ق' هـ + (ق)' هـ$$

$$(٣) \quad \left(\frac{ق}{هـ}\right)' = \frac{ق' هـ - ق (هـ)'}{هـ^٢}$$

البرهان .

سنذكر برهاني (١) و (٣) . وبرهان (٢) شبيه بهما . افرض ان $\epsilon < 0$ ونخذي $|b|$

+ |حـ| . فمن النظرية ١ نستنتج انه يوجد δ_1 ، δ_2 بحيث ان δ_1 سه و δ_2 سه و $|ا| > \delta_1$ ، $|ا| - \delta_2 > \delta_1$ تعطي

$$|ا| - \delta_2 > \delta_1 \Rightarrow |ا| - \delta_2 > \delta_1 \Rightarrow |ا| - \delta_2 > \delta_1$$

وباخذ ل (س) = ب ق (س) + حـ هـ (س) يتبع ان
 $|ا| - \delta_2 > \delta_1 \Rightarrow |ا| - \delta_2 > \delta_1 \Rightarrow |ا| - \delta_2 > \delta_1$
 δ_1 ، $|ا| - \delta_2 > \delta_1$ اذن ل قابل للتفاضل فقد تحقق (١) .

ولأثبات (٣) اكتب و(سه) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$. افرض ان ك (س) ، حـ (سه) ، ا،

م (س) ، ا هي كسور نيوتن لـ ق، هـ، وعند ا على الترتيب . اذن

$$(4) \quad \dots \dots \dots \frac{ك(س) - ا(هـ) - ح(ا) ق(ا)}{هـ(س) - ا(ا)} = م(س) ، ا$$

ولكن عندما $س \rightarrow ا$ فان ك (س) ، ا $\rightarrow ق(ا)$ وكذلك ح (س) ، ا $\rightarrow هـ(ا)$. وكذلك من
 المثال ٢ فان هـ متصل عند ا ومنه هـ (س) $\rightarrow هـ(ا)$ عندما $س \rightarrow ا$. يتبع من النظرية ٢ في
 الفصل السادس ، ومن (٤) ان و(س) ، ا \rightarrow الطرف الايسر لـ (٣) ، عندما $س \rightarrow ا$ ، اي ان
 و(ا) تساوي الطرف الايسر من (٣) . وهذا يثبت النظرية .

المثال ٤ .

جد مشتقة و(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س + ١}$ حيث $س \in R$: لاجداد المشتقة نفرض ان

ق (س) = س^٣ - ١ ، هـ (س) = ١ + س^٢ في النظرية ٢ ، الجزء (٣) . اذن لكل س ∈ R
 نحصل على ق̄ (س) = ٣ س^٢ ، هـ (س) = ٢ س ، من المثال ١ والنظرية ٢ ، الجزء (١) .
 اذن

$$\begin{aligned} \text{و (س)} &= \frac{(١ + س)^٢ س^٣ - س^٢ (١ - س)^٢}{(١ + س)^٢} \\ &= \frac{س (٢ + ٣ س + س^٢)}{(١ + س)^٢} \end{aligned}$$

المثال ٥ .

افرض ان ق : R ← R قابل للتفاضل عند كل نقطة في R ، اي ان ق̄ (س) موجودة
 لكل س ∈ R . سنجد مشتقة ل (س) = س ق̄ (س) على فرض ان ق̄ قابل للتفاضل على
 R . اي اننا نفرض ان ق قابل للتفاضل مرتين على R . من النظرية ٢ ، لكل س ∈ R
 ل̄ (س) = س ق̄ (س) + ق̄ (س)
 حيث ق̄ ترمز لمشتقة ق̄ .

المثال ٦ .

اذا كانت C : C ← C حلودية درجتها n . فان ق̄ ، ق̄ (ق̄) = ق̄ ، ... قابلة
 للتفاضل على C . ذلك لانه اذا كان ك (ع) = ا_٠ + ا_١ ع + ... + ا_n عⁿ فانه من نظرية ٢
 نحصل على ق̄ (ع) = ا_١ + ٢ ا_٢ ع + ... + n ا_n ع^{n-١} ، ق̄ (ق̄) = ا_٢ + ٢ ا_٣ ع + ... + n ا_n ع^{n-٢} .
 (ن - ١) ا_n ع^{n-٢} . وعند الرتبة النونية نحصل على ق̄ (ق̄) = n ا_n . ولكل ر < n
 نحصل على ق̄ (ق̄) = ٠ لكل ع ∈ C . ق̄ (ق̄) يرمز الى المشتقة النونية لـ ق̄ . لهذا فان ق̄
 ق̄ (١) = ق̄ ، ونأخذ كاصطلاح ق̄ (١) = ق̄ .
 فاذا وضعنا ع = ٠ في صيغ ق̄ (ع) ، ق̄ (١) (ع) ، ... نحصل على ق̄ (٠) = ر ا_١ ،
 لكل ر = ١ ، ٢ ، ... ، n ، اذن

$$\text{ق (ع)} = \text{ق (٠)} + \text{ع ق (١)} + \frac{\text{ع}^2}{1^2} \text{ق (٢)} + \dots + \frac{\text{ع}^n}{n!} \text{ق (ن)} .$$

لكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$. فهذه النتيجة تعطي ق (ع) بدلالة قيم المشتقات الدن الأولى محسوبة عند الصفر.

في المثال (١) بينا ان

$$\frac{\text{ع}^n}{n!} = \text{ع}^{n-1} \text{ق (١)} + \dots + \text{ق (ن)} .$$

لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$. ونطمح الى توسيع هذه الصيغة لتشمل $n = 0, -1, -2, \dots$. في حالة $n = 0$ نعرف $\text{ع}^0 = 1$ لكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$. واذا كان n عددا صحيحا سالبا فانه يجب ان نفرض ان $\text{ع}^n \neq 0$ لان ع^n غير معرف عند $\text{ع} = 0$.

المثال ٧ .

اكتب ل (ع) = ع^n حيث $n = 0, -1, -2, \dots$. فاذا كان $n = 0$ فان ل (ع) = ١ ومنه ل (ع) = ٠ لكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$. اذن (٥) صحيحة لـ $n = 0$ ولكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$. اذا فسرنا الطرف الايسر من (٥) على انه صفر.

واذا كان n عددا صحيحا سالبا فان $n \in \mathbb{N}$ نخذ $\text{ع} \neq 0$ ويطبق النظرية ٢ ، الجزء

$$(٣) ، \text{حيث ق (ع)} = ١ ، \text{هـ (ع)} = \text{ع}^{-n} . \text{اذن ل (ع)} = \frac{\text{ق (ع)}}{\text{هـ (ع)}} ، \text{ق (ع)} = ٠ ، \text{هـ (ع)} = \text{ق (ع)} = \text{ق (ن-ع)} . \text{اذن}$$

$$\text{ل (ع)} = \frac{\text{ق (ن-ع)} - \text{ع}^{n-1}}{\text{ع}^{n-1} \text{ق (ع)}} = \text{ع}^{n-1} \text{ق (ع)} .$$

اذن (٥) صحيحة لجميع الاعداد الصحيحة ولكل $\text{ع} \neq 0$. واذا كان $n \leq 0$ فانها صحيحة لكل $\text{ع} \in \mathbb{C}$.

النظرية (٣) ادناه تعرف عادة باسم قاعدة تفاضل اقتران الاقتران ، وهي هامة جدا

عمليا . وأسهل صورة لتذكرها هي

$$\frac{د}{دس} ق (هـ - (س)) = \frac{دق}{ده} + \frac{ده}{دس} (٦)$$

ومن الخطأ محاولة اثبات هذه العلاقة باختصار د هـ في الطرف الايسر من (٦) . ان $\frac{ده}{دس}$ —

مجرد رمزي يعني هـ (س) وهو نهاية كسر نيوتن . لهذا فان $\frac{ده}{دس}$ ليس كسرا بسطه د هـ ومقامه

د س وهذه هي نقطة الضعف في هذا الرمز . ولكن العلاقة (٦) هي احلى ثمرات هذا الرمز .

ولحسن الحظ فان استخدام (٦) اسهل من اثباتها .

النظرية ٣ [اقتران الاقتران] .

افرض ان هـ : س ← ع ← وق : هـ (س) ← ع . فاذا كان هـ قابلا للتفاضل عند أ

و س ، وكان ق قابلا للتفاضل عند هـ (أ) كان ق هـ قابلا للتفاضل عند أ وكان

$$(ق هـ) (أ) = ق (هـ (أ)) هـ (أ) .$$

البرهان .

افرض ان $\epsilon < \epsilon$ واكتب ب = هـ (أ) ، ص = هـ (س) . عرف

$$ي = أ ص \{ ١ + (١ - هـ (أ)) + | ق (ب) | - ١ \} (٧)$$

فبما ان ق قابل للتفاضل عند ب فانه يوجد $\delta_٧ < \epsilon$ بحيث ان | ص - ب | $\delta_٧$ تعطي

$$| ق (ص) - ق (ب) - (ص - ب) ق (ب) | \geq | ي | ص - ب | (٨)$$

وبما ان هـ قابلا للتفاضل عند أ فانه يوجد $\delta_٨ < \epsilon$ بحيث ان | أ - س | $\delta_٨$ تعطي

$$| هـ (س) - هـ (أ) - (س - أ) هـ (أ) | \geq | ي | س - أ | (٩)$$

اذن

لكل $s < 0$ فان $\frac{دس}{دس} = \frac{1}{س}$.

سنجد مشتقات الاقترانات التالية: $ق (س) = \theta^س$ ، $ق (س) = جاس^٢$ ، $ق (س)$

$(س) = جاس^٢$ ، $ق (س) = جاس^٢$ ، $ق (س) = لوجاس$ ، $ق (س) = جاس^١$.

حيث الاقترانات $ق$ ، $ق$ ، $ق$ ، $ق$ معرفة على R ، $ق$ معرفة حيث $جاس < 0$ ، على سبيل المثال $0 < س < \pi$. كذلك $ق$ معرفة لكل $س \neq 0$.

بالنسبة لـ $ق$ ، نأخذ، في نظرية ٣: $هـ (س) = س^٢$ ، $ق (س) = \theta = س$. لهذا فان $ق (س) = ق (هـ (س))$. لكن $ق (س) = \theta = س$ وهـ $(س) = ٢$ ، واذن $ق (س) = ق (هـ (س))$ ، هـ $(س) = \theta = س$ ، ٢ ، اذن

$$\frac{دس}{دس} = \theta^س = ٢ = س \quad \text{لكل } س \in R \quad (١١)$$

وبعد التمرين الكافي سيتمكن الطالب من كتابة النتيجة (١١) دون اختيار $ق$ ، هـ. وذلك باخذ مشتقة الأس وضرها في الاقتران $\theta^س$.

وبالنسبة لـ $ق$ ، نأخذ هـ $(س) = س^٢$ ، $ق (س) = جاس$ ، ونحصل على $ق (س) = ٢$ $س$ جتا $س^٢$. وبالنسبة لـ $ق (س) = جاس^٢$ ، $ق (س) = جاس$ ، نأخذ هـ $(س) = جاس$ ، $ق (س) = س^٢$ واذن $ق (س) = ق (هـ (س))$. اذن $ق (س) = ٢$ $س$ جتا $س$ وهذا يساوي $حاس$ ، من خواص الاقترانات المثلثية.

كذلك، نجد ان $ق (س) = -٦$ (جتا ٢ $س$) $جاس$ لكل $س \in R$ ، ويتحدد $س$ كما ذكرنا نجد ان

$$\frac{د}{دس} لوجاس = \frac{جتاس}{جاس} = \text{غلثا س}؛ \quad \frac{د}{دس} جاس = \left(\frac{1}{س} \right) - \frac{1}{س^٢} \text{جتا } \frac{1}{س}$$

ولعظم الاقتراعات التي ترد في الامثلة الابتدائية مشتقات قابلة للتفاضل . والمثال التالي يبين انه ليس من الصحيح بشكل عام ان المشتقة قابلة للتفاضل .

المثال ٩ .

يوجد اقتران ق : $R \rightarrow R$ بحيث ان ق قابل للتفاضل اي انه يوجد ق' : $R \rightarrow R$ بحيث ان ق' غير متصل (اذن غير قابل للتفاضل) .

نعرف ق (س) = س^٢ جا $\frac{1}{س}$ عندما س $\neq ٠$ وق (٠) = ٠ . الان لكل س $\neq ٠$ ومن النظرية ٢ والنظرية ٣ نحصل على .

$$ق'(س) = (س) = ٢س جا \frac{1}{س} - جتا \frac{1}{س} \dots \dots \dots (١٢)$$

اما بالنسبة لـ س = ٠ فيجب ان نجد لها من التعريف : نأخذ

$$\frac{ق(٠) - ق(١)}{٠ - ١} = \frac{٠ - ١}{٠ - ١} = ١ \text{ وجا } \frac{1}{٠} \dots \dots \dots (١٣)$$

حيث $١ \neq ٠$. وباستخدام الحقيقة القائلة ان $|جا \frac{1}{س}| \geq ١$ لكل س $\neq ٠$ نحصل من (١٣) على ق'(٠) = ٠ . اذن ق' موجودة على R . فلو كان ق' متصلا عند الصفر لحصلنا على ق' (س)

$$\leftarrow ق'(٠) \text{ عندما س } \leftarrow ٠, \text{ وهذا يعطي جتا } \frac{1}{س} \leftarrow ٠ \text{ عندما س } \leftarrow ٠, \text{ لان } ٢س$$

$$\text{جا } \frac{1}{س} \leftarrow ٠ \text{ عندما س } \leftarrow ٠. \text{ اذن يوجد } \delta < ٠ \text{ بحيث ان } ٠ < |س| < \delta \text{ تعطي}$$

$$|جتا \frac{1}{س}| > ١. \text{ الان نأخذ } \exists N \text{ بحيث ان } N < \frac{1}{\delta \pi ٢} \text{ ونأخذ س =}$$

$$\frac{1}{N \pi ٢}. \text{ اذن } ٠ < |س| < \delta \text{ ومنه } |جتا (\pi ٢ ن)| > ١ \text{ مما يناقض جتا } (\pi ٢ ن) =$$

$$١. \text{ اذن ق' غير متصل على } ٠ \text{ مع انه واضح من (١٢) ان ق' متصل على كل نقطة س } \neq ٠$$

المشتقات العالية الرتبة

لنأخذ الاقتران $ق : س \rightarrow R$ حيث $س$ مجموعة غير خالية وجزئية من R . افرض ان $ق$ قابلة للتفاضل على كرة مفتوحة ما، ك (أ، نق) $\supset س$ ، اي افرض ان $ق$ (س) موجودة لكل $أ - نق > س > أ + نق$ حيث (أ - نق، أ + نق) $\supset س$. نقول ان $ق$ قابلة للتفاضل مرتين اذا وفقط اذا كان $ق$ قابلا للتفاضل اي انه يوجد

$$(ق') (أ) = س \rightarrow \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}.$$

اذا كان $ق$ قابلا للتفاضل مرتين فاننا نستعمل الرموز التالية لتعني $(ق')(ك(س)) : ق(س)$

، $ق^{(2)}(س)$ ، $ق''(س)$ ، $\frac{ق''(س)}{2!}$. واذا كان $ق$ موجودا فان $ق$ يكون متصلا حسب المثال ٢.

والمشتقة الثانية هامة في الميكانيكا : حيث نعرف تسارع الجسم بأنه $\frac{د^2ف}{د^2ن}$ ، حيث $ف = ف(ن)$ هي المسافة التي يقطعها الجسم في الزمن $ن$. اما السرعة $ع$ للجسم فتعرف بع $= \frac{د^2ف}{د^2ن}$ ؛ لهذا فان التسارع هو $\frac{د^3ف}{د^3ن}$.

ونرمز للمشتقة من الرتبة $ن$ ، ان وجدت، باحد الرموز:

$$ق^{(ن)}(س) ؛ د^n ق(س)، \frac{د^n ق}{د^n س}. \text{ وتعارف على ان } ق^{(0)} = ق.$$

اذا اردنا دراسة مشتقات عليا لاقترانات حقيقية او مركبة، معرفة على مجموعة جزئية من \mathbb{C} ، فان كل ما نفعله هو استبدال الكرة المفتوحة بقرص مفتوح $قر(أ، نق)$ ، ثم نمضي كما سبق.

المثال ١٠ .

افرض ان $\exists N$ وق $(ع) = ع^N$. فمن (هـ) وجدنا انه لكل $ع \in \mathbb{C}$ ، $ق^{(1)}(ع) =$
 $ن ع^{1-N}$ ، $ق^{(2)}(ع) = ن(ن-1) ع^{2-N}$ ، ... ، $ق^{(n)}(ع) = ن! وق^{(n)}(ع) = 0$ لكل $ر$
 $< ن$.
 كذلك اذا كان $هـ(ع) = \frac{1}{ع}$ ، $ع \neq 0$ فاننا نجد ان $هـ^{(ن)}(ع) = (-1)^N ن! ع^{-N-1}$
 لكل $ن \in \mathbb{N}$.

المثال ١١ .

عرّف $ق : R \leftarrow R$ بـ $ق(س) = س^2$ لكل $س \leq 0$ وق $ق(س) = 0$ لكل $س > 0$.
 اذن $ق^{(1)}(س) = 2س$ لكل $س \leq 0$ ، $ق^{(1)}(س) = 0$ لكل $س > 0$. اذن نرى ان $ق^{(1)}$
 متصل على R . ولكن $ق^{(2)}(0)$ غير موجودة لأن $\frac{ق^{(1)}(س)}{س} \leftarrow 2$ لكل $س < 0$ و
 $\frac{ق^{(1)}(س)}{س} \leftarrow 0$ لكل $س > 0$.

النظرية ٤ .

عندما تكون المشتقة التي رتبها $ن$ موجودة فانه لكل $ب$ ، $ح \in \mathbb{C}$ يكون
 $(1) ح^{(ن)}(ب ق + ح هـ) = ب ح^{(ن)} ق + ح ح^{(ن)} هـ$.
 $(2) ح^{(ن)}(ق هـ) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} ح^{(n-j)} ق^{(j)} هـ$ [نظرية ليبتس] .

البرهان .

(١) واضح ويتبع مباشرة من النظرية ٢ . قبل اثبات نظرية ليبتس نلاحظ التشابه بينها

وبين نظرية ذات الحدين لعددين مركبين a, b :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

نرى ان (٢) صحيحة لـ $n=1$ ، من النظرية ٢ ومن (١) $q = q$. نستمر الآن بالاستقراء ونفرض ان (٢) صحيحة لـ $n \leq N$ حيث $1 \leq n \leq N$. اذن

$$\begin{aligned} & (a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (a+b) \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \end{aligned}$$

وبمفاضلة الطرفين نحصل على ان $(a+b)^{n+1}$ يساوي

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

لكل $r=1, 2, \dots, n$. وهذا يثبت النظرية.

نريد الآن ان ندرس قابلية التفاضل في الاقتران العكسي. اي نريد ايجاد $\frac{d}{dx}$

عندما يكون $v = q$ (م) ويكون $\frac{d}{dx}$ معروفا. والنظرية التالية تتعلق باقترانات حقيقية

معروفة على فترات مغلقة في R ، وهي تعالج معظم الحالات المهمة.

النظرية ٥.

افرض ان $q: [a, b] \rightarrow R$ متزايد فعلا ومتصل على $[a, b]$. فاذا كان $a < b$ وكان q (ح) $\neq 0$ ، فان $h = q^{-1}$ يكون قابلا للتفاضل عند $y = q(x)$ ويكون h'

$$(ي) = \frac{1}{ق^-(ح)} . \text{وبعبارة أخرى إذا كان } ص = ق(س)، س = هـ(ص) \text{ فإن } \frac{دس}{دص} = \frac{1}{\frac{دص}{دس}} \text{ على شرط أن } \frac{دص}{دس} \neq 0$$

البرهان.

من النظرية ١٠ في الفصل ٦، فإن $ق^{-1}$ موجودة حيث، $ق^{-1} : [ق(أ)، ق(ب)] \leftarrow$
 R . افترض ان $ق(أ) > ص > ق(ب)$ ، $ص \neq ي$. اذن $ص = ق(س)$ لعنصر وحيد $س$

٣. (أ، ب)، $س \neq ح$. اذن

$$= \frac{س - ح}{ق(س) - ق(ح)} = \frac{هـ(ص) - هـ(ي)}{ص - ي} = \frac{1}{\frac{ق(س) - ق(ح)}{س - ح}} \quad \dots \dots \dots (14)$$

الآن $ص - ي$ تعطي $هـ(ص) \leftarrow هـ(ي)$ لأن $هـ$ متصل. اذن $س \leftarrow ح$ ونحصل من

$$(14) \text{ على } هـ(ي) = \frac{1}{ق(ح)}$$

المثال ١٢.

سوف نوسع الصيغة $\frac{دس}{دص}$ $س^0 = ن$ $س^{-1}$ لتشمل الحالة عندما يكون $ن$ عددا نسبيا:

اولا افترض ان $ن = \frac{1}{ر}$ حيث $ر \in N$ وافترض ان $س < 0$.

اكتب $ص = س^0$ ، اذن $ص^0 = س$. ومن النظرية ٥ نحصل على

$$(15) \quad \frac{دص}{دس} = \frac{دس}{دص} = \frac{1}{\frac{دص}{دس}} = \frac{1}{س^{-1}} = ن \quad ص^0 = ن \quad س^{-1} = ن \quad \dots \dots \dots (15)$$

الآن افترض ان $ص = س^{\frac{1}{2}}$ حيث $ب \in Z$ ، $ر \in N$ وان $س < 0$. فمن قاعدة اقتران

الاقتران ومن (١٥) نحصل على

$$\frac{\text{دس}}{\text{دس}} = \text{ب} \left(\frac{1}{\text{ب}} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\text{ب}}{\text{دس}}} = \frac{1}{\text{ب}^{-1} \text{دس}}$$

فمثلا لكل $\text{دس} < 0$ نحصل على $\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$. يجب ملاحظة ان

ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ غير قابل للتفاضل عند الصفر. لان

$$\frac{(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ق}))}{\text{س}} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \leftarrow \infty \text{ (س} \leftarrow 0 \text{)}.$$

وهناك عناصر $\text{دس} \in Q$ حيث ان $\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$ لكل $\text{دس} \neq 0$ ، مثلا $\text{دس} = 1$

$\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$. في هذه الحالة فان الاقتران ق (س) = $\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$ متزايد فعلا على R وق (س) = $\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$ <

0 الا عند $\text{دس} = 0$.

تمارين ٧ - ١

(في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اذا كان ق قابلا للتفاضل عند أ فاثبت ان

$$\text{هـ} (أ) ، \text{و} (ق(أ) + \text{و} - \text{ق}(أ) - \text{و}) / 2 \leftarrow \text{ق}(أ) \text{ عندما } \text{و} \leftarrow 0 .$$

اعط مثلا حيث يكون هـ (أ) ، و $\leftarrow \text{م} (و \leftarrow 0)$ ولكن ق غير قابل للتفاضل عند أ .

٢ - افرض ان ق : $R \leftarrow R$ قابل للتفاضل على R . جد متالية (هـ_n) من اقترانات متصلة

على R بحيث ان نها هـ_n (س) = ق (س) لكل $\text{س} \in R$

٣ - اثبت ان الاقتران هـ : $R \leftarrow R$ المعرف بهـ (س) = $\frac{1}{\sqrt{\text{دس}}}$ اذا كان $\text{دس} \in Q$ ، هـ

(س) = 0 اذا كان $\text{دس} \notin Q$ قابل للتفاضل عند الصفر فقط .

٤- افرض ان ق (س) = س^٢ على [أ ، ب] . جد حد \exists (أ ، ب) بحيث ان ق (ب) - ق (أ) = (ب - أ) ق (حـ) .

٥- عرف ق : $R \leftarrow R$ بـ ق (س) = $|س|$. جد المشتقات الاربع الاولى حيث توجد ، ارسم مخططات ق ، ق^(١) ، ق^(٢) ، ق^(٣) ، ق^(٤) على [١- ، ١] .

٦- عرف ق : $R \leftarrow R$ بـ ق (س) = س^٢ اذا كان س ≠ ٠ وق (٠) = ٠ . جد ق (س) لكل س $\exists R$. [يجب حل الحالة س = ٠ لوحدها] .

٧- اذا كان ص = ق (ع) ، ع = هـ (س) وكان ق ، هـ قابلين للتفاضل مرتين فاثبت ان

$$\frac{ص^{دص}}{دص} = \frac{دص}{دع} + \frac{ص^{دع}}{دص} \left(\frac{دص}{دع} \right)$$

٨- اذا كان ك (س) = بـ + بـ (س - أ) + ... + بـ (س - أ)^٥ ، اكتب بـ ، بـ^١ ، ... ، بـ^٥ بدلالة مشتقات ك عند س = أ ، ثم اكتب ٣ - ٢ + س + ٧ س^٢ - س^٣ بصيغة حدودية في (س - ٢) .

٩- (أ) اذا كانت ك حدودية فاثبت انه يوجد حدودية اخرى ل بحيث ان ل = ك .

(ب) اثبت انه لا يوجد حدودية ق بحيث ان ق (س) = $\frac{١}{س}$ لكل س < ٠ .

١٠- يتحرك جسيم على خط مستقيم من نقطة الاصل بحيث ان بعده ف عن ٠ بعد اي زمن ن يعطى بـ ف = هـ ان جا ب ن حيث أ ، ب ثابتان . جد السرعة الاولى والتسارع للجسيم .

١١- [معادلات كوشي وديان] . افرض ان ق : $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ قابل للتفاضل عند ع \mathbb{R} . اكتب ق (ع) = ل (س ، ص) + ت م (س ، ص) حيث ل ، م حقيقتان . على سبيل المثال اذا كان ق (ع) = ع^٢ ، ع = س + ت ص فان ل = س^٢ - ص^٢ وم = ٢ س ص . كذلك اكتب ق (ع) = أ + ت ب حيث أ ، ب اعداد حقيقية . طبق النظرية ١ لتثبت ان ل (س ، ص) (

قابل للتفاضل كاقتران في S وإن $L(S) = 0$ = في العادة نكتب $L(S)$ ، S)
 $= A$. اثبت أن $L(S)$ ، S) = $-B$ ، $M(S)$ ، S) = $-B$ ، $M(S)$ ، S)
 S) = A . لهذا فانه عند S ، S) نحصل على
 $L(S) = M(S)$ ، $M(S) = -L(S)$.
تسمى هاتان المعادلتان معادلتى كوشي وريمان .

عند إيجاد L عند S ، S) فاننا نعتبر $L(S)$ ، S) اقترانا في S قابلا للتفاضل
ونكتب $L(S)$ ، S) = $L(S)$ ، S) . ونسمي $L(S)$ ، S) مشتقات ل الجزئية
بالنسبة لـ S ، S) .

حقق معادلتى كوشي وريمان في C^2 ، C^1 ، C^0 .
١٢ - جد المشتقة النونية لـ $C^0(S)$ = S ، S) R وهـ S) = S لوس S) $(S < 0)$
١٣ - عرف S = جتا $(3 \text{ لو } (1 + S))$ لكل $S < 1$. اثبت أن
 $(S + 1)^2 S + (S + 1) S + 9 S = 0$ ،
استنتج أن

$$S_{2+n} = (0) + (2 + n + 1) S_{1+n} + (0) + (2 + n) S_0 + (0) = 0 \text{ حيث } S_0 = 0$$

١٤ - افرض أن $0 < 1$ عدد نسبي . وافرض أن $C \leftarrow C$ يحقق $C(C) - C(C^*) = 0$
 $C(C) - C(C^*) = 0$ لكل C ، $C^* \in C$.
هل يجب أن يكون C قابلا للتفاضل؟

١٥ - جد اقترانا في $R \leftarrow R$ بحيث أن C متزايد فعلا الا على $[0, 1]$ وقابل للاشتقاق
على R ويحقق في S) = 0 لكل $S \in [0, 1]$.

١٦ - عرف $K : R \leftarrow R$ بـ $K(S) = (S - A) - (S - B)$ ($S - C$) .
إذا كان $A > B > C$ فاثبت انه يوجد D (A ، B) بحيث أن $K(D) = 0$. اثبت أن هذا
يبقى صحيحا إذا كان $A > B = C$.

١٧- افترض ان ق : $R \rightarrow R$ قابل للتفاضل على R ، حيث ق (س) = س (س > ٠) ، ق (س) = أ + ب س + ج س^٢ + د س^٣ ، ق (س) = س (س ≥ ٠) ، ق (س) = -س (س < ١) جد قيم أ ، ب ، ج ، د .

٢ . القيم المعظمى والقيم الصغرى

نظهر المسائل التي تتعلق بإيجاد القيم العظمى والصغرى لاقتِران ما في العديد من الأمور العملية والنظرية . فعلى سبيل المثال اذا وضع احد طرفي قضيب حديدي في حائط ووضع الطرف الآخر على دعامة فان المهندس قد يرغب في معرفة اي نقطة على القضيب يقع عندها اكبر إنثناء . وفي مسائل عملية أخرى يراد إيجاد زاوية القذف التي تعطي أكبر مدى للمقنوف . طبعاً لحل هاتين المسألتين نحتاج الى المام بالمهندسة والفيزياء وليس فقط بالرياضيات . ولكن حالما نوضح المسألة على شكل رياضي فإنه يمكن حلها بالطرق التحليلية .

واليك مسألة أخرى مشهورة هي إيجاد الشكل في المستوى الذي له محيط مغلق طوله ثابت ويحوي أكبر مساحة ممكنة . كان معروفًا للاغريق القدامى ان الدائرة تحوي أكبر مساحة . ولكن لم تحل المسألة حلاً رياضياً الا في النصف الثاني من القرن التاسع عشر . فاذا حددنا الاشكال بمستطيلات فان المسألة تصبح سهلة ويكون المربع هو الشكل الذي يحوي أكبر مساحة .

ويستفاد من علم التفاضل في حل المسائل التي تتعلق بالقيم العظمى والصغرى .
والطريقة الاساسية هي ايجاد النقط حـ بحيث ان $Q = 0$ وتسمى هذه النقاط نقاطا حرجية
وفي العديد من الحالات تكون القيم الصغرى والعظمى نقاطا حرجية ولكن هذا ليس صحيحا
دائما . ويمكن للاقتران يشكل عام ان يكون له قيم عظمى وصغرى دون ان يكون قابلا
للتفاضل ، ولكن يمكن القول ان معظم الحالات المثيرة للاهتمام يكون بها الاقتران قابلا
للتفاضل .

سوف نذكر الآن تعريفين . في كل منهما نأخذ الاقتران $ق : س \leftarrow R$ حيث $س$ مجموعة جزئية غير خالية في R . وعلى القاريء ان يتذكر تعريف $س^*$ ، داخل $س$ لصلته بالقمم المحلية .

القيمة المطلقة: يقال ان $ق$ له قيمة عظمى مطلقة عند $أ \in س$ اذا وفقط اذا كان $ق(س)$ $\geq ق(أ)$ لكل $أ \in س$. واذا كان $ب \in س$ بحيث ان $ق(س) \leq ق(ب)$ لكل $ب \in س$ فان $ق$ له قيمة صغرى مطلقة عند $ب$. والقيمة المطلقة هي قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة .

القيمة المحلية: افترض ان $ح \in س^*$. تسمى $ح$ قيمة عظمى محلية لـ $ق$ اذا وفقط اذا كان يوجد كرة $ك(ح ، نق)$ $\cap س$ بحيث ان $ق(س) \geq ق(ح)$ لكل $س \in ك(ح ، نق)$. ونحصل على تعريف القيمة الصغرى المحلية باستبدال $ق(س) \geq ق(ح)$ بـ $ق(س) \leq ق(ح)$. والقيمة المحلية هي قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية .

سوف نرمز لمجموعة القيم المحلية بالرمز قمع $ق(ق)$ أو قمع $ق(س)$ ، اذا احتجنا الى ذكر مجال الاقتران . ومن المحتمل ان يكون قمع $ق(ق)$ هو المجموعة الخالية \emptyset .

لقد استعملنا كلمة مطلقة في التعريف الاول لاننا هناك نهتم بتغير $ق(س)$ عندما تتحرك $س$ على طول $س$. وفي التعريف الثاني انحصر الاهتمام محليا على $ح$ ، وما يهمنا في هذه الحالة هو سلوك $ق(س)$ عندما تكون $س$ قريبة من $ح$.

واحيانا نرغب في ان نتحدث عن القمم الفعلية ، محلية او مطلقة ، ففي هذه الحالات نستبدل \geq (أو \leq) بـ $>$ (أو $<$) في التعاريف السابقة ، الا عندما تكون $س = أ$ ، ب أو $ح$.

المثال ١٣ .

عرف $ق : [٠ ، ١] \leftarrow R$ بـ $ق(س) = س$. هناك قيمة صغرى مطلقة عند ٠ وقيمة عظمى مطلقة عند ١ . ولكن ٠ ليس قيمة صغرى محلية لان ٠ ليس عنصرا في داخل $[٠ ، ١]$ ، ١ ، كما هو مطلوب في التعريف ، وكذلك ١ ليس قيمة عظمى محلية . من الواضح الآن ان قمع $ق(ق) = \emptyset$.

المثال ١٤ .

عرف ق : $[1, -1] \leftarrow R$ بق (س) = $|س|$. قيمة صغرى محلية وهي ايضا قيمة صغرى مطلقة . واضح ان قمح (ق) = $\{0\}$ ، يوجد ايضا قيم عظمى مطلقة عند ١ ،
١- .

المثال ١٥ .

عرف ق : $R \leftarrow R$ بق (س) = $س^3$. نعرف ان ق متزايدة فعلا وغير محصور من اعلى أو من أسفل . اذن قمح (ق) = \emptyset ولا يوجد قمم مطلقة .

المثال ١٦

عرف ق : $R \leftarrow R$ بق (س) = $س^2 - \frac{3}{4}$. إن رسمنا مخطط هذا الاقتران يوحى بأن له قيمة عظمى محلية عند الصفر، وقيمة صغرى محلية عند ١ . فإذا كان س في $(1, 0)$ ، $(1, -1)$ فإن س $> \frac{3}{4}$ ، ومنه ق (س) $\geq 0 = ق(0)$ لكل س $\in ك$. $(1, 0)$. اذن ٠ هو قيمة عظمى محلية .
لندرس الآن سلوك ق عند س = ١ . نكتب س = ١ + واذن ق (س) - ق (١) = $و^2$ (و) $+ (\frac{3}{4} - 0)$ ، اذا كان و $\leq -\frac{3}{4}$. اذن ق (س) $\leq ق(1)$ اذا كان $-\frac{1}{4} \geq س$.
اذن يوجد قيمة صغرى محلية عند ١ . وواضح انه لا يوجد قمم مطلقة .

في الامثلة السابقة لم يكن عندنا طريقة منظمة للبحث عن القمم . لكن في المثال ١٦ لاحظ أن ق (س) = $س^3 - (س - 1)$ ، واذن ق (س) = ٠ اذا فقط اذا كان س = ٠ أو س = ١ . اذن ق (س) = ٠ عندما يكون س قمة محلية . ان هذه النتيجة متوقعة هندسيا ، وهي حالة خاصة من النظرية التالية :

النظرية ٦ .

إذا كان ق قابلاً للتفاضل عند ح وكان ح \supset قمع (ق) فان ق (ح) = ٠

البرهان .

افرض ان ح قيمة محلية عظمى . اذن ق (س) \geq ق (ح) لكل س \supset ك (ح) ، ٥ (أي لكل ح - ٥ \supset س \supset ح + ٥ .

لنأخذ الآن ح \supset س \supset ح + ٥ اذن ق (س) - ق (ح) \geq ٠ وس - ح $<$ ٠ ، لهذا فان كسرينوتن ك (س ، ح) \geq ٠ . وعندما س \leftarrow ح + نحصل على ق (ح) \geq ٠ لأن ق قابل للتفاضل عند ح .

فاذا اخذنا ح - ٥ \supset س \supset ح فان ق (س) - ق (ح) \geq ٠ وس - ح $>$ ٠ واذن يكون كسرينوتن ك (س ، ح) \leq ٠ . وعندما س \leftarrow ح - نحصل على ق (ح) \leq ٠ ومن قانون التثليث نحصل على ق (ح) = ٠ .

وبالمثل نعالج القيم الصغرى المحلية . وهكذا يتم البرهان .

ملاحظة : ان عكس النظرية ٦ خطأ بشكل عام . فعلى سبيل المثال ق (س) = س^٣ على R ، ق (٠) = ٠ ولكن ٠ \nsubseteq قمع (ق) .

لنعرف الآن النقطة الحرجة :

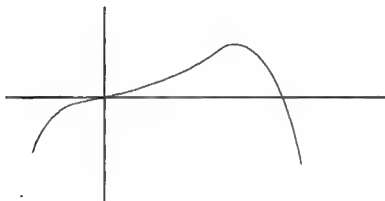
النقطة الحرجة : نقول ان ح هي نقطة حرجة لـ ق اذا فقط اذا كان ق قابلاً للتفاضل عند ح وكان ق (ح) = ٠ . سنرمز لمجموعة جميع النقاط الحرجة لـ ق بالرمز حر (ق) .

فمن النظرية ٦ يتبع ان قمع (ق) \supset حر (ق) عندما يكون ق قابلاً للتفاضل . ويمكن ان يكون الاحتواء فعلياً كما نرى من المثال ق (س) = س^٣ على R .

وفي مسائل القمم ما نفعله عادة هو ان نجد حر (ق) اولاً ثم نحذف النقاط الحرجة التي لا تكون قمماً محلية ونحصل على قمع (ق) .

المثال ١٧ .

عرف ق : $R \leftarrow R$ بق (س) = س^٢ (١ - س) . اذن ق (س) = س^٣ - س^٢ - س^٤ وهذا يساوي صفرا اذا فقط اذا كان س = ٠ أو س = $\frac{3}{4}$. اذن حر(ق) = $\{ \frac{3}{4}, ٠ \}$.
وعلىنا ان ندرس نقاط هذه المجموعة المعروفة اي منها قمة محلية . فاذا كان $٠ < س < ١$ فان ق (س) < ٠ ، واذا كان س > ١ فان ق (س) > ٠ ، واذ كان س = ٠ ، $٠ < س < ١$ قمح (ق) .
الآن نكتب س = ٠ + $\frac{3}{4}$. فنجد ان ق ($\frac{3}{4}$) - ق (س) حدودية في ووترى انها تكون غير سالبة اذا كانت وصغيرة . اذن يوجد عند $\frac{3}{4}$ قيمة عظمى محلية . وفي الشكل التالي مخطط الاقتران س = س^٣ (١ - س)



وسنعتني في البنود القادمة طرقا افضل لايجاد القمم المحلية وهذه الطرق تبحث في اشارة ق والمشتقات العليا (ان وجدت) وتعتمد هذه الطرق على «نظرية القيمة المتوسطة» .
والنظرية التالية تعطي شروطا كافية بسيطة لكي يكون للاقتران نقطة حرجية في فترة ما . وهي منسوبة الى «مايكل رول» (١٦٥٢ - ١٧١٩) ولها نتائج هامة ، اهمها نظرية القيمة المتوسطة التي سنذكرها في البند القادم .

النظرية ٧ [نظرية رول].

افرض ان ق يحقق شروط رول الثلاثة التالية:

(أ) ق : [أ ، ب] \rightarrow R ،

(ب) ق متصل على الفترة المغلقة [أ ، ب]،

(ح) ق قابل للتفاضل على الفترة المفتوحة (أ ، ب).

اذن اذا كان ق (أ) = ق (ب) فانه يوجد نقطة واحدة على الاقل ح \in (أ ، ب) بحيث ان ق

(ح) = ٠ اي انه يوجد لـ ق نقطة حرجة واحدة على الاقل في الفترة (أ ، ب).

البرهان .

نأخذ حالتين . اولاً اذا كان ق ثابتاً اي ان ق (س) = ق (أ) لكل س \in [أ ، ب] مان ق

(س) = ٠ لكل س \in (أ ، ب) واذن اي نقطة ح \in (أ ، ب) هي نقطة حرجة .

ثانياً، افرض ان ق غير ثابت، اذن يوجد س . \in (أ ، ب) بحيث ان ق (س) \neq ق

(أ) . افرض ان ق (س) < ق (أ)، والحالة الثانية ق (س) > ق (أ) مشابهة . الآن ق

متصل على [أ ، ب] اذن من النظرية ٧ في الفصل ٦ نحصل على ان ق يأخذ قيمة صـحـع

(ق) . اي انه يوجد قيمة عظمى مطلقة لـ ق عند نقطة ما ح \in [أ ، ب] . اذن ق (ح) \leq ق

(س) لكل س \in [أ ، ب] واذن ق (ح) \leq ق (س) < ق (أ) . وبما ان ق (أ) = ق (ب) و

ق (س) < ق (أ) فانه ينتج ان أ > ح > ب ، اي ان ، ح \in (أ ، ب) .

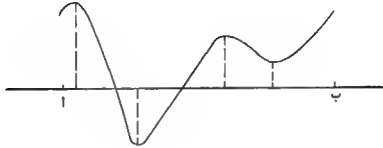
لكن ق قابل للتفاضل عند ح وق (ح) \leq ق (س) لكل س \in [أ ، ب] تعطي انه

يوجد قيمة عظمى محلية لـ ق عند ح . ومن النظرية ٦ نستنتج ان ق (ح) = ٠ .

واذا كان ق (س) > ق (أ) فاننا نرى انه يوجد لـ ق قيمة صغرى محلية عند نقطة ما في

داخل [أ ، ب] ونحصل ثانية على نقطة حرجة . وهذا يثبت النظرية .

والشكل التالي يوضح نظرية رول لاقتراح له اربع نقاط حرجة .



وفي المستقبل سنرمز لمجموعة جميع الاقترانات التي تحقق شروط رول الثلاثة (أ) ، (ب) ، (جـ) بالرمز رول [أ ، ب] .

المثال ١٨ .

(١) لاي فترة [أ ، ب] ولكل حدودية ك فان ك \exists رول [أ ، ب] .

(٢) عرف ق : $[1, -1] \leftarrow R$ بق (س) = $\sqrt{1 - س^2}$. فمخطط ص = ق (س) هو نصف دائرة مركزها نقطة الاصل . ان ق \exists رول $[1, -1]$ وفي هذه الحالة فان ق غير قابل للتفاضل عند ± 1 .

والمثال التالي يبين انه بالامكان استخدام نظرية رول لايجاد جلور معادلات .

المثال ١٩ .

اثبت انه يوجد للمعادلة $س^4 - ٤س + ١ = ٠$ جلرين ١ و ٠ . لناخذ الاقتران ق (س) = $س^3 - ٢س^٢ + س$. اذن ق (٠) = ق (١) ومن نظرية رول على $[1, ٠]$ نرى انه يوجد حـ \exists (١ ، ٠) بحيث ان ق (حـ) = ٠ ، أي ان $س^4 - ٤س + ١ = ٠$. اذن حـ هو جذر للمعادلة . لاحظ ان الفكرة كانت ايجاد اقتران تكون مشتقته هي الاقتران الذي نريد ايجاد اصفاره .

تمارين ٧ - ٢

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ - عين المجموعات حر (نقاط حرجة)، قمع (قمم محلية)، قمت (قمم مطلقة) لكل من: (أ)
(س - ١) $^2(٢ + \text{س})$ على R ، (٢) $س^٣ - ١٢س + ٢٠$ على $[-٣، ٥]$ ، (٣) $\text{حاس} +$
جتاس على $[٠، \pi]$.

٢ - اثبت انه من بين جميع المستطيلات التي لها محيط معين $م$ ، فان المربع اكبرها مساحة.

٣ - على فرض ان $م، ن \in N$ ، حقق نظرية رول في الحدودية $ق(س) = س^{ن-١} - (١-س)^ن$
على $[٠، ١]$ بايجاد قيمة حد مناسبة.

٤ - اعط مثالا لاقتران يأخذ قيما حقيقية $ق \ni \text{رول} [٢، -٢]$ بحيث ان $ق(-٢) = ق(٢)$ وله
نقطة حرجة وحيدة في $(-٢، ٢)$.

٥ - باستخدام العمليات الجبرية العادية على الاقترانات (انظر الفصل ٦ البند ٣)، اثبت ان
رول $[أ، ب]$ هي جبرية تبديلية لها عنصر محايد.

٦ - اثبت انه يوجد للمعادلة $٤س^٣ + ٣س^٢ + ٢س - ١ = ٠$ جذر واحد على
الاقبل بين الصفر و ١.

٧ - على فرض ان $\frac{١}{١+ن} + \frac{١}{١+ن} + \dots + \frac{١}{١+ن} = ٠$ ، اثبت انه يوجد للمعادلة:

$$١س^٥ + ١س^٤ + \dots + ١س^١ = ٠ \text{ جذرين الصفر و ١.}$$

٨ - على فرض ان $ق(س) = ١س^٥ + ١س^٤ + \dots + ١س^١ + ١س^٠$ حدودية حقيقية لها $(١+ن)$ صفرا
مختلفا، استخدم نظرية رول لاثبات ان $٠ = ٠$ لكل $ر \geq ٠$.

استنتج ان الاقتران الدوري الذي يكون نسبيا يجب ان يكون ثابتا.

افرض ان $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قابل للتفاضل على $[a, b]$ وافرض ان $q'(a) > q'(b)$.
 (ب). فاذا كان p عددا بين $q'(a)$ ، و $q'(b)$ فاثبت انه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث ان $q'(c) = p$.
 (ح). هذا يثبت انه مع ان q قد لا يكون متصلا الا انه يأخذ قيا وسيطية. [ارشادخذ الاقتران $h(s) = q(s) - ps$ - p هو الذي هو متصل على $[a, b]$ ، اذن h يأخذ قيمة كـ $h(a)$ و $h(b)$ على نقطة ما $c \in (a, b)$. ثم استخدم $h'(a) > 0 > h'(b)$ لاثبات ان $a < c < b$.]

٣. نظريات القيمة المتوسطة

تعتبر نظريات القيمة المتوسطة من اهم نظريات التحليل. والنظرية الاساسية فيها هي امتداد لنظرية رول. ويدعى هذا الامتداد «نظرية القيمة المتوسطة» وهي تعالج الحالة عندما يكون f رول $[a, b]$ ولكن $f(a) \neq f(b)$.

وتنص هذه النظرية (ستثبتها فيما بعد) انه اذا كان $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ متصلا على $[a, b]$ وقابلا للتفاضل على (a, b) ، اي ان q رول $[a, b]$ فانه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث ان

$$q'(c) = \frac{q(b) - q(a)}{b - a} \quad (١٦)$$

من الواضح ان نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة لانه اذا كان $q(a) = q(b)$ فان (١٦) تعطي $q'(c) = 0$ ، واذن $q'(c) = 0$.
 واليك نتيجتين هامتين لنظرية القيمة المتوسطة: (١) اذا كان $q'(s) = 0$ على (a, b) فان q يكون ثابتاً على $[a, b]$. (٢) اذا كان $q'(s) < 0$ على (a, b) فان q يكون

متزايداً فعلاً على [أ ، ب].

تمكننا نظرية القيمة المتوسطة من الحصول على معلومات عن الاقتران اذا عرفنا معلومات كافية عن مشتقته . ففي كثير من الحالات العملية تكون معاملة مشتقة الاقتران اسهل من معاملة الاقتران نفسه .

بالنسبة للاقترانات التي لها مشتقات اعلى على فترة ما ، فهناك نظرية القيمة المتوسطة النونية (نظرية تايلور مع الباقي) التي هي قيمة في حالات عديدة في إيجاد متسلسلات القوى للاقترانات الاولى . كذلك فان نظرية القيمة المتوسطة تعطي معلومات قيمة عن القيم المحلية للاقترانات القابلة للتفاضل .

ويمكن استنتاج نظريات القيمة المتوسطة بتطبيق نظرية رول على اقترانات مناسبة نخترها . ويمكن ان نجعل بعض البراهين سهلة التذكر اذا استخدمنا المحددات لاجراء الاقتران المناسب . سنذكر الآن التعاريف الاساسية وبعض الحقائق عن المحددات من الرتبة 2×2 أو 3×3 .

افرض ان

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$$

هي مصفوفة من الاعداد الحقيقية من الرتبة 2×2 . فان محددة أ تعرف على انها العدد الحقيقي م الذي يسوي $a \cdot d - b \cdot c$ ، ونكتب

$$| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | = a \cdot d - b \cdot c \quad (17)$$

وفي الحقيقة اننا لا نحتاج الى اي معرفة بالمصفوفات ويمكن اعتبار :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

طريقة لكتابة $\text{أ}_1 - \text{أ}_2 - \text{ب}_1$ من المهم ان تظل المدخلات أ_1 ، أ_2 ، ب_1 ، ب_2 ، كما هي مرتبة، لهذا، وعلى سبيل المثال فان

$$(17) \quad \dots = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \quad \text{ولكن} \quad \begin{vmatrix} \text{أ}_2 & \text{أ}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = 1$$

واذا كان صفًا م متطابقين فان (17) تعطي ان

$$(18) \quad \dots = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_1 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = 0$$

كذلك $0 =$ اذا كان عمودا م متطابقين .

واذا كان أ_1 ، أ_2 اقترانين في س قابلين للتفاضل وكان ب_1 ، ب_2 ثابتين فان (17)

تعطي

$$\text{م}(\text{س}) = \text{أ}_1(\text{س})\text{ب}_2 - \text{أ}_2(\text{س})\text{ب}_1$$

اذن

$$(19) \quad \dots = \begin{vmatrix} \text{أ}_1(\text{س}) & \text{أ}_2(\text{س}) \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

لهذا فاننا نفاضل السطر الاول من م عندما يكون السطر الاول قابلا للتفاضل ويكون السطر الثاني ثابتا .

افرض الآن ان

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 & \text{أ}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣٢١ \\ ٣٢١ \\ ٣٢١ \end{vmatrix}$$

الخ، اذن نعرف محدة أعلى أنها

$$\begin{vmatrix} ٣٢١ \\ ٣٢١ \\ ٣٢١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤٢١ \\ ٤٢١ \\ ٤٢١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤٣١ \\ ٤٣١ \\ ٤٣١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤٣٢ \\ ٤٣٢ \\ ٤٣٢ \end{vmatrix}$$

بامكاننا الآن اثبات نظرية تعطي نظرية القيمة المتوسطة كنتيجة، وكذلك تعطي نتيجة تعرف باسم «نظرية كوشي للقيمة المتوسطة».

النظرية ٨.

افرض ان ق، هـ \Rightarrow رول [أ، ب]. اذن يوجد ح \in (أ، ب) بحيث ان
 $ق'(ح) = [هـ(ب) - هـ(أ)] / (ب - أ)$. . (٢٣)

البرهان.

خذ الاقتران م : [أ، ب] \rightarrow R المعروف بالمحدة

$$\begin{vmatrix} ق(س) & هـ(س) \\ ق(أ) & هـ(أ) \\ ق(ب) & هـ(ب) \end{vmatrix} = م(س)$$

اذن م \Rightarrow رول [أ، ب] لان ق، هـ \Rightarrow رول [أ، ب]. الآن سطر م (أ) الاولان متماثلان.
 اذن م (أ) = ٠ حسب (٢١). كذلك م (ب) = ٠ لان السطرين الاول والثالث متماثلان. اذن

م (أ) = م (ب) = ٠ ، ويمكن تطبيق نظرية رول على م . ومنه يوجد حـ \ni (أ ، ب) بحيث
ان م (حـ) = ٠ . اذن من (٢٢) نحصل على

$$٠ = \begin{vmatrix} ٠ & هـ(حـ) & ق(حـ) \\ ١ & هـ(أ) & ق(أ) \\ ١ & هـ(ب) & ق(ب) \end{vmatrix}$$

من التعريف (٢٠) نحصل على ق (حـ) (هـ(أ) - هـ(ب)) = هـ(حـ) (ق(أ) - ق(ب)) ،
وهي النتيجة المطلوبة .

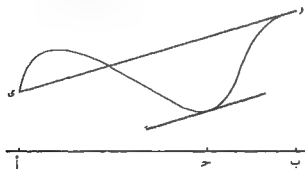
النظرية ٩ [نظرية القيمة المتوسطة] .

إذا كان ق \ni رول [أ ، ب] فانه يوجد على الاقل عدد واحد حـ \ni (أ ، ب) بحيث
ان

$$ق(ب) - ق(أ) = (ب - أ) ق(حـ) (٢٤)$$

البرهان .

خذ هـ(س) = س في النظرية ٨ . اذن هـ(ب) - هـ(أ) = ب - أ ، هـ(س) = ١ لكل
س \ni [أ ، ب] . لهذا فان (٢٣) تعطي (٢٤) مما يثبت النظرية .
ومن السهل اعطاء تفسير هندسي لنظرية القيمة المتوسطة :



إن ميل الوترى وهو $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$ ، وميل المماس عند النقطة (حـ) ، ق (حـ)) هو

ق (حـ) . وتنص نظرية القيمة المتوسطة على أنه يوجد نقطة حـ بحيث إن ميل المماس عندها يساوي ميل الوترى و . ويتضح من الرسم أنه قد يوجد أكثر من نقطة تحقق (٢٤) .

المثال ٢٠ .

عرف ق (س) = س^٤ - س^٥ - ٣س على [أ ، ب] = [١ ، ٣] . سنجد كل النقط حـ ٣ . (أ ، ب) بحيث إن ق (ب) - ق (أ) = (ب - أ) ق (حـ) .

نحتاج لحل المعادلة ق (س) = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = -١٠ . أي ، ٣س^٣ - ١٠ =

+ ٧ = ٠ ، والحلان هما ١ ، $\frac{٧}{٣}$. إذن حـ = $\frac{٧}{٣}$ هي الحل الوحيد الموجود في الفترة

المفتوحة (أ ، ب) .

والنتيجة الثانية للنظرية ٨ هي :

النظرية ١٠ [نظرية كوشي للقيمة المتوسطة] .

إذا كان ق ، هـ ٣ رول [أ ، ب] وكان هـ (س) ≠ ٠ لكل س ٣ (أ ، ب) فإنه يوجد

حـ ٣ (أ ، ب) بحيث إن

$$\frac{ق(ب) - ق(أ)}{هـ(ب) - هـ(أ)} = \frac{ق(حـ)}{هـ(حـ)} \dots \dots \dots (٢٥)$$

البرهان

من النظرية ٨ نرى أن (٢٣) تتحقق لعنصر ما حـ ٣ (أ ، ب) . وبما أن هـ (س) ≠ ٠ على (أ ، ب) فإن هـ (حـ) ≠ ٠ . كذلك وتطبق نظرية القيمة المتوسطة على حـ نحصل

على هـ (ب) - هـ (أ) = (أ - ب) هـ (و) لعنصر ما و \ni (أ ، ب) . لاحظ أننا لا نستطيع ان نفرض ان \ni و حـ . وبما ان هـ (و) \neq ٠ فان هـ (ب) - هـ (أ) \neq ٠ ويمكن استنتاج (٢٥) من قسمة (٢٣) على العدد الذي لا يساوي الصفر: هـ (ح) (هـ (ب) - هـ (أ)).

نتائج لنظرية القيمة المتوسطة .

(١) اذا كان \ni رول [أ ، ب] وكان \ni (س) = ٠ لكل \ni س \ni (أ ، ب) فان \ni يكون ثابتا على [أ ، ب] ، والعكس صحيح .
(٢) اذا كان \ni رول [أ ، ب] وكان \ni (س) $<$ ٠ $>$ ٠ لكل \ni س \ni (أ ، ب) فان \ni يكون متزايدا فعلا (متناقصا فعلا) على [أ ، ب] . والعكس غير صحيح .

البرهان .

(١) افرض ان \ni \geq س . فمن نظرية القيمة المتوسطة فانه يوجد حـ \ni (أ ، س) بحيث ان \ni (س) = \ni (أ) + (س - أ) \ni (حـ) . وبما ان \ni (حـ) = ٠ فاننا نحصل على \ni (س) = \ni (أ) . اذن \ni ثابت .
بالعكس ، اذا كان \ni ثابتا على [أ ، ب] فان \ni رول [أ ، ب] و \ni (س) = ٠ على (أ ، ب)

(٢) افرض ان \ni (س) $<$ ٠ على (أ ، ب) . خذ \ni \geq س_١ $>$ س_٢ \geq ب . . اذن من نظرية القيمة المتوسطة فانه يوجد س_٣ \ni (س_١ ، س_٢) بحيث ان \ni (س_٢) - \ni (س_١) = (س_٢ - س_١) \ni (س_٣) $<$ ٠ لان س_٢ $<$ س_١ و \ni (س_٣) $<$ ٠ لان \ni \geq س_١ $>$ س_٣ $>$ س_٢ \geq ب . . اذن \ni متزايد فعلا . وبرهان الحالة \ni (س) $>$ ٠ مشابه .
وقد بين المثال \ni (س) = س^٣ على [-١ ، ١] ان \ni قد يكون متزايدا فعلا دون ان يكون \ni (س) $<$ ٠ . وفي هذه الحالة \ni (٠) = ٠ .

المثال ٢١ .

اثبت ان $\sqrt{1+s} + 1 > \frac{1}{s}$ على $[0, 1]$. لاثبات ذلك نأخذ الاقتران

$$ق (س) = \sqrt{1+s} - 1 - \frac{1}{s} .$$

اذن ق \ni رول $[0, 1]$ وق $(س) = \frac{1}{s} - (1+s)^{\frac{1}{2}}$ < 0 لكل س $\ni (1-)$ ،

(0) . اذن ق متزايد فعلا على $[0, 1]$ واذن ق $(س) > 0$ اذا كان $1 \geq س > 0$.
ولكن ق $(0) = 0$ ، اذن فقد تم اثبات المتباينة .

ويمكن استخدام نظرية كوشي للقيمة المتوسطة لاثبات نتيجة (قاعدة لوبتال)
تستخدم لاجداد نهايات من النوع

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} ، حيث ق(أ) = هـ(أ) = 0 = 0 \dots \dots (٢٦)$$

ولا معنى لتعويض مباشرة في $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ حيث يتج $\frac{0}{0}$. وتدعى مثل هذه العبارات

صيغا غير معينة . ان الهدف هو حساب النهاية في (٢٦) ، ان وجدت .

والنظرية التالية تنسب الى لوبتال (١٦٦١ - ١٧٠٤)

النظرية ١١ [قاعدة لوبتال] .

افرض ان ق $(أ) = هـ(أ) = 0$ وافرض انه يوجد < 0 بحيث يكون ق ، هـ قابلين
للتفاضل في $|س - أ| > 0$ ويكون هـ $(س) \neq 0$ في $|س - أ| > 0$. فاذا كان

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م (س \leftarrow أ) \text{ فان } \frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م (س \leftarrow أ) .$$

البرهان .

خذ $a > s$ و $a + w$. فمن نظرية كوشي للقيمة المتوسطة فانه يوجد $h \in (a, a + w)$ ،

بحيث ان

$$(27) \dots \dots \dots \frac{f(h) - f(a)}{h - a} = \frac{f(s) - f(a)}{s - a} = \frac{f(s) - f(a)}{s - a}$$

ولكن $s \leftarrow a + w$ تعطي $h \leftarrow a + w$ واذن (27) تعطي $\frac{f(s) - f(a)}{s - a} \leftarrow m$ (س) $\leftarrow a + w$.

وبطريقة مشابهة نجد ان $\frac{f(s) - f(a)}{s - a} \leftarrow m$ عندما $s \leftarrow a$ وهذا يثبت النظرية .

المثال ٢٢ .

(١) لنجد نها $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s - 1}$. هذه صيغة غير معينة حيث $f(s) = s^2 - 1$ ،

$h(s) = s^2 - 1$. لدينا $f(1) = h(1) = 0$ ، q ، h قابلان للتفاضل لكل s ،

$$h(s) = s^2 - 1 \neq 0 \text{ بالقرب من } 1 \text{ . الآن } \frac{f(s)}{h(s)} = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} \leftarrow \frac{0}{0} \text{ (س) } \leftarrow$$

(١) . اذن ، وباستخدام قاعدة لويتال ، نحصل على

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} = \frac{0}{0} = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1}$$

(٢) من قاعدة لويتال فان

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

من المهم ان نلاحظ ان قاعدة لويتال تنص على انه تحت شروط معينة فان

$$\frac{f(s)}{h(s)} \leftarrow m \text{ تعطي } \frac{f(s)}{h(s)} \leftarrow m \text{ ويمكن ان نبين بأمثلة ان العكس غير}$$

صحيح، اي ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م$ لا يعطي بالضرورة $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م$.
 كذلك، عند تطبيق القاعدة فاننا نأخذ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ وليس $(\frac{ق}{هـ})(س)$.
 والنتيجة التالية تعطي اختبارا مفيدا للقيم المحلية للاقتارات القابلة للتفاضل

النظرية ١٢.

- (١) اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ، وكان ق (حـ) < ٠، فان ق يكون متزايدا فعلا عند حـ. واذا كان ق (حـ) > ٠ يكون ق متناقصا فعلا عند حـ.
- (٢) اذا كان، بالقرب من حـ، ق (س) < ٠ لكل س، > حـ و ق (س) > ٠ لكل س < حـ، فانه يوجد قيمة عظمى محلية لـ ق عند حـ.
- (٣) اذا كان ق (حـ) = ٠، ق (حـ) > ٠ فانه يوجد قيمة عظمى محلية عند حـ.
- اذا كان ق (حـ) = ٠، ق (حـ) < ٠ فانه يوجد قيمة صغرى محلية عند حـ.

البرهان.

- (١) لنأخذ الحالة ق (حـ) < ٠. ان تعريف ق متزايد فعلا عند حـ يعني ان ق (س) > ق (حـ) اذا كان س > حـ و ق (س) < ق (حـ) اذا كان س < حـ. فانه يوجد قيمة عظمى محلية لـ ق عند حـ.
- ومن تعريف ق (حـ) و يأخذ $\epsilon = \frac{ق(حـ)}{٢}$ فانه يوجد $\delta < ٠$ بحيث ان $|س - حـ| < \delta$ تعطي

$$\frac{ق(س) - ق(حـ)}{س - حـ} < \frac{ق(حـ)}{٢} < ٠$$

اذن، ق (س) > ق (حـ) اذا كان حـ - $\delta < س < حـ$ و ق (س) < ق (حـ) اذا كان حـ

> من > ح + 8 .

(٢) اذا كان س > ح، فانه من نظرية القيمة المتوسطة ق (ح) - ق (س) = (ح - س) ق (س) .
ق (و) لعنصر ما و \exists (س ، ح) . بما ان ق (و) < ٠ فاننا نحصل على ق (ح) < ق (س) .
وبشكل مشابه اذا كان ح > س فان ق (س) - ق (ح) = (س - ح) ق (ي) حيث ح > ي > س .
لهذا فان ق (ي) > ٠ تعطي ق (س) > ق (ح) . اذن يوجد نهاية عظمى محلية عند ح .

(٣) لنأخذ الحالة ق (ح) > ٠ . فمن (١) يتبع ان ق متناقص فعلا عند ح . اي ان ق (س) < ق (ح) اذا كان س > ح وق (س) > ق (ح) اذا كان س < ح . ولكن ق (ح) = ٠ ، اذن نحصل من (٢) على انه يوجد قيمة عظمى محلية عند ح .

المثال ٢٣ .

نريد صنع وعاء اسطواناني الشكل بدون غطاء مساحته السطحية متر مربع واحد .
ما هي ابعاده بحيث يكون حجمه اكبر ما يمكن؟
افرض ان نق نصف قطر القاعدة و π ارتفاع الاسطوانة ، م مساحتها السطحية ، ح الحجم . اذن $m = 1 = \pi^2 + \pi^2$ ، $C = \pi^2$ ، $\pi^2 < 0$.

$$C = \pi^2 = \left(\frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{\pi^2}$$

$$\text{الآن } C'(\pi) = \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} = 0 \text{ ، اذا فقط اذا كان } \pi = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 1}} \text{ وبما ان } \pi$$

< ٠ فيجب ان نأخذ الاشارة الموجبة . كذلك $C'(\pi) = -\pi^3 < 0$ فمن النظرية ١٢

نحصل على انه يوجد نهاية عظمى محلية عند $\pi = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 1}}$ ومن الواضح انها قيمة عظمى

مطلقة. اذن نق $= ع = \frac{1}{\pi^3 \sqrt{}}$ هي الابعاد التي تعطي اكبر حجم ممكن.

لقد درسنا المثال ق (س) = س^٣. ق (٠) = ٠ ، واذن الصفر هو نقطة حرجة ولكن لا يوجد عندها قمة محلية لان ق متزايد فعلا، ومعادلة تماس ق عند (٠ ، ٠) هي م (س) = ق (٠) + س ق (٠) = (٠) = ٠. اذن ق (س) - م (س) يغير اشارته (من السالب الى الموجب) بازدياد س عبر الصفر. وهذا السلوك الذي يسلكه ق - م نموذج لما سندعوه نقطة انعطاف. فبشكل عام، اذا كان ق: $\leftarrow R$. فاننا نقول ان حـ هي نقطة انعطاف لـ ق اذا فقط اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ وكان ق (س) - م (س) يغير اشارته (من السالب الى الموجب أو من الموجب الى السالب) عندما تزداد س عبر حـ، حيث س في فترة ما حول حـ. لاحظ اننا لم نشترط ان يكون ق (حـ) = ٠. معنى ذلك هندسيا ان المماس يقطع المنحنى عند نقطة الانعطاف.

المثال ٢٤.

اذا كانت حـ نقطة انعطاف لـ ق وكان ق (حـ) موجودا فان ق (حـ) = ٠ ، والعكس غير

صحيح.

اكتب هـ (س) = ق (س) - م (س) = ق (س) - ق (حـ) - (س - حـ) ق (حـ). اذن هـ (حـ) = هـ (حـ) = ٠ ، اذن باستخدام النظرية ١٢ (٣) وتطبيقها على هـ، نرى ان حـ هي قمة محلية لـ ق اذا كان ق (حـ) ≠ ٠. ولكن كون حـ قمة محلية لـ هـ يناقض ان حـ هي نقطة انعطاف لـ هـ. اذن هـ (حـ) = ق (حـ) = ٠. وفي المثال ق (س) = س^٤ على R نرى ان ق (٠) = ٠ ولكن لا يوجد نقطة انعطاف عند الصفر.

تمارين ٧ - ٣

(تجد في آخر الكتاب إرشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - جد اعدادا ح تحقق نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق (س) $\sqrt{s-13}$ - س² على [-٢ ، ٣]. وضح بالرسم.

٢ - جد اعدادا ح تحقق نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق (س) = س² + س + ٢ على [أ ، ب] حيث م ، ي ، و ثوابت.

٣ - افرض ان $a = 1$ ، $b < 1$ واكتب ق (س) = $|s|^{-1}$. بين لماذا لا يحقق ق شروط

نظرية القيمة المتوسطة على [أ ، ب]. اثبت انه اذا كان $b < 1 + \sqrt{2}$ فانه يوجد ح $\ni (أ ، ب)$ بحيث ان ق (ب) - ق (أ) = (ب - أ) ق (ح). يساعدك رسم مخطط ص = ق (س).
٤ - بايجاد قيمة المحددة، اثبت ان م (س) المستخدمة في برهان نظرية القيمة المتوسطة يساوي

$$(أ - ب) \{ ق (س) - ق (أ) - \frac{ق (ب) - ق (أ)}{ب - أ} (س - أ) \}.$$

و بتطبيق نظرية رول على الصيغة التي بين القوسين المتعرجين اثبت نظرية القيمة المتوسطة بطريقة اخرى.

٥ - افرض ان ق \ni رول [١ ، ٠]، ق (٠) = ٠، ق (س) < ٠ على (٠ ، ١). بتطبيق نظرية رول على اقتران مناسب اثبت انه يوجد ح \ni (٠ ، ١) بحيث ان

$$\frac{ق (١) - ق (٠)}{ق (١) - ق (٠)} = \frac{ق (١) - ق (٠)}{ق (١) - ق (٠)}.$$

هل يوجد و \ni (٠ ، ١) بحيث ان

$$\frac{ق (١) - ق (٠)}{ق (١) - ق (٠)} = \frac{ق (١) - ق (٠)}{ق (١) - ق (٠)}.$$

٦- افرض ان $Q \supset [A, B]$ حيث $0 < A > B$. استخدم نظرية كوشي للقيمة المتوسطة لاثبات انه يوجد c ، d ، و e (A, B) بحيث ان

$$(B - A) \cdot Q'(c) = \frac{(B^2 - A^2) \cdot Q'(d)}{2d} = \frac{(B^2 - A^2) \cdot Q'(e)}{3e}.$$

٧- افرض ان $Q : (0, \infty) \leftarrow R$ قابل للتفاضل على $(0, \infty)$ بحيث ان $Q'(s) \leftarrow M \leftarrow \infty$. استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $\frac{Q(s)}{s} \leftarrow M \leftarrow \infty$.

٨- افرض ان $Q : R \leftarrow R$ قابل للتفاضل على R بحيث ان Q' محصور على R . اثبت ان اتصال Q منتظم على R . استنتج ان اتصال الاقترانين J اس، J تاس على R منتظم.

٩- افرض ان $Q, H \supset [A, B]$ وان $|Q'(s)| > H$ على (A, B) . اثبت ان $|Q(A) - Q(B)| > H(B - A)$.

١٠- اذا كان $Q \supset [A, B]$ وكان $Q(A) = Q(B) = c$ حيث $A > c > B$ ، اثبت انه يوجد $d \supset (A, B)$ بحيث ان $Q'(d) = 0$.

١١- افرض ان $Q : R \leftarrow R + R$ يحقق $Q(0) = 1$ و $Q'(s) = Q(s)$ لكل $s \supset R$. ادرس الاقتران

$Q(B) - Q(s) - (B - s) \cdot Q(s) - \{ (B - s) \cdot B^2 - B^2 \}$

على $[0, 1]$ ؛ اثبت ان $Q(B) = 1 + B + B^2 \cdot \frac{Q'(c)}{3}$ لعنصر ما $c \supset (0, B)$.

استنتج ان $Q(B) < 1 + B$ لكل $B < 0$.

$$١٢- (١) \text{ اثبت ان } s - \frac{s^3}{3} \geq J \text{اس} \geq s \text{ لكل } s \leq 0.$$

(٢) افرض ان $Q > 0$ و Q تحقق $Q > 0$. اثبت ان $(1 + s)^3 \geq 1 + 3s$ لكل s

≤ 0 ، استنتج ان $1 \leq B \leq 0$ تعطي $(A + B)^3 \geq 1 + 3B$.

١٣- جد قيم :

$$\text{نهاىس} \leftarrow \frac{1 - s^2}{s} \text{ ونهاىس} \leftarrow \frac{s - (1 + n)s^{1+n} + ns^{2+n}}{(s-1)^2}$$

١٤ - يراد صنع نافذة على شكل مستطيل فوقه نصف دائرة. فإذا أردنا ان يكون المحيط م ثابتا فجد الابعاد التي تسمح بمرور اكبر كمية من الضوء عبر النافذة.

١٥ - يراد وضع اسطوانة دائرية قائمة داخل كرة نصف قطرها أ. جد ارتفاع الاسطوانة التي لها أكبر حجم ممكن.

١٦ - من بين جميع المثلثات التي لها محيط ثابت، جد المثلث ذا المساحة العظمى.

١٧ - من بين جميع القطوع الناقصة ذات المحيط الثابت جد القطع الناقص ذا المساحة العظمى.

١٨ - عرّف ق (س) = س^٣ + ك س^٢ + ل س + م على R، حيث ك، ل، م ثوابت. اثبت انه يوجد نقطة انعطاف وحيدة حـ.

١٩ - اعط مثلا لاقتران ق له نقطة انعطاف عند الصفر بحيث ان ق' (٠) ≠ ٠.

٤ . نظرية تايلور

إذا كان ق ∈ رول [أ، ب] فان نظرية القيمة المتوسطة تنص على انه يوجد عدد واحد على الاقل حـ ∈ (أ، ب) بحيث ان

$$ق(ب) - ق(أ) = (ب - أ) ق'(ح) \dots \dots \dots (٢٨)$$

نريد ان نوسع (٢٨) لتشمل الاقترانات التي لها مشتقات عالية الرتبة. افرض ان ق^(١-ن) ∈ رول [أ، ب]، حيث ن ∈ N. لهذا فنحن نفترض ان ق^(١-ن) متصل على [أ، ب]، ق^(ن) (س) موجود لكل س ∈ (أ، ب). من الفرض فان المشتقات ق' (س)، ق'' (س)، ...، ق^(١-ن) (س) موجودة لكل س ∈ [أ، ب].

النظرية ١٣ [نظرية القيمة المتوسطة التوتية أو نظرية تايلور مع الباقي].

افرض ان م ، ن اعداد طبيعية وافرض ان $Q^{(1-n)}$ رول [أ ، ب]. اذن يوجد عدد واحد على الاقل ح $\in (أ ، ب)$ بحيث ان

$$Q(ب) = Q(أ) + (ب-أ) Q'(أ) + \frac{(ب-أ)^2}{2!} Q''(أ) + \dots + \frac{(ب-أ)^{1-n}}{(1-n)!} Q^{(1-n)}(أ) + R_n$$

حيث R_n ، الباقي بعد ن من الحدود، يعطى بالصيغة:

$$R_n = \frac{(ب-أ)^{1-n} Q^{(1-n)}(أ)}{(1-n)!} \dots \dots \dots (29)$$

البرهان .

الفكرة الأساسية هي تطبيق نظرية رول على اقتران مناسب . لناخذ

$$K(س) = Q(ب) - Q(س) - (ب-س) Q'(س) - \dots - \frac{(ب-س)^{1-n}}{(1-n)!} Q^{(1-n)}(س) .$$

فبمفاضلة طرفي المعادلة نحصل على

$$K(س) = \frac{Q(ب) - Q(س) - (ب-س) Q'(س)}{(1-n)!} \dots \dots \dots (30)$$

نعرف الآن

$$H(س) = K(س) - \left(\frac{ب-س}{أ-ب} \right) K(أ) \dots \dots \dots (31)$$

اذن هـ \exists رول [أ ، ب] وهـ (أ) = هـ (ب) = ٠ . بتطبيق نظرية رول على هـ نرى انه يوجد

حـ \exists (أ ، ب) بحيث ان هـ (حـ) = ٠ ، اذن من (٣١) نحصل على

$$(٣٢) \quad ٠ = ك (حـ) + \frac{م(ب-حـ)^{١-٢}}{١-(ب-أ)} ك (أ) + \dots$$

اذن من (٣٠) و (٣٢) نحصل على

$$(٣٣) \quad \frac{م(ب-حـ)^{١-٢}}{١(١-ن)} ق (ن) (حـ) = \frac{م(ب-حـ)^{١-٢}}{١-(ب-أ)} ك (أ) + \dots$$

واخيرا من (٣٣) وتعريف كـ ، واستخدام ب - حـ < ٠ نحصل على نظرية تايلور مع الباقي

يـ ن . وهذه الصيغة لـ يـ ن المعطاة في (٢٩) هي صيغة شلومله .

ونحصل على حالات خاصة من يـ ن بأخذ ن = م وهـ م = ١ :

$$\begin{aligned} \text{باقي لاجرانج يـ ن} &= \frac{م(ب-أ)^{١-٢}}{١ن} ق (ن) (حـ) . \\ \text{باقي كوشي يـ ن} &= \frac{م(ب-أ)^{١-٢}}{١(١-ن)} (١-٠) (٠-١) ق (ن) (أ) + (٠-١) (ب-أ) ق (ن) (أ) , \\ &> ١ > ٠ > ١ . \end{aligned}$$

$$\text{في الباقي الاخير كتبنا } ٠ = \frac{١-حـ}{١-ب} .$$

ان نظرية تايلور، مع باقي لاجرانج، صيغة يسهل تذكرها، ولعلها اكثر الصيغ فائدة

وهي

$$\begin{aligned} \text{ق (ب)} &= ق (أ) + (ب-أ) ق (أ) + \frac{٢(ب-أ)^٢}{١٢} ق (أ) + \dots + \\ &+ \frac{١-٢(ب-أ)^{١-٢}}{١(١-ن)} ق (ن) (أ) + \frac{م(ب-أ)^{١-٢}}{١ن} ق (ن) (حـ) \end{aligned}$$

لعدد ما $\exists (أ، ب)$ اذا كتبنا $أ = ب$ وفلننا نحصل على
 $ق(أ + ب) = ق(أ) + ق(ب)$ وق(أ) وق(ب) ... + $ق(أ)^{١-٥} + \frac{ق(أ)^{١-٥}}{١(١-٥)} + \frac{ق(أ)^{١-٥}}{١٥} + \dots + ٥ + ١ > ٠$

بتغيير الافتراضين كـ، هـ بطريقة مناسبة في برهان نظرية تايلور نرى انه بالامكان
استبدال أ برب وب بـ أ. لهذا وعلى سبيل المثال فانه مع باقي لاجرانج تصبح

$$ق(أ) = ق(ب) + (أ - ب) ق(ب) + \frac{(أ - ب)^2}{١٢} ق(ب) + \dots + \frac{(أ - ب)^{١-٥}}{١(١-٥)} ق(ب) + \frac{(أ - ب)^{١-٥}}{١٥} ق(ب) + \dots$$

حيث $أ > ب$. اذن، وعلى سبيل المثال، اذا كان ق موجودا قرب الصفر، فانه
بالامكان كتابة

$$ق(س) = ق(٠) + س ق(٠) + \frac{س^2}{٢} ق(٠) + \dots$$

$$٠ < س < ٠$$

تعزى فكرة النظرية ١٣ الى تايلور (١٦٨٥ - ١٧٣١)، لكنه لم يستطع اعطاء برهان
دقيق لها، ولم يناقش فكرة الباقي.

المثال ٢٥.

١,٣٨٦٣ هي قيمة تقريبية لـ ٤. جد قيمة تقريبية لـ ١, ٤: بتطبيق نظرية تايلور

على ق(س) = لوس، أ = ٤، ب = ١، ٤ واستخدام باقي لاجرانج نرى ان

$$لرب = لو أ + \frac{(أ - ب)}{١} - \frac{(أ - ب)^2}{٢٢} + \frac{(أ - ب)^3}{٣٣} - \dots$$

الآن $1,3863 + 0,025 - 0,0003 = 1,4110$ ، وللباقى ىم نرى ان $0 < ىم > 1$

$\frac{1}{1,41}$. اذن، لو $1,41 = 1,4110$ تقريبا.

نطبق الآن نظرية تايلور كي نحصل على اختبار سهل للقمم المحلية ونقاط الانعطاف.

النظرية ١٤.

افرض ان $2 \leq ٢$ ، و $0 < ٠$ وان $ق^{(٥)}$ متصل على $[أ - و، أ + و]$. افرض ان $ق^{(٥)}$ (أ) $= ٠$ لكل $١ \geq ر \geq ١ - ن$ ولكن $ق^{(٥)}$ (أ) $\neq ٠$. اذن

(١) ن زوجي تعطي $أ \ni قمع$ (ق) [عظمى اذا كان $ق^{(٥)}$ (أ) > ٠ ، وصغرى اذا كان

$ق^{(٥)}$ (أ) < ٠].

(٢) ن فردي تعطي $أ$ نقطة انعطاف.

البرهان.

من نظرية تايلور، لكل $س \ni [أ - و، أ + و]$ ، نحصل على

$$ق(س) = \sum_{r=0}^{1-n} \frac{ق^{(r)}(أ)}{r!} + ق^{(٥)}(أ) \frac{(س-أ)^n}{n!} + ق^{(٥)}(ج) \frac{(س-أ)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (ج)$$

$$= ق(أ) + ق^{(٥)}(ج) \frac{(س-أ)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad (٣٤)$$

حيث $ج$ بين $أ$ و $س$.

لنثبت (١): $ق(س) \leq ٠$ لكل $س$ $ق^{(٥)}(أ) > ٠$ تعطي $ق^{(٥)}(ج) > ٠$ عندما

تكون $س$ قريبة من $أ$ لان $ق^{(٥)}$ متصل. اذن (٣٤) تعطي $ق(س) \geq ق(أ)$ $ق(أ)$ ≈ ٠ . اذن يوجد

عند $أ$ قيمة عظمى محلية. كذلك وبطريقة مشابهة، فمن $ق^{(٥)}(أ) < ٠$ يتضح انه يوجد عند $أ$

قيمة صفري عملية .

لنثبت الآن (٢) : ن فردي تعطي ق (س) - م (س) = (س - أ) ^٥ ق ^(٦) (ج) _١
 حيث ن ≤ ٣ وُم هو المماس عند (أ ، ق (أ)). لاحظ ان البرهان يصلح حتى اذا كانت ق (أ) ≠ ٠ ، واذا كان ق (أ) ^(٥) > ٠ فان ق (س) - م (س) يغير اشارته من الموجب الى السالب عندما تزداد س عبر أ ، واذا كان ق (أ) ^(٥) < ٠ فان ق (س) - م (س) يغير اشارته من السالب الى الموجب . اذن يوجد عند أ نقطة انعطاف . وهذا يثبت النظرية .

تمارين ٧ - ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - (أ) افرض ان ك حدودية في س درجتها ن . فلأي عددين حقيقيين س وأ : اثبت ان

$$ك (س) = ك (أ) + (س - أ) ك' (أ) + \dots + \frac{(س - أ)^n}{n!} ك^{(n)} (أ) .$$

(ب) اكتب س ^٢ - س + ١ بصيغة حدودية في س + ١ .

٢ - افرض ان ق د رول [أ ، ب] وق (س) ≤ ٠ على (أ ، ب) . اثبت ان

$$ق (س_١) + ق (س_٢) \leq ق \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \right) \text{ لاي } س_١ ، س_٢ \in [أ ، ب] .$$

٣ - افرض ان ق ^(٣) متصل على فترة ما تحوي أ وافرض ان ق ^(٣) (أ) ≠ ٠ . فمن نظرية تايلور

نعرف انه يوجد θ ∈ (٠ ، ١) بحيث ان ق (أ + θ) = ق (أ) + وق (أ) + $\frac{ق'' (أ)}{٢} (أ + θ)^٢$.

اثبت انه يوجد لكل عدد صغير و (لا يساوي الصفر) عدد وحيد θ . اثبت كذلك أن θ ←

$$\frac{1}{p} \text{ عندما } \leftarrow 0.$$

تأكد من هذه النتيجة بأخذ ق (س) = س^٣ + س^٢ + ١ = ٠.

$$٤ - \text{اثبت ان } ٠,٠٩٥ > ١,١ > ٠,٠٩٥٣٤.$$

٥ - استخدم نظرية تايلور للرتبة الثانية لاثبات ان $٠ < \text{س} - \text{لو} (١ + \text{س}) > \frac{\text{س}^٢}{٢}$ لكل $\text{س} < ٠$. استخلص ان المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \text{لو} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

تقاربة. ارمز لمجموع هذه المتسلسلة بالرمز γ . باخذ المجاميع الجزئية بين ان

$$\gamma = ١ + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٣} + \dots + \frac{1}{n} - \text{لو} (n).$$

يعرف العدد γ باسم ثابت اويلر. والعدد ٠,٥٧٧٢١ هو قيمة تقريبية لـ γ . ولا نعرف الى الآن ان كان عددا نسبيا او غير نسبي.

٦ - عرف $Q \leftarrow R$ بـ ق (س) = $a^{\text{س}^٢} b^{\text{س}}$ حيث a, b اعداد موجبة. عين القيم المحلية ونقاط الانعطاف في ق.

٧ - جد قيمة a بحيث يكون للاقتران (س + جاس) $a^{\text{س}}$ نفس نقطة انعطاف عند الصفر.

٨ - اذا كان ق (n) موجودا في فترة ما $(-و, و)$ واذا كان ق (n) (س) $\leftarrow م$ عندما $\text{س} \leftarrow ٠$, فاثبت ان $م = ق (n) (٠)$.

٥. متسلسلة تايلور

افرض ان f فترة مفتوحة (يمكن ان تكون غير منتهية) في R وافرض ان $ق : f \leftarrow R$ له مشتقات لجميع الرتب وعلى جميع نقاط f . اي ان ق (n) (س) موجودة لكل $n \in N$ ولكل $س \in f$

إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$ فإنه بالإمكان كتابة متسلسلة القوى التالية في $(s - \alpha)$:

$$L(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-\alpha)^n}{n!} q^{(n)}(\alpha) \\ = q(\alpha) + (s-\alpha)q'(\alpha) + \frac{(s-\alpha)^2}{2!}q''(\alpha) + \dots$$

نسمى متسلسلة القوى هذه متسلسلة تايلور للاقتان q حول α .

المثال ٢٦.

عرف $q: (-1, \infty) \leftarrow \mathbb{R}$ بـ $q(s) = \frac{1}{s+1}$ ، خذ $\alpha = 0$. إذن $q^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ ومنه

$$L(s, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} (s-0)^{n+1} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots$$

لنرجع الآن إلى الاقتان العام $q: \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ ومتسلسلة تايلور له $L(s, \alpha)$. لم نذكر أي شيء عن تقارب متسلسلة تايلور. فإذا كان $s = \alpha$ فإن المتسلسلة تقاربية، وفي هذه الحالة يكون $L(s, \alpha) = q(\alpha)$. وإذا كان $s \neq \alpha$ فإن $L(s, \alpha) = q(s)$ عندما $s = \alpha$. وعندما يكون $s \neq \alpha$ فإن $L(s, \alpha) \neq q(s)$ فـ $L(s, \alpha)$ لا تمثل الاقتان عند $s = \alpha$. نذكر نقطتين.

لـ $q: \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ تقاربية، ولكن قد لا تكون تقاربية إلى $q(s)$. في هذه الحالة فإن متسلسلة تايلور لا تمثل الاقتان عند $s = \alpha$.

لـ $q: \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ تباعدية عندما $s \neq \alpha$.

من الممكن إعطاء أمثلة توضح لـ q ، لكن هذا صعب. وسوف نذكر هذه الأمثلة فيما بعد. أما الآن فسوف نركز على الحالات التي تكون بها متسلسلة الاقتان تمثل الاقتان على نطاق معين من s ، في بعض الحالات على كل \mathbb{R} ومن الأمثلة على هذه الاقتانات:

الحدوديات، $\sqrt{1+s}$ ، لو (١ + س)، س، جاس، جتاس.
ويجب ان تذكر انه من السهل عادة كتابة متسلسلة تايلور ل (ق، س - أ)، ولكن
اثبت ان المتسلسلة تقاربية الى ق (س)، س \neq أ هو امر آخر.

المثال ٢٧.

اذا كان ق هو اقتران المثال ٢٦ فان ل (ق، س) = ق (س) لكل |س| > ١. هذا
ينتج مباشرة من المثال ٢ في الفصل ٥. لاحظ انه اذا كان س \leq ١ فان ق (س) موجود ولكن ل
(ق، س) تباعدية. لهذا فلا يمكن ان تقارب من ق (س). لهذا وبشكل عام فانه اذا كانت ل
(ق، س) تمثل الاقتران فانها تمثله على نطاق محدود.

ونستخدم عادة نظرية القيمة المتوسطة النونية، اي نظرية تايلور مع الباقي، لاييجاد
متسلسلة تايلور لاقتران ما. وهناك طرق اخرى مثل التكامل تكون افضل احيانا، وسناقش
هذا فيما بعد.

يجب ان لا يخلط القاريء بين «نظرية تايلور مع الباقي» التي تحوي عددا متتهيا من
الحدود، مع متسلسلة تايلور التي تكون عادة متسلسلة غير متتهية بها ق^(٢) (أ) لكل ن \in N

تعتبر متسلسلة تايلور لـ (١ + س) حيث م عدد نسبي إمتداداً لنظرية ذات الحدود
حين يكون م عددا طيعيا.

النظرية ١٥ [متسلسلة ذات الحدود].

افرض ان م عدد نسبي (سالب أو موجب أو صفر). عرف

$$\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{r!} \quad \text{لكل } r \in N.$$

اذن.

$$\frac{1}{\alpha} = \left| \frac{m-n}{1+n} \right| \leftarrow m \text{ من } (n \leftarrow \infty).$$

وبما ان $0 < m < 1$ فانه ومن إختبار النسبة نرى ان المتسلسلة $\sum \alpha_n$ تقاربية، اذن $\alpha_n \leftarrow 0$ ولكن $\alpha_n < 1$ لكل n ، اذن $\alpha_n \leftarrow 0$ ، $(n \leftarrow \infty)$.

اخيرا هناك حالة $1 > m > 0$: اذا حاولنا استخدام باقى لاجرائنج نحصل على التقريب التالي :

$$\alpha_n > \left(\frac{m}{n} \right)^n (1 - m)^{n-1}$$

وهذا لا يساعد لان $(1 - m)^{n-1}$ تكون كمية كبيرة اذا كان m قرب 1. لهذا، نحاول باقى كوشي

$$\alpha_n = \left| m^n \left(\frac{1-m}{n} \right)^{n-1} \right| (1 + m)^{n-1}$$

$\geq \left| m^n \left(\frac{1-m}{n} \right)^{n-1} \right| (1 + m)^{n-1} \dots \dots \dots (35)$
فبما ان $0 < 1 + m < 1 + m + m^2 < 1 + m + m^2 + m^3 < \dots$ فان $\left| (1 + m)^{n-1} \right| \geq (1 + m)^{n-1}$ فقط.
يجب ان نتذكر ان m تعتمد بشكل عام على n .

الآن وبما ان

$$\left| \left(\frac{1-m}{n} \right)^n \right| \leftarrow 0 \text{ عندما } n \leftarrow \infty,$$

فانه ينتج من (35) ان $\alpha_n \leftarrow 0$ ، $(n \leftarrow \infty)$. وهذا يثبت النظرية.

سوف نناقش بايجاز النقاط التي اثبتت في ل1، ل2.

بالنسبة لـ ل1، نعرف ق: $R \leftarrow R$ بق $(0) = 0$ ، ق $(m) = e^{-m}$ ، $m \neq 0$.
فباستخدام الخواص القياسية للاقتران الاسمي التالي، ينتج:

٥ - عرف ق (٠) = ٠ ، ق (س) = سا (-س) لكل س ≠ ٠ ، استخدم الاستقراء لاثبات انه لكل س ≠ ٠ ، فان

$$ق^{(١)}(س) = ك٣٣ (س-١) سا (-س-٢) ،$$

حيث ك٣٣ (س) = أ٠ + ... + أ٣٣ ص٣٣ حدودية في ص درجتها ٣٣. اثبت كذلك ان $|ا ر| \geq ١ ن! ن٣ لكل ٠ \geq ر \geq ن$ واستنتج ان

$$|ق^{(١)}(س)| \geq (١ + ن) ١! ن٣ |س| ٣٣ سا (-س-٢)$$

لكل $٠ < |س| > ١$. ومنه اثبت ان ق^(١) (٠) = ٠ لكل ن ≥ N .

٦ - اثبت ان

$$(١) \quad ١ = \frac{١}{\sqrt{١-س}} + \frac{س}{٢} + \frac{س^٢ \times ١}{٤ \times ٢} + \dots \text{ لكل } |س| < ١ .$$

$$(٢) \quad ل (ق ، س) = س + \frac{س}{٣} + \frac{س^٢}{١٥} + \dots \text{ حيث ق (س) = ظاس على } |س| > \frac{\pi}{٢} .$$

$$(٣) \quad ل (ق ، س) = ١ - \frac{س}{٢} + \frac{س^٢}{١٢} - \dots \text{ حيث ق : } R \leftarrow R \text{ معرف بـ ق}$$

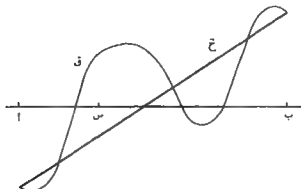
$$(٠) \quad ١ = ق (س) = \frac{س}{١-س} \text{ لكل س } \neq ٠ .$$

٦ . التقريب

في العمليات العددية وخصوصا عند عمل جداول بقيم اقترانات ابتدائية مثل جا س ، ٥ س ، لوس قد يرغب الفرد في معرفة قيمة للاقتران بين قيمتين معروفتين وهذا ما يسمى بالاستكمال والقيم المعروفة انما تعطى للدرجة ما من الدقة ، كأن تكون صحيحة لأربع منازل عشرية (كما في معظم كتب الجداول) .

واسهل طريقة للاستكمال هي استبدال قيم الاقتران على فترة ما بقيم خط مستقيم .
وبعبارة ادق اذا كان ق : [أ ، ب] ← R- وكنا نعرف قيم ق (أ) ، ق (ب) فانه يمكن وصل

النقطتين (أ ، ق (أ)) ، (ب ، ق (ب)) بخط مستقيم خ كما هو مبين بالشكل .



فمعادلة المستقيم هي

$$\text{خ (س) = ق (أ) + } \frac{\text{ق (ب) - ق (أ)}}{\text{ب - أ}} \cdot (\text{س} - \text{أ}) \quad (٣٦)$$

إذا كان $\text{س} \in (\text{أ} , \text{ب})$ فأننا نعتبر خ (س) تقريباً لـ ق (س) ونحسبه من (٣٦) . تعرف هذه الطريقة باسم الاستكمال الخطي او طريقة الاجزاء المتناسبة .

ونتوقع ان يعطي الاستكمال الخطي تقريباً معقولاً الا في حالات خاصة . والنظرية التالية تشترط ان تكون ق محصورة على $[\text{أ} , \text{ب}]$. وهذا شرط غير صعب ، وتحققه معظم الاقتارات الابتدائية التي نرغب عادة في معرفة قيمها العددية .

النظرية ١٦ [الاستكمال الخطي] .

افرض ان $\text{ق} : [\text{أ} , \text{ب}] \rightarrow \mathbb{R}$ وان ق محصوراً على $[\text{أ} , \text{ب}]$ ، ولنقل $|\text{ق (س)}| \geq \epsilon$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} , \text{ب}]$. اذن

$$|\text{ق (س)} - \text{خ (س)}| \geq \frac{\epsilon (\text{ب} - \text{أ})}{8} \quad (٣٧)$$

حيث خ معرف في (٣٦) .

البرهان .

إذا كان $س = أ$ أو $س = ب$ فإن $ق (س) - خ (س) = ٠$ وتحقق (٣٧) . افترض ان $س > ب$ ولتأخذ الاقتران $م : [أ ، ب] \leftarrow R$ حيث يعتبر $م$ اقترانا في المتغير $و$ ، $س$ ثابت :

$$(٣٨) \quad \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ & ق(و) \\ ١ & ٢س & س & ق(س) \\ ١ & ٢أ & أ & ق(أ) \\ ١ & ٢ب & ب & ق(ب) \end{vmatrix} = ٠(و)$$

الآن $م (أ) = م (س) = ٠$ ، واذن باستخدام نظرية رول نحصل على $م (ح) = ٠$ لعنصر $ما ح$ $\ni (أ ، س)$. كذلك ، وبطريقة مشابهة ، $م (ح) = ٠$ لعنصر $ما ح$ $\ni (س ، ب)$. وبتطبيق نظرية رول للاقتران $م$ على $(ح١ ، ح٢)$ نحصل على $م (ح) = ٠$ لعنصر $ما ح$ $\ni (ح١ ، ح٢)$ $\supset [أ ، ب]$.

وبمفاضلة (٣٨) مرتين ووضع $و = ح$ نحصل على

$$٠ = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٠ & ق(ح) \\ ١ & ٢س & س & ق(س) \\ ١ & ٢أ & أ & ق(أ) \\ ١ & ٢ب & ب & ق(ب) \end{vmatrix}$$

وعند حساب قيمة هذه المحددة نرى ان

$$(٣٩) \quad ق(س) - خ(س) = \frac{ق(ح) (س - أ) (س - ب)}{٢} \dots$$

ونحصل على اكبر قيمة لـ $(س - أ) (س - ب)$ على $[أ ، ب]$ عندما يكون $س =$

١+ب
٢ . اذن (٣٧) تنتج من (٣٩)، مما يثبت النظرية.

المثال ٢٨ .

يعطي جدول ق (س) = e س قيم e بين ٠ و ١ على فترات ٠,٠١ . جد حاصرا اعلى للخطأ الذي يحدث عند استخدام الاستكمال الخطي .

نعرف ان ١ ≥ ق (س) = e س ≥ ٠ لكل ٠ ≤ س ≤ ١ . فالخطأ

$$|ق (س) - خ (س)| \text{ اقل من } (٢,٧٢) \frac{e^{(٠,٠١)}}{٨} = ٠,٠٠٠٠٣٤ .$$

تقريب الاخطاء

ان اجهزة الحاسب الالكتروني والآلات الحاسبة والجداول (مثل جدول اللوغاريتمات) تعمل بعدد محصور من المنازل العشرية . على سبيل المثال يعطي أحد الجداول قيمة لـ ٢ بـ ٠,٦٩٣١٥ . هذا ليس صحيحا تماما . ويمكن اثبات ان

$$٠,٦٩٣١٤٧١... = ٢ \text{ لـ } (٤٠) \dots\dots\dots$$

حيث تعني النقاط الثلاثة ان الاعداد المذكورة صحيحة وان هناك اعدادا اخرى لم تظهر في التمثيل العشري لقيمة لـ ٢ .

وقيمة لـ ٢ التقريبية ٠,٦٩٣١٥ في جداول الارقام الخمسة هي ما ندعوه لـ ٢ مقربا الى خمس منازل عشرية . وفي (٤٠) لوتوقفنا بعد المنازل العشرية الخمس لحصلنا على ٠,٦٩٣١٤ . الا ان القيمة المقربة ٠,٦٩٣١٥ تعطى في الجداول، لانها اقرب الى لـ ٢ .

وبالمثل فان لـ ٢ مقربا الى اربع منازل عشرية هو ٠,٦٩٣١ . واليك امثلة اخرى: (أ) ٦,١٤١٥٩٢٦ مقربا الى خمس منازل عشرية هو ٦,١٤١٥٩ . (ب) ٧,٥٢٥ مقربا الى منزلتين عشريتين هو ٧,٥٢ . (ج) ٢,٦٧٥ مقربا الى منزلتين عشريتين هو ٢,٦٨ .

في الحالتين (ب) ، (ج) استعملنا ما هو متعارف عليه : وهو انه عند التقريب لـ n منازل عشرية اذا كان هناك 5 في المنزلة $n + 1$ واصفاربعدھا فاننا نضيف 1 الى العدد الذي في المنزلة n اذا كان هذا العدد فرديا ، ولا نغيره اذا كان زوجيا .

واضح الآن انه عند استخدام جداول الأرقام الخمسة (التي حسبت بناء على طريقتنا في التقريب) فانه يكون هناك خطأ في القيم المحسوبة اكبر قيمة له هي 0.000005 والفرق بين القيم المذكورة في الجداول والقيم الحقيقية يمكن ان يكون موجبا أو سالبا (او صفرا اذا كنا محظوظين) .

وفي جداول n ارقام فإن اكبر قيمة للخطأ يمكن ان تكون $\frac{5}{10^n}$.

عندما نقول ان $2 = 0.69314$ ، صحيحا لخمس منازل عشرية فاننا نعني ان الاعداد الخمسة التي تظهر بعد الفاصلة العشرية هي تماما التي تظهر عند كتابة قيمة لو 2 كاملة . يجب التمييز بين «الصحيح لخمس منازل عشرية» و«المقرب لخمس منازل عشرية» التي في هذه الحالة 0.69315 .

المثال ٢٩ .

افرض أننا نرغب ان نجمع 1000 عدد من جدول ثلاثة ارقام ، فأسوأ ما يمكن ان يحدث هو ان يكون هناك خطأ $\frac{5}{10}$ في كل عدد ، لهذا فان الخطأ الكلي يكون $50 \times$

$$0.05 = \frac{5}{10}$$

مثال ٣٠ .

لنحسب قيمة الخطأ في استخدام الاستكمال الخطي لقيم مأخوذة من جدول خمسة

ارقام . فللتبسيط سنأخذ نقطة المنتصف $s = \frac{a+b}{2}$. فحسب نظرية ١٦ ، نحصل
على $|q(s) - x(s)| \geq \frac{e(a-b)^2}{8}$ ، حيث $x(s)$ هو الآن
$$\frac{q(a) + q(b)}{2}$$

افرض ان $h(a)$ هو القيمة المقربة المذكورة في الجدول لـ $q(a)$ ، كذلك $h(b)$. اذن

$$|h(a) - q(a)| \geq \frac{e}{10}, |h(b) - q(b)| \geq \frac{e}{10} . \text{ اذن ، اذا كان } y(s) = \frac{h(a) + h(b)}{2} \text{ فان}$$

$$|q(s) - y(s)| \geq \frac{e(a-b)^2}{8} + \frac{e}{10} . \dots \dots \dots (41)$$

اذن ان العدد $y(s)$ هو الذي حسبناه من القيم المذكورة في الجدول و(41) تعطي اكبر قيمة ممكنة للخطأ .

طريقة نيوتن

افرض ، على سبيل المثال ، اننا نريد حساب $\sqrt{2}$ لعدد معين من المنازل العشرية ، اي
اننا نريد ان نجد تقريبا جيد للجذر الموجب للمعادلة $s^2 - 2 = 0$. نكتب $q(s) = s^2 - 2$ ،
٢ ، تهمننا المعادلة $s^2 - 2 = 0$ ، حيث نرى ان $q(1,4) > 0$ ، $q(1,5) < 0$. بما ان q
متصل فانه وباستخدام نظرية القيم الوسطى فانه يوجد عدد $\xi \in (1,4, 1,5)$. بحيث ان
 $q(\xi) = 0$. بالطبع نرمز لـ $\sqrt{2}$. اذن عندنا التقريب $1,4 < \xi < 1,5$.

سوف نشرح طريقة ابتكرها نيوتن (لكنها تعرف ايضا باسم طريقة نيوتن ورافسون) وهي
تمكننا من ايجاد تقريبات متتالية افضل لجذور معادلات من النوع $q(s) = 0$ افرض ان q :

[أ ، ب] ← R قابل للتفاضل مرتين على [أ ، ب] واننا نعرف ان ق (و) = ٠ لعنصر ما و

(أ ، ب) عادة باختبار ق (أ) ق (ب) > ٠ . لقيم س قرب وومن نظرية تايلور نرى ان

$$٠ = ق (و) = ق (س) + (و - س) ق (س) + \frac{ق''(س)}{٢} (و - س)^2$$

حيث د بين س و. لهذا، اذا كان ق (س) ≠ ٠ فاننا نحصل على

$$٠ = س - \frac{ق(س)}{ق'(س)} - \frac{ق''(س)}{٢ ق'(س)} (و - س) + \dots \dots \dots (٤٢)$$

الآن اذا كان س تقريبا جيدا لـ و فان (س - و) يكون صغيرا، واذا لم يكن

$$\frac{ق''(س)}{ق'(س)} \text{ كبيرا فان افعال الحد الاخير في (٤٢) يجعلنا نأمل ان يكون س - } \frac{ق(س)}{ق'(س)}$$

تقريبا افضل من س لـ و. يلزم تعليل كل هذا بالطبع، وسنفعل ذلك في

النظرية التالية، ولكن قبل النظرية سوف نوضح ما ذكرناه بمثال بسيط.

المثال ٣١.

افرض ان ق (س) = س^٢ - ٢ ، اذن ق (س) = ٢س. الآن ١ هو تقريب لـ √٢ وهو

تقريب غير جيد ولكن ١ - $\frac{ق(١)}{ق'(١)} = \frac{٣}{٢}$ هو تقريب افضل. فلنأخذ هذا التقريب أي س

= $\frac{٣}{٢}$ ونجد ان س - $\frac{ق(س)}{ق'(س)} = \frac{١٧}{١٢}$ افضل. ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة

لايجاد تقريبات اخرى. ولكن بدون تحليل مفصل لا يوجد مبرر لفرض ان هذه التقريبات سوف تقارب √٢ ، ولا نعرف ان كانت هذه الطريقة مفيدة عمليا وان اي عدد من التكرارات

سيعطي تقريبا جيدا.

النظرية ١٧ [طريقة نيوتن]

افرض أنه

(١) يوجد لـ q صفر عند 0 .

(٢) q موجود على $f = [0 - \epsilon, 0 + \epsilon]$ لعدد ما $\epsilon < 0$.

(٣) يوجد عدد ثابت δ بحيث ان $0 < \delta < 1$ و $|q| < \delta$ لكل q (س) $|q| < \delta$ على f .

لأي s_n و f عرف $s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}$ لكل $n \leq 0$. اذن تكون المتتالية

(س_١، س_٢، ...) تقاربية وهي متتالية تقريبات لـ q ويكون

$$|s_n - q| \geq \frac{\delta^n |s_1 - s_0|}{1 - \delta} \quad (٤٣)$$

البرهان.

ضع $h(s) = s - \frac{f(s)}{f'(s)}$ لكل s و f . اذن h صحيح التعريف لأن

$|h(s)| < \delta$ من (٣). كذلك من (٢) نحصل على $|h(s)| < \delta$ لكل s و f .

سوف نثبت ان $h : f \leftarrow f$. بيا ان $h(u) = 0$ وفان

$$|h(s) - h(u)| = |h(s) - 0| = |h(s)| < \delta$$

من نظرية القيمة المتوسطة. اذن $|h(s) - 0| \geq |h(s) - h(u)| < \delta$ لكل s و f . اذن $h(s) < \delta$.

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة ثانية نحصل على

$|h(s) - h(u)| \geq |h(s) - h(u)| < \delta$ لكل s ، ص و f . اذن h هو اقتران

تقلص. وبتطبيق نظرية النقطة الثابتة لـ ق نرى انه يوجد نقطة وحيدة م بحيث ان هـ (م) = م. لكننا نعرف ان هـ (و) = و، اذن م = و. اخيرا س_{١٠} = هـ (س_{١٠})، اذن س_{١٠} ← و (٤٣) تتحقق. وهكذا فقد تم برهان النظرية.

المثال ٣٢.

احسب جذر المعادلة س^٣ - ٣ = س + ٥ الذي يقع بين ٠ ، ١٥ صحيحا لاربع منازل عشرية.

نكتب ق (س) = س^٣ - ٣ = س + ٥، اذن ق (س) = ٣ - س^٣ ، ق (٠) = ٣ ، ق (١) = -١ ، ق (س) > ٠ على [١ ، ٠]. اذن يوجد جذر وحيد، و لـ ق (س) = ٠ في (٠ ، ١). فالتنصيف يعطي ق (٠,٥) = ٠,٦٢٥. اذن و < ٠,٥ نرى ان ق (٠,٧) = -١,٥٧- . ويتحقق الشرط (٣) من النظرية ١٧ على [٠,٧ ، ٠,٦].

بأخذ س_٠ = ٠,٧ نرى ان س_١ = س_٠ - $\frac{ق(س_٠)}{ق'(س_٠)}$ = ٠,٦٥٥٥ وان س_٣ = ٠,٦٥٦٦. كذلك ق (٠,٦٥٦٦) < ٠ < ق (٠,٦٥٦٧). اذن ٠,٦٥٦٦ > و > ٠,٦٥٦٧. اذن و = ٠,٦٥٦٦ صحيح لاربع منازل عشرية.

المثال ٣٣.

اذا كان ق (س) = س^٢ - ٢ فان س_{١٠} = ٠,٥ = (س_{١٠} + $\frac{٢}{س_١٠}$) في طريقة نيوتن. لكل س ∈ [١,٥ ، ١,٤] فان الشرط (٣) من النظرية ١٧ يتحقق عند أخذ حـ = $\frac{١}{١٨}$. باخذ س_٠ = ١,٤ نرى من (٤٣) ان تقارب (س_{١٠}) من ويكون سريعا لأن حـ^{١٠} تناقص بسرعة مع إزدياد ن.

لنأخذ أي طريقة تكرار تقاربي (مثل طريقة نيوتن مع شروط النظرية ١٧) حيث $s_n \rightarrow \infty$. نقول إن الطريقة ذات رتبة $r < \infty$ ، إذا وفقط إذا كان يوجد عدد موجب $\epsilon_n \rightarrow 0$ بحيث إن

$$|s_{n+1} - \alpha| = (m + \epsilon_n) |s_n - \alpha|$$

يدعى العدد ثابت الخطأ التقاربي.

المثال ٣٤ .

ق٢ (ق) | هـ ثابت الخطأ التقريبي .

لأثبت ذلك نضع $s = s_0$ في (٤٢)، ونحصل على

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(d_n)}{2(d_{n-1})}$$

الآن من \leftarrow وتعطي د \leftarrow ونحصل على النتيجة من اتصال ق.

تجارب ۷-۶

(تجدد فی آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارین)

١ - جد قيمة أكبر خطأ ممكن عند استخدام الاستكمال الخطي لنقطة المنتصف في جدول ذي

رقمين للاقتران في (س) = س^٢ حيث يعطي القيم لفترات ١، ٠ لـ س ∈ [٠ ، ١].

٢- يعطي جدول خمسة ارقام قيمة جاس على فترات $\frac{1}{10}$ الدرجة (تذكر ان π وحدات نصف قطرية تساوي ١٨٠ درجة). جد اكر خطأ ممكن في الاستكمال الخطي.

٣ - يراد وضع جدول ذي ثلاثة ارقام لـ s^A في $[١, ٠]$. جد طول الفترة بحيث يكون الخطأ في استخدام الاستكمال الخطي أقل من $٠,٠٠١$.

٤ - يراد اجراء عمليتي الضرب \times والقسمة $+$ على جدول ذي رقمين . على سبيل المثال،

$$٠,٠١ = ٠,٠٦ \times ٠,١٦$$

$$٠,٠١٧ = ٠,٦ \div ٠,١$$

أعط مثالا تبين فيه أن عملية \times غير تجميعية. بين كذلك ان $(أ \times ب) \div ب \neq أ$ بشكل

عام.

٥ - فسر طريقة نيوتن هندسيا.

٦ - جد حلا لـ $\log ١٠ = \log ١٠٠$ = جاس صحيحا لاربع منازل عشرية.

٧ - بين ان الحل الموجب لـ $\log ٨ = \log ٨$ يساوي $\frac{\sqrt[3]{٧}}{٧}$ تقريبا.

$$٨ - \text{على فرض ان } ٠ < s_١ < \sqrt[3]{٧} \text{ و } s_١ + s_٢ = ١ \text{ و } s_٢ + s_٣ = ١ \text{ و } s_٣ + s_٤ = ١ \text{ أثبت ان}$$

(s_n) تقاربية وجد نهايتها. اثبت ان طريقة التكرار هي من الرتبة الثالثة. وجد ثابت الخطأ التقاربي.

٩ - ق : $R \rightarrow R$ بق $(s) = ١ + s^٢$. ابدأ بأي عدد s . $\exists R$ ، ماذا يمكن ان

تقول عن المتتالية (s_n) ، $s_١$ ، $s_٢$ ، $s_٣$ ، ... في طريقة نيوتن؟

١٠ - اذا كان Q موجودا في فترة صغيرة $[أ, ب]$ وانه كان لـ Q $(s) = ٠$ جذران متساويان

$$\text{تقريبا في } (أ, ب). \text{ اثبت ان الجذرين يساويان } أ - \frac{Q^{(١)}}{Q^{(٢)}} \text{ تقريبا.}$$

الفصل الثامن

متسلسلات القوى

١ - مقدمة

افرض ان (a_n) متتالية من حدود مركبة . تولد هذه المتتالية متسلسلة قوى هي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (1)$$

حيث x عدد حقيقي أو مركب . فإذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية ومجموعها a_0 . مهما كانت طبيعة a_n الباقية . وإذا كان $x \neq 0$ فإن المتسلسلة قد تكون تقاربية أو تباعدية .

وإذا كانت (a_n) متتالية بحيث ان $a_n = 0$ لكل $n < m$ ، حيث m عدد ما في N ، فإن المتسلسلة (١) تتحول الى الحدودية

$$a_m + a_{m+1} x + \dots + a_n x^n$$

لهذا فإن متسلسلة القوى هي تعميم للحدودية .

وفي هذا الفصل سوف ندرس متسلسلات القوى لاهميتها الذاتية . ولكن هذه المتسلسلات هامة اذ تستعمل في العمليات الحسابية . على سبيل المثال ، نعرف انه اذا كان يمكن تمثيل اقتران ما بمتسلسلة قوى فانه يمكن إيجاد تقريب جيد للاقتران بأخذ عدد من حدود (١) الاوائل ، هذا على فرض ان n مناسبة و $|ع|$ صغير .

المثال ١ .

من متسلسلة ذات الحدين ، اذا كان $س$ عددا حقيقيا و $|س| > ١$ فان

$$(١) \quad ١ - س = \frac{١}{٢} + \frac{س}{٢} + \frac{س^٢}{٨} + \frac{س^٣}{٨} + \dots$$

فاذا كتبنا $\sqrt[٢]{٢} = \frac{٧}{٥} \times \frac{١}{٤٩} (\frac{٥}{٤٩} - ١) - \frac{١}{٥} = \frac{١}{٢}$ ، فانه بوضع $س = \frac{١}{٥}$ في

(٢) وبأخذ الحدود الثلاثة الاولى نحصل على $\sqrt[٢]{٢} = ١,٤١٤٢١$ وهذا صحيح لخمس منازل عشرية .

المثال ٢ .

(١) $\overline{ع}^٢$ هي احدى المتسلسلات التي درسناها (في الفصل ٥ ، البند ١) . وهي ذات تقارب مطلق اذا كان $|ع| > ١$ وتباعدية اذا كان $|ع| \leq ١$.

$$(٢) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ع^n}{(ن+١)^٢}$$

لانه بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$|ع| \frac{٢(١+ن)}{٢(٢+ن)} \leftarrow |ع| (ن \leftarrow \infty)$$

لهذا نحصل على تقارب مطلق اذا كان $|ع| > ١$ ، وتباعد اذا كان $|ع| < ١$. ويجب دراسة $|ع| = ١$ على حدة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ع^n}{(1+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ع^n}{(1+n)^2} > \infty$$

حسب نتيجة المثال ٦ في الفصل ٥ .

(٣) $\sum_{n=0}^{\infty} ع^n$ تقاربية اذا وفقط اذا كان $ع = ٠$. اما ان $ع = ٠$ شرط كاف لأن تكون $\sum_{n=0}^{\infty} ع^n$ تقاربية فواضح. فلا ثبات انه شرط لازم افرض ان $\sum_{n=0}^{\infty} ع^n$ تقاربية فيكون $(ع^n) \rightarrow ٠$ ، وهذا يتضمن ان $ع = ٠$ ، لانه اذا كان $|ع| < ٠$ فان $\sum_{n=0}^{\infty} ع^n$ تعطي $|ع| < ١$ مما يناقض $(ع^n) \rightarrow ٠$.

(٤) $\sum_{n=0}^{\infty} ع^n$ ذات تقارب مطلق اذا كان $|ع| > ٠$ ، وتباعدية اذا كان $|ع| < ٠$. نحصل على هذا من تطبيق اختبار النسبة واستخدام $(١ + \frac{1}{n})^n \rightarrow \infty$. تبقى حالة $|ع| = ٠$. ليس من الصعب اثبات ان المتسلسلة تباعدية لـ $|ع| = ٠$ (انظر السؤال ٣ من التمارين ٨ - ١).

(٥) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ع^n}{n!} = ١ + ع + \frac{ع^2}{١!} + \dots$ ذات تقارب مطلق لجميع الاعداد المركبة $ع$. وهذا واضح من تطبيق اختبار النسبة. ان متسلسلة هذا المثال تعرف أحد أهم اقترانات التحليل (الاقتران الاسي). وسوف ندرسه بالتفصيل في الفصل القادم.

بين الامثلة السابقة ان متسلسلة القوى قد تكون تقاربية فقط عند $ع = ٠$ ، وقد تكون تقاربية لجميع $ع \in \mathbb{C}$ وقد تكون تقاربية لبعض حالات $ع \neq ٠$ ، لا لجميعها.

النظرية ١ .

افرض ان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة قوى وخذ المتتالية $(|a_n|^{\frac{1}{n}}) = (|a_1|^{\frac{1}{1}}, |a_2|^{\frac{1}{2}}, |a_3|^{\frac{1}{3}}, \dots)$. . . من الاعداد غير السالبة . هناك حالتان

$$(١) (|a_n|^{\frac{1}{n}}) \text{ غير محصورة .}$$

$$(٢) (|a_n|^{\frac{1}{n}}) \text{ محصورة .}$$

في الحالة (١) تكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية اذا وفقط اذا كان $e = 0$. وفي الحالة الثانية تكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ذات تقارب مطلق اذا كان } |e| > 1 \text{ وتباعدية اذا كان } |e| < 1 \text{ حيث}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (٣)$$

فاذا كان $l < 1$ ، فان $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$ يدعى نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى .

وإذا كان $l = 0$ صفرا فاننا نتعارف على كتابة $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ لتعني ان متسلسلة القوى ذات

نصف قطر التقارب اللانهائي هي متسلسلة ذات تقارب مطلق لكل e .

البرهان .

(١) اذا كان $e = 0$ فان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية . وبالعكس اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

تقاربية وكانت $(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ غير محصورة فان $e = 0$. والا فيكون $|e| < 1$ وبما ان $(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ غير محصورة فان

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{|e|}$$

لعدد لا نهائي من n ، اذن $|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ ، لعدد لا نهائي من n مما يناقض ان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية

(٢) في هذه الحالة فإن النهاية العليا في (٣) موجودة ومحصورة وتطبق اختبار الجذر النوني في صورته التي تحوي النهاية العليا على $\sum |a_n|^n$ نحصل على

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^n = |a|.$$

اذن نحصل على تقارب مطلق اذا كان $|a| < 1$ وتباعد اذا كان $|a| > 1$. فاذا كان $|a| = 1$ فان $|a| > 0$ لكل n ، واذا كان $|a| < 1$ فان $|a| < 1$ تكافئ $|a| < 1$ حيث $\lim_{n \rightarrow \infty} |a| = 1$.

اذا فسرنا (١) على ان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، فانه يوجد لكل متسلسلة دائرة تقارب، في داخلها يكون التقارب مطلقا وفي خارجها تباعد. يجب ان نتذكر ان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ تعني دائرة نقطة، وان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ تعطي المستوى المركب باكماله.

وبدراسة المثال ٢ مرة ثانية نرى ان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ في (١) و (٢)، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ في (٣)، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ في (٤)، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ في (٥).

من المهم ان نلاحظ انه مع ان المعادلة (٣) تعطي نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum |a_n|^n$ الا انه قد يكون من غير السهل حساب قيمة النهاية العليا. وعادة يكون من الأسهل تطبيق اختبار النسبة. فاذا وجدنا عند تطبيق اختبار النسبة انه يوجد عدد ما حد بحيث ان المتسلسلة تكون ذات تقارب مطلق اذا كان $|a| < 1$ وتباعدية اذا كان $|a| > 1$ فان حد يجب ان تكون هي $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. ويمكن اثبات ذلك بسهولة بفرض ان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ والحصول على تناقض في الحالتين.

اذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c > 0$ فانه من الصعب تحديد سلوك $\sum |a_n|^n$ على محيط دائرة التقارب، وخصوصا عندما لا يكون التقارب مطلقا. وسنوضح ذلك.

المثال ٣.

لنأخذ متسلسلة القوى

$$\frac{e^{n^2}}{n^2} \sum_{n=0}^{\infty}$$

فباستخدام اختبار النسبة نجد ان $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} = 1$. ففي الدائرة $|e| = 1$ لا تكون المتسلسلة ذات تقارب مطلق، لأن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} = 1 + \frac{e^{n^2}}{n^2} + \dots$$

وهذه متسلسلة تباعدية قياسية. كذلك اذا كان $e^2 = 1$ ، اي ان $e = \pm 1$ فان المتسلسلة تكون تباعدية. تبقى حال، $|e| = 1$ ولكن $e^2 \neq 1$. لحل هذا الجزء نطبق النظرية ١٠، الفصل ٥، البند ٢. حيث يعالج التقارب المشروط. فباخذ $a_n = e^{n^2}$ ، $b_n = \frac{1}{n^2}$ في النظرية، كل ما نحتاجه هو اثبات ان المجاميع الجزئية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ محصورة، لانه من الواضح ان b_n تنازلي الى الصفر. الآن

$$\begin{aligned} |a_0 + a_1 + \dots + a_n| &= |e^0 + e^1 + \dots + e^{n^2}| \\ \frac{2}{|e-1|} &= \frac{e^{n^2}|e| + 1}{|e-1|} \geq \left| \frac{e^{n^2} - 1}{e-1} \right| = \end{aligned}$$

لجميع قيم n ، لان $|e| = 1$ ، $e^2 \neq 1$.
اذن فان المتسلسلة ذات تقارب مطلق في $|e| > 1$ وتقارب مشروط على $|e| = 1$ ،
 $e^2 \neq 1$ ، وتباعدية لـ $|e| < 1$ و $e = \pm 1$.

تمارين ٨ - ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - جد قيمة $\sqrt[3]{3}$ صحيحة لخمسة منازل عشرية.

٢ - جد نصف قطر التقارب لما يلي :

$$(١) \sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n}$$

$$(٢) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n^2}}$$

$$(٣) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(1-n)}{1(n^2)}}$$

$$(٤) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-n} \text{، حـ عدد نسبي ثابت}$$

$$(٥) 1 + e + e^2 \frac{(1-1)^1 (1-1)^2}{1^3} + \dots \text{ حيث أعداد ثابت في } \mathbb{C}.$$

٣ - أثبت بالاستقراء انه لكل $n \in \mathbb{N}$ فان $n! \leq n^n$. استنتج ان المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}}$$

تكون تباعدية على محيط دائرة التقارب .

٤ - عرّف $s_n = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n-1}$ ، حيث a_n أعداد مركبة . افرض

ان $s_n \neq 0$ لكل n . فإذا كان $\frac{a_n}{s_n} \leftarrow 0$ ($n \leftarrow \infty$) ، فأثبت ان نصف قطر التقارب

للمتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = s_1 + s_2 + \dots$$

يساوي ١ . أثبت كذلك ان

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} |e| > 1.$$

استخدم هذه النتيجة لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^n e^{-n}$ | $e| > 1$.

قابل للتفاضل .

المثال ٤ .

لنأخذ من عددا حقيقيا، ولأي $r = 0, 1, \dots$ نعرف

$$q_r(s) = \frac{s}{1 + (r s)^2} .$$

فلأن $(1 - |r|s) \leq |r s|^2 \leq 1 + |r s|^2$ ، يكون $|q_r(s)| \geq \frac{1}{4}$ لكل $s \in \mathbb{R}$ ، لكل $r < \infty$. لهذا، فانه لكل s ، $q_r(s) \leftarrow 0$ ($r \leftarrow \infty$)،
ومنه

$$\frac{d}{ds} \left(\lim_{r \leftarrow \infty} q_r(s) \right) = 0 .$$

ولكن لكل s ،

$$\frac{d}{ds} q_r(s) = \frac{1 - (r s)^2}{1 + (r s)^2} ,$$

لهذا، فان $\lim_{r \leftarrow \infty} q_r(s) = 0$ لكل $s \neq 0$. اذن تكون المعادلة

$$\frac{d}{ds} \lim_{r \leftarrow \infty} q_r(s) = \lim_{r \leftarrow \infty} \frac{d}{ds} q_r(s)$$

خطأ عند $s = 0$.

النظرية ٢ .

افرض ان نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ هو $0 < \rho$. اذن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ذات تقارب مطلق لكل } |z| < \rho \text{ ويكون}$$

تقارب مطلق. فيمكن اذن تطبيق النظرية ثانية على $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ونحصل على

$$Q^{(1)}(x) = \frac{Q^{(0)}(x)}{D(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(1)}_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-n) a_n x^{n-1}$$

وبهذه الطريقة نحصل على

$$Q^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(2)}_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-n)(1-n) a_n x^{n-2} \dots (1-n)(1-n+r) a_n x^{n-r} > 0 \text{ نق. وإذا عوضنا } x=0 \text{ في هذه المعادلة، فإن } Q^{(2)}(0) = 0 \text{ لكل } n < 2 \text{ ومن هذا نتبع (١٠).}$$

من (١٠) نرى انه بالإمكان كتابة اقتران المجموع على صورة

$$Q^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{(2)}_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)(1-n+r) a_n}{n!} x^n > 0 \text{ نق.}$$

(٢) هذا يتبع مباشرة لأن قابلية التفاضل تعطي الاتصال (الفصل ٧ البند ١).

النتيجة ٢ (نظرية تطابق متسلسلات القوى).

$$\text{إذا كان } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ و } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ نفس نصف قطر التقارب } 0 < \rho$$

$$\text{وكان } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ لكل } |x| < \rho \text{ فإن } a_n = b_n \text{ لكل } n.$$

البرهان.

ضع $x = \rho$ ، نحصل على $a_n = b_n$. لاي $r \in \mathbb{N}$. فاضل رمن المرات طرفي

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ وضع } x = \rho \text{ نحصل على } a_r = b_r \text{، اذن } a_r = b_r.$$

المثال ٥.

لنسأل السؤال التالي: هل يوجد اقتران مشتقته هي $\frac{1}{x+1}$ ؟ من الواضح انه يجب

وضع تعديلات على ع ، سنفعل ذلك فيما بعد . وسبب طرح هذا السؤال أنه ليست أي مشتقة

من مشتقات $(ع + ١)^٠$ مساوية $\frac{١}{ع+١}$ لأي $ن \in \mathbb{Z}$. وبما أنه يمكن تمثيل $(ع + ١)^{-١}$

على صورة متسلسلة لـ $|ع| > ١$ فإنه يمكن البحث عن إقران قى بحيث ان قى $(ع) =$

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} ا٠ ن ا٠ ع^{-١} |ع| > ١ \text{ وقي } (ع) = \frac{١}{ع+١} . \text{ وهذا يكافئ}$$

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} ا٠ ن ا٠ ع^{-١} = ١^{-١} (ع + ١)^{-١} = (ع)^{-١} .$$

فمن النتيجة ٢ نحصل على $ا٠ = ١$ ، $ا١ = ٢$ ، $ا٢ = -١$ ، $ا٣ = ٣$ ، $ا٤ = ١$ ، ... ، لهذا ، وبوضع (أ) .
(٠) نحصل على

$$ق(ع) = ع - \frac{ع^٢}{٢} + \frac{ع^٣}{٣} - \frac{ع^٤}{٤} + \dots \text{ لكل } |ع| > ١ \dots (١١)$$

إذا عكسنا خطواتنا فبدأنا بالمتسلسلة في (١١) نرى ان نصف قطر التقارب لها هو ١ (من اختبار

النسبة) . لهذا فإنها تعرف إقراناً قى على $|ع| > ١$ مشتقة من النظرية ٢ هو $\frac{١}{ع+١}$.

المثال ٦ .

لأي عدد نسبي حـ و لأي عدد صحيح ن ≤ ٠ اكتب

$$ا٠ حـ = \frac{(١+حـ)(٢+حـ)\dots(ن+حـ)}{١} \text{ لكل } ن \leq ١ ، ا٠ حـ = ١ .$$

إذا كان حـ عدداً صحيحاً ≤ ٠ فإن $ا٠ حـ$ هو معامل ذات الحدين $(ن+حـ)$ فلاي عددين

نسبيين حـ ، د فإننا سنثبت ان

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} ا٠ حـ ا٠ د = ا٠ حـ+د = ١ \dots (١٢)$$

تستخدم هذه النتيجة كثيراً في نظرية سيزار وللتجميع .

فلكل $|s| > 1$ ، وباستخدام متسلسلة ذات الحدين نحصل على

$$(1 - s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \quad (13)$$

فالطرف الايمن من (13) يساوي

$$(1 - s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \quad (14)$$

والطرف الايسر من (13) هو، حسب قاعدة كوشي للضرب،

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{r=0}^{\infty} s^r = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \quad (15)$$

وبما ان (14)، (15) متساويتان لكل $|s| > 1$ فان نظرية تطابق المتسلسلات تعطي

(12).

تمارين ٨ - ٢

(نجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - عرف $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ لكل $s \geq 1$ ، اثبت ان $\zeta(s) \neq 0$ ق $s \geq 1$.
 لكل $s \in [1, \infty)$. اثبت كذلك ان المعادلة

$$\zeta(s) = \zeta(s) \quad (1)$$

غير صحيحة لكل $s \in [1, \infty)$.

٢ - افرض ان $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. اثبت ان متسلسلة القوى

$$1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

$$٣- (١) \text{ أثبت أن } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1^n} = \frac{e^n}{1^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1^n} \text{ لكل } e \in \mathbb{C}.$$

$$(٢) \text{ أثبت أن } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e^n \sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1} \text{ لهما نصف قطر تقارب هو } ١ \text{ ثم جد}$$

مجموعيهما.

٤- استخدم نظرية تطابق متسلسلات القوى لإثبات أنه لكل $N \in \mathbb{N}$ فإن

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} 2^n = 2^{N+1}.$$

$$٥- \text{جد اقترانا ق معرفاً على } |e| > ١ \text{ بمتسلسلة قوى بحيث أن } q(0) = ٠ \text{ و } q'(e) = ١ \text{ و}$$

$$+ e^2(1 - |e|) > ١.$$

$$٦- \text{على فرض أن } s \text{ عدد حقيقي، جد اقترانا ق معرفاً على } 1 - s > ١ \text{ بحيث أن ق}$$

$$q(0) = ٠ \text{ و}$$

$$q'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1 > s > ١.$$

٧- لأي عدد حقيقي a ، وأي عدد صحيح $n \leq ٠$ ، عرّف

$$a^n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}, \quad ١ = \binom{a}{0}, \quad ١ \leq n.$$

اكتب ق $(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} e^n$. أثبت أن المتسلسلة تقاربية لكل $|e| > ١$ ، وفاضلها حدا حدا لتثبت أن $(e+1)q'(e) = aq(e)$ ، $|e| > ١$.

في الحالة الخاصة عندما يكون e حقيقياً ($e = s$) وأعداداً نسبياً (تكون $(s+1)^a$ معرفة). استنتج أن

$$ق(س) = (س + ١) \text{ لكل } ١ - س > ١.$$

لاحظ ان هذا يعطي متسلسلة ذات الحدين لـ $(س + ١)$ ، $|س| > ١$ ، اعداد نسبي دون استخدام نظرية تايلور.

٣. نظرية النهاية لأبل

لقد اثبتنا في النتيجة ١، للنظرية ٢، في البند السابق انه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة قوى نصف قطر تقاربها $٠ < \rho$ فان اقتران مجموعها المعروف بـ $ق(ع) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يكون متصلا على $|ع| > \rho$. هذا يكافيء

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (١٦)$$

لكل $ع$ داخل دائرة التقارب، اي لكل $|ع| > \rho$.

من المثير للاهتمام، والمفيد احيانا، إيجاد شروط تجعل (١٦) صحيحة لـ $ع$ على محيط دائرة التقارب. اي عندما تكون $|ع| = \rho$. نق. لتبسيط الامور سوف نعتبر حقيقيا فقط، فتصبح دائرة التقارب فترة تقارب على خط الاعداد الحقيقية، لان $\{س | س| > \rho\} = (-\infty, -\rho) \cup (\rho, \infty)$. في هذه الحالة فان النقط التي على محيط دائرة التقارب هي ρ ، $-\rho$. فاذا

كانت (١٦) لها معنى عند $ع = \rho$ فانه يجب ان تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية. كان الرياضي النرويجي المعروف ن. هـ. آبل أول من اثبت ان تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية كاف لتحقيق (١٦) على الاعداد الحقيقية.

النظرية ٣ (نظرية النهاية لأبل).

افرض ان $٠ < \rho$ ، وان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية. اذن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات تقارب مطلق

لـ | س | > نق و

(١٧) $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_n نق = \sum_{ن=١}^{\infty} ا_n نق \dots\dots\dots$

البرهان .

نذكر اولاً ان $س \leftarrow نق$ - تعني ان $س \leftarrow نق$ ودائماً تكون اقل من نق . لنكتب $ب_n =$

$ا_n نق$ و $ص_n = ب_n + ب_{ن-١} + \dots + ب_١ + ب_٠$ لنفرض ان $\sum_{ن=١}^{\infty} ب_n$ تقارباً الى $ص$. اذن $ص_n \leftarrow ص$ (ن $\leftarrow \infty$) .

لهذا فان (ص_ن) محصورة، واذن يوجد $م < ٠$ بحيث ان

$|ص_n| \geq م$ لكل ن (١٨)

اذن $|ب_n| = |ص_n - ص_{ن-١}| \geq |ص_n| - |ص_{ن-١}| \geq م$ لكل ن . كذلك بما ان $ص_n \leftarrow ص$ (ن $\leftarrow \infty$) ، فان (١٨) تعطي $|ص_n| \geq م$. اذن $|ص_n - ص| \geq |ص_n| \geq م$ لكل ن . كذلك بما ان $ص_n \leftarrow ص$ (ن $\leftarrow \infty$) فانه لأي $\epsilon < ٠$ يوجد δ بحيث ان $|ص_n - ص| > \frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن $\leq م$.

الآن لـ | س | > نق نحصل على

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ا_n س = \sum_{ن=١}^{\infty} ا_n ب_n + \sum_{ن=١}^{\infty} ا_n (س - ب_n) \geq \sum_{ن=١}^{\infty} ا_n ب_n - \sum_{ن=١}^{\infty} ا_n |س - ب_n|$$

هذا يثبت ان $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_n س$ ذات تقارب مطلق لكل | س | > نق .

لآليات (١٧) يجب ان نثبت انه لأي $\epsilon < ٠$ يوجد $\delta < ٠$ بحيث ان نق - $\delta > س > نق + \delta$ نق تعطي

(١٩) $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_n س - \delta > \dots\dots\dots$

كما سنرى فيما بعد فان :

$$\delta = \left\{ \frac{\epsilon}{4m}, \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

تصلح . لانه اذا كان نق - $\delta > m > \text{نق}$ وكبتنا ل $\frac{m}{\text{نق}}$ ، فان $0 > 1 - \frac{\delta}{\text{نق}} > 0$ ومنه

$$(20) \quad 0 < 1 - \frac{\delta}{\text{نق}} > \frac{\epsilon}{4m} > 0 \dots \dots \dots$$

و بتطبيق صيغة أبيل للمجموع الجزئي (الفصل 5 ، البند ٢) نحصل على

$$(21) \quad \sum_{j=1}^n a_j s_j^0 = \sum_{j=1}^n a_j l_j^0 + \sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 (1 - l_j^0) \dots$$

من (١٨) والمتباينة $0 < 1 - l_j^0 < 1$ نحصل على $|s_j^0| \leq m \leq (r \leftarrow \infty)$. واذن عندما $r \leftarrow \infty$ في (٢١) نحصل على

$$(22) \quad \sum_{j=1}^n a_j s_j^0 = \sum_{j=1}^n a_j (1 - l_j^0) \dots$$

باستخدام (٢٢) ، وبما ان $\sum_{j=1}^n l_j^0 = \frac{1}{n-1}$ فاننا نحصل على

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j s_j^0 - \sum_{j=1}^n a_j (1 - l_j^0) \right| \leq \sum_{j=1}^n l_j^0$$

$$= \sum_{j=1}^n s_j^0 (1 - l_j^0)$$

$$\geq \sum_{j=1}^n s_j^0 (1 - l_j^0)$$

$$= \sum_{j=1}^n s_j^0 (1 - l_j^0) + \sum_{j=1}^n s_j^0 l_j^0$$

الآن $|s_j^0| \leq m$ لكل ن ، وكذلك $|s_j^0| > \frac{\epsilon}{p}$ لكل ن $\leq m$.

$$\begin{aligned}
& \text{كذلك } L > 1 \text{ و } 1 - L > \frac{\epsilon}{m^2} \text{ من (٢٠). من ذلك يتبع ان} \\
& \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n - s \right| \leq m^2 \sum_{n=0}^{\infty} L^n + \frac{\epsilon}{4} + L^n \sum_{n=0}^{\infty} L^n \\
& \geq m^2 \sum_{n=0}^{\infty} L^n + m^2 (1 - L) \sum_{n=0}^{\infty} L^n \\
& \geq m^2 \left(\frac{\epsilon}{4} + m^2 \frac{\epsilon}{4} \right) = \epsilon.
\end{aligned}$$

هذا يثبت (١٩) فالنظرية.

المثال ٧.

افرض ان $0 < \alpha < 1$ عدد نسبي . فاذا كان أ عددا صحيحا فانه يمكن كتابة $(1 - \alpha)^n$ كمتسلسلة ذات الحدين المنتهية والصحيحة لكل s . وإذا لم يكن أ عددا صحيحا فانه حسب البند السابق

$$(23) \quad (1 - \alpha)^n = 1 - \alpha + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(1 - \alpha)^2}{2 \cdot 3} + \dots$$

لكل $|s| < 1$.

لندرس صحة (٢٣) عند $s = 1$ ؛ فبما ان $0 < \alpha < 1$ فان

$$(1 - \alpha)^n = 1 - \alpha + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(1 - \alpha)^2}{2 \cdot 3} + \dots$$

إذا استطعنا اثبات ان المتسلسلة في (٢٣) هي تقاربية عند $s = 1$ فانه يكون بإمكاننا تطبيق نظرية النهاية لأبل ونحصل على ان (١٣) صحيحة عند $s = 1$ ، اي ان

$$0 = 1 - \alpha + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(1 - \alpha)^2}{2 \cdot 3} + \dots$$

يفشل اختبار النسبة في اعطاء نتيجة للمتسلسلة $1 - \alpha + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^2(1 - \alpha)^2}{2 \cdot 3} + \dots$. فلنحاول

اختبار رابي (الفصل ٥، البند ٢) ونكتب

$$ب_n = \frac{(1-n)^2(1-n) \dots (1-n)}{1_n}$$

لنحصل على أنه لكل $n < ١$ ،

$$ن \mid \left(١ - \frac{١-n}{1_n} \right) = (1 - \frac{1-n}{1_n}) \leftarrow 1 - 1 = ٠ \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

بما أن $٠ < ١ - 1 = ٠$ ، فإنه وباستخدام اختبار رابي نحصل على أن المتسلسلة ذات تقارب مطلق. إذن، ومن نظرية أبيل نحصل على أن (٢٢) صحيحة لكل $١ - ١ > ٠$. ويمكن إثبات أن (٢٣) صحيحة عند $١ - ١ = ٠$ بنفس الطريقة. وعندها يكون

$$١ = ١ + ١ + \frac{(1-1)^1}{1_1} + \dots$$

استخدم أبيل نظريته لإثبات النتيجة التالية التي تتعلق بضرب كوشي للمتسلسلات التقاربية.

النظرية ٤ [نظرية الضرب لأبل].

افرض أن $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ تقاربتان. وافرض أن متسلسلة الضرب الكوشي $\sum c_n$ تقاربية حيث $c_n = a_n b_n + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_n b_n$.
اذن

$$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$$

البرهان.

سوف نطبق نظرية النهاية لأبل، حيث نق $١ = ١$ لكل من $\sum a_n$ ، $\sum b_n$. فيما ان

$\sum |a_n| > \infty$ و $\sum |b_n| > \infty$ $|s| > 1$. من التقارب المطلق والنظرية ١٤، الفصل ٥، نحصل على

$$(24) \quad \sum (a_n b_n) = \left(\sum a_n \right) \left(\sum b_n \right) \quad |s| > 1.$$

عندما $s \leftarrow -1$ في (٢٤) فإن نظرية ابل تعطي

$$\sum (a_n) = \left(\sum b_n \right) \sum c_n$$

لأن $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ ، $\sum c_n$ تقاربات.

كذلك تستخدم نظرية الضرب عندما يكون $a_n = b_n$ لكل n فيكون

$$\sum c_n = a_n + a_{n-1} + \dots \quad \text{وإذا كانت } \sum a_n, \sum c_n \text{ تقاربتين فإن}$$

$$\sum (a_n) = \sum c_n$$

المثال ٨.

نعرف ان المتسلسلة $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$ تقاربية باستخدام اختبار ليبنتس

(الفصل ٥ البند ٢). سوف نثبت فيما بعد ان مجموعها هو $\frac{1}{2}$. وإذا رمزنا للحد العام بالرمز a_n

فان الحد العام لمتسلسلة الضرب الكوشي لـ $\sum (a_n)$ يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-r)^n}{(1+r)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n$$

$$(25) \quad \left(\frac{1}{1+r-n} + \frac{1}{1+r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)^3}{(2+n)} = \dots$$

$$\dots \dots \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)^2}{2+n} = \dots$$

وعلى فرض ان \sum_n تقاربية فانه يمكن تطبيق نظرية الضرب لأبل ونحصل على

$$(ل٢) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2 = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)}{2+n} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1+n} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

الآن \sum_n تقاربية من اختبار ليبتس لانه من (٢٥) نحصل على

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{1+n} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{2}{(3+n)(2+n)} = \frac{2}{(3+n)(2+n)} \rightarrow 0 \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

اذن (\sum_n) وتيريه متناقصة. كذلك $\frac{1}{r+1} \leftarrow 0$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، والوسط الحسابي

$$و_n = \sum_{r=0}^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{r=0}^n 1 \right) = \frac{1}{n+1} (n+1) = 1 \leftarrow 0 \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

(انظر التمارين ٤ - ١). اذن

$$و_n = \sum_{r=0}^n \frac{(1+n)}{2+n} = \frac{(1+n)}{2+n} \left(\sum_{r=0}^n 1 \right) = \frac{(1+n)}{2+n} (n+1) \rightarrow \infty \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

وهكذا فان (\sum_n) متناقصة وتقترب من الصفر، اذن $\sum_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-n)^3$ تقاربية.

تمارين ٨ - ٣

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ - (تعميم لنظرية النهاية لأبل). افرض ان \sum_n تقاربية.

وافرض انه لكل n ، $h_n : (0, 1) \rightarrow R$ وان

(١) نها $s \leftarrow 1$ - هـ n (س) $1 =$ لكل n

(٢) ص ح ع. $s > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$ (س) $1, n$ (س) $\infty >$

اثبت ان نها $s \leftarrow 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هـ n (س) $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

في الحالة الخاصة عندما يكون هـ n (س) $= s$ بين ان (١)، (٢) تتحققان واستنتج نظرية النهاية لأبل عندما $s \leftarrow 1$ -.

٢ - افرض ان s عدد حقيقي وافرض ان نصف قطر التقارب لـ a_n s هو $0 < \rho$. اثبت ان كل نقطة تكون عندها المتسلسلة تقاربية هي نقطة اتصال.

٣ - من نظرية النهاية لأبل فانه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية فان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية

لكل $|s| > 1$ ونها $s \leftarrow 1$ - ق (س) موجودة وتساوي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(١) قد يحدث ان تكون ق (س) تقاربية لكل $|s| > 1$ ونها $s \leftarrow 1$ - ق (س) موجودة مع

ان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تباعدية. بين ان هذه هي الحال عندما يكون $a_n = (1 - n)^n$.

(٢) اعط مثالا للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية لكل $s > 0$ $s \geq 1$

(٣) افرض ان $a_n \leq 0$ لكل n ≤ 0 وافرض ان المتسلسلة ق (س) $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية لكل $s > 0$ $s > 1$ ولكن a_n تباعدية. اثبت ان ق (س) $\leftarrow \infty$ (س) $\leftarrow (-1)$.

(٤) اكتب $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ول $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$ اذا كان

$$\frac{s_n}{1+n} \leftarrow 0 \text{ ، عندها } \leftarrow \infty \text{ فاثبت ان } \frac{s_n}{1+n} \leftarrow 0 \text{ و } \frac{a_n}{1+n} \leftarrow 0$$

عندما $n \leftarrow \infty$.

استنتج ان لكل $|s| > 1$ فان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية وان

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s-1)^n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} s^n.$$

كذلك برهن على انه اذا كان

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{1+n} \leftarrow s \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

فان

$$s \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

(5) افرض ان $a_n = (1-n)^n$ و $s_0 = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. اثبت ان المتتالية

$$\left(\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{1+n} \right) \text{ تباعدية، ولكن } s \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \frac{1}{4}.$$

(6) اثبت ان $q(s) = 1 - s^2 + s^3 - s^4 + s^5 - s^6 + s^7 - s^8 + s^9 - s^{10} + \dots$ لها

نصف قطر تقارب $= 1$ ، واثبت ان

$$s \leftarrow -1 \text{ ق } (s) = \frac{2}{3}.$$

٤ - اكتب $q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n}$. اثبت ان هذه المتسلسلة ذات تقارب مطلق لكل $|s|$

≥ 1 ، وتباعدية لكل $|s| < 1$. اذن $q: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. اثبت ان q قابل للتفاضل،

على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ ، ولكن غير قابل للتفاضل عند $s = 1$ ، اي اثبت ان

$$s \leftarrow -1 \text{ ق } (s) - q(1) \text{ غير موجودة.}$$

٥ - افرض ان $a_n = 1 + a_1^2 + a_2^3 + a_3^4 + \dots$ ذات تقارب مطلق. اثبت ان $q(s) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \text{ ذات تقارب مطلق لكل } |s| \geq 1, \text{ واثبت ان } q \text{ قابل للتفاضل على } |s| \geq 1.$$

(لاحظ ان السؤال ٤ يبين ان نقاط التقارب قد لا تكون نقاط تفاضل وان السؤال ٥

يعطي شروطا لكي تكون هذه النقاط نقاط تفاضل).

٦- افرض ان المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ محصورة على دائرة الوحدة، اي ان

$$|a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq M$$

لكل n ، لكل ϵ بحيث ان $|a_n| = 1$ ولعدد ما $M > 0$ ، لا يعتمد على n أو ϵ . اثبت ان ق

(ع) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تقاربية لـ $|a_n| > 1$. باخذ حاصل الضرب الكوشي لـ ق (ع) بـ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

، اثبت ان ق (ع) $|a_n| \geq M > 1$ ، اي ان ق محصورة على قرص الوحدة المفتوح.

٧- اثبت ان المتسلسلة $s_1 = \frac{1}{3} + \frac{s_2}{2} - \frac{s_3}{1} + \dots$ تقاربية لـ $s_1 \geq 1$.

افرض ان مجموعها هو s عندما يكون $s = 1$. سوف نثبت في الفصل القادم ان $s =$

$\frac{1}{2}$. استخدم نظرية الضرب لأبل لاثبات ان

$$s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)}{1+n} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1+n} \right).$$

افصل التاسع

الاقترانات الابتدائية

١- الاقتران الاسي

هناك عدد من الاقترانات تظهر بكثرة في معظم فروع الرياضيات وتطبيقاتها ، لهذا فهي جديرة بعرض مفصل . ويمكن بالطبع اعتبار اي اقتران معروف لدينا اقترانا ابتدائيا . أما ما نقصده هنا فهو الاقترانات الاسية والمثلثية ومعكوساتها . فهذه الاقترانات تذكر عادة وتستعمل قبل ان يدرس الطالب مادة التحليل ، ولذا فمن المحتمل ان تكون خصائصها قد درست عن طريق التفكير الهندسي البدهي . ولا يجوز ان نستعين بالتفكير الهندسي البدهي ، ظلما هويوحي بنتائج صحيحة وهامة . ولكن المقاييس المنطقية الراهنة تقتضي اعطاء برهان يعتمد فقط على مسلمات الاعداد الحقيقية والمركبة ، ونتائجها المنطقية . ولدينا الآن كل النظريات التي

نحتاج اليها في التحليل، لنتمكن من تعريف هذه الاقترانات الابتدائية ودراستها.
وفي مقدمة الاقترانات الاساسية الابتدائية: الاقتران الأسّي، لانه يمكن تعريف
الاقترانات المثلثية بدلالته.
وهناك طرق عديدة لتوضيح هذا الاقتران. ولكننا سوف نختار طريقة دقيقة رياضياً،
ولها أهمية فيزيائية.

لقد تم التوصل بالتجربة الى انه إذا تركت كمية من الراديوم تنحل، فإن سرعة
الانحلال تتناسب طردياً مع الكمية الباقية. فإذا رمزنا بالرمز $Q(n)$ لكمية الراديوم الباقية بعد
زمن n ، وفسرنا سرعة الانحلال على انها $Q'(n)$ ، فانه يمكن كتابة المعادلة التفاضلية
 $Q'(n) = -\lambda Q(n)$ (١)
حيث λ ثابت التناسب. والهدف هنا هو حل (١) لايجاد $Q(n)$ بصيغة اقتران صريح في n .
ونحصل ايضاً على معادلة مثل (١) إذا كان هناك وضع به يزداد عدد البكتيريا بسرعة تتناسب
مع العدد الموجود منها في لحظة ما.
وللتبسيط سوف ندرس (١) عندما يكون $\lambda = 1$ ، $Q(0) = 1$.

النظرية ١.

إذا وجد اقتران $Q: R \leftarrow R$ بحيث ان Q موجود على R ويحقق $Q'(s) = Q(s)$ لكل $s \in R$ ، $Q(0) = 1$ ، فإن Q يكون على الصورة:

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \quad (2)$$

لكل $s \in R$.

وبالعكس، ان المتسلسلة في (٢) تقاربية لجميع قيم s وتعرف اقترانا يحقق $Q'(s) = Q(s)$
في $Q(0) = 1$.

البرهان .

نفرض ان ق موجود ويحقق الشروط المذكورة . سوف نثبت اولاً ان ق يحقق العلاقة

$$(3) \quad \text{ق (س + ح)} = \text{ق (س)} + \text{ق (ح)} \dots \dots \dots$$

لكل س ، ح . هناك طريقة أخرى لتفسير (3) وهي القول ان ق هو اقتران عاقل بين الزمرتين (R ، +) ، (R ، ⁺) (انظر الفصل ١ ، البند ٣) .

لبرهان (3) خذ ح ، و $\exists R$ واكتب $A = ح + و$. فيما ان ق (س) = ق (س) فان

$$\frac{د}{دس} [\text{ق (س)} \text{ ق (أ - س)}] = -\text{ق (س)} \text{ ق (أ - س)} + \text{ق (أ - س)} \text{ ق (س)} = ٠$$

لكل س ، اذن ق (س) \circ ق (أ - س) = ثابتا = ق (٠) ق (أ) . فاذا وضعنا $س = ح$ ، نحصل على ق (ح) ق (و) = ق (ح + و) ، لان ق (٠) = ١ . وبما ان ح ، واختياريان فان (3) صحيحة .

وهناك نتيجة مباشرة ومثيرة للاهتمام لـ (3) : وهي ان ق (س) < \circ لكل س . لان ق

$$\left(\frac{س}{١} + \frac{س}{١}\right) = \left(\frac{س}{١}\right) = \left(\frac{س}{١}\right) \leq ٠ ، اذن ق (س) \leq ٠ \text{ لكل س . فاذا وجد س}$$

بحيث ان ق (س) = \circ فانتا ، ومن (3) ، نحصل على :

$$١ = \text{ق (٠)} = \text{ق (س)} + \text{ق (س)} = \text{ق (س)} \text{ ق (س)} = ٠ \text{ ق (س)} = ٠$$

وهذا تناقض . اذن ق (س) < \circ على R . وبما ان ق (س) = ق (س) نحصل على ق (س)

< \circ على R . واذن فمن نتيجة في الفصل ٧ ، البند ٣ ، نحصل على ان ق متزايد فعلاً .

الآن من ق (س) = ق (س) ، نحصل على ان ق موجود ويحقق ق (س) = ق (س) .

وبشكل عام فان ق (٥) = ق (س) لكل ن $\exists N$ ، لكل س $\geq R$. ومن نظرية تايلور :

نكتب متسلسلة تايلور حول س = \circ ونحصل على

$$\text{ق (س)} = \text{ق (٠)} + \text{س ق (٠)} + \dots + \frac{س^٥}{٥!} \text{ق (٥)} + \dots$$

$$= ١ + س + \dots + \frac{س^٥}{٥!} \text{ق (ح)} + \dots$$

حيث حد بين الصفر وس . ولا ثبات (٢) ، التي تكافيء

$$0 = \left| \text{ق (س)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right|$$

يجب ان نثبت ان نهان $\left| \frac{1}{n^s} \right|$ ق (ح) = 0 لكل س . لكننا نعرف ان $\left| \frac{1}{n^s} \right| \leftarrow 0$.

عندما $\infty \leftarrow 0$ لكل س ، (الفصل ٤ ، البند ٤) ، اذن يكفي ان نثبت ان $\left| \text{ق (ح)} \right|$ لا يصبح

كبيرا بازيادان . مع اننا لم نشدد على ان ح تعتمد على س ون ، الا ان هذا واضح . ف ق .

متزايد . اذن $0 < \text{تعطي} \left| \text{ق (ح)} \right| = \text{ق (ح)} > 0$ (س) ، وكذلك $0 < \text{تعطي}$

$\left| \text{ق (ح)} \right| = \text{ق (ح)} > 0$. اذن لأي س $\neq 0$ ، فان :

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \text{ق (ح)} \geq \left| \frac{1}{n^s} \right| (1 + \text{ق (س)}) \leftarrow 0 \text{ عندما } \infty \leftarrow 0$$
 ، مما يثبت (٢)

في هذه الحالة . وعندما يكون س = 0 فان (٢) تكون بديهية .

خلاصة ما توصلنا اليه اننا بينا ان للاقتران الذي يحقق المعادلة التفاضلية متسلسلة قوى

في (٢) . وكذلك توصلنا الى ان هذا الاقتران يحقق (٣) وهو موجب ومتزايد فعلا .

الآن نعود الى عكس النظرية : بعد ان وجدنا المتسلسلة (٢) من الجزء الاول يصبح من

السهل اثبات ان هذه المتسلسلة تعرف اقترانا يحقق المعادلة التفاضلية . وبالطبع كان بالامكان

البدء بكتابة المتسلسلة (٢) ، وبذا نوفر الوقت . ولكن الفائدة تكون أقل .

من اختبار النسبة لأي عدد حقيقي (او مركب) س $\neq 0$ فان

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \frac{1}{(1+n)} = \left| \frac{1}{n^s} \right| \frac{1}{(1+n)} \leftarrow 0 \text{ (ن } \infty \leftarrow 0 \text{) ،}$$

اذن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ذات تقارب مطلق (واذن تقاربية) . والمتسلسلة تقاربية بالطبع عند س = 0 .

وهذه المتسلسلة تعرف اقترانا ق على R (أو C) الى R (أو C) اعتمادا على كون س عددا

حقيقيا أو مركبا . يسمى هذا الاقتران الاقتران الأسّي ، ويرمز له بالرمز سا ، فيكون

$$(٤) \quad \text{سا (س)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\text{س}^i}{15} = 1 + \text{س} + \frac{\text{س}^2}{15} + \dots$$

لجميع الاعداد الحقيقية او المركبة س. ويضع س = ٠ نحصل على سا (٠) = ١. ومن النظرية ٢، الفصل ٨، وبما ان التسلسلة تقاربية، فانه يمكن مفاضلة الحدود ونحصل على

$$\frac{\text{دس}}{\text{دس}} (\text{سا (س)}) = 0 + 1 + \text{س} + \frac{\text{س}^2}{15} + \dots = \text{سا (س)}.$$

لقد اثبتنا الآن ان سا هو اقتران يحقق شروط الجزء الاول من النظرية. ومن الجزء الاول نحصل على الخواص العادية للاقتران سا، مثل نظرية الجمع:

$$\text{سا (س) + سا (س)} = \text{سا (س)} + 0 = \text{سا (س)}$$

ان الامر الجوهري في النظرية ١ هو انه يوجد اقتران وحيد، يحقق ق (س) = ق (س) وق (٠) = ١ هو الاقتران المعروف بـ (٤).

نستطيع الآن اعطاء الحل العام للمعادلة التفاضلية (١).

النظرية ٢.

افرض ان ق قابل للتفاضل على R وان حد ثابت. فيكون

$$\text{ق (س)} = \text{حد ق (س)}$$

اذا فقط اذا كان ق (س) = ا سا (حد س) حيث ا = ق (٠).

البرهان.

اذا كان ق (س) = ا سا (حد س)، فان ق (٠) = ا وق (س) = حد ا سا (حد س) =

حد ق (س).

افترض ان ق (س) = حـ ق (س)، فبما ان سا (حـ س) < ٠ فانه يمكن اخذ مشتقة

$$\frac{ق(س)}{سا(حـ س)} \text{ ونحصل على}$$

$$٠ = \frac{سا(حـ ق(س) - ق(س)سا(حـ س))}{سا^٢(حـ س)}$$

$$\text{لأن ق (س) = حـ ق (س). اذن } \frac{ق(س)}{سا(حـ س)} = \text{ثابت} = \frac{ق(٠)}{سا(٠)} = \text{ق (٠) . اي ان}$$

$$\text{ق (س) = ق (٠) سا (حـ س) .}$$

المثال ١ .

تتفاعل مادة كيميائية بحيث ان سرعة التفاعل في اي لحظة تساوي ضعف الكمية الموجودة آنئذ . فاذا وجد ان ١٠ غرامات من المادة بقيت بعد نصف ساعة من بدء التفاعل ، ما هي كمية المادة التي كانت موجودة في البداية؟

اذا فرضنا ان ق (س) هي الكمية الموجودة عند زمن س (ساعات) فان المعادلة هي

$$\text{ق (س) = ٢ ق (س) . فمن النظرية ٢ ، نحصل على ق (س) = أ سا (٢ س) ، ومن المعلومات}$$

$$\text{المعطاة فان ق (} \frac{١}{٢} \text{) = ١٠ = أ سا (١) . والكمية الاولية ق (٠) = أ . اذن ق (٠) =}$$

$$\frac{١٠}{سا(١)} \text{ . فلمعرفة قيمة ق (٠) يجب معرفة سا (١) . وهناك جداول لـ سا (س) ذات}$$

فائدة ومعروفة منذ سنين عديدة .

للعدد سا (١) المذكور في المثال ١ أهمية كما سنرى ، وسنحاول الآن إيجاد عدد من المنازل العشرية .

$$\text{حساب } \ominus = سا (١) .$$

نرمز عادة لـ سا (١) بالرمز \ominus . وقيمته هي مجموع التسلسلة اللانهائية (٤) عند س = ١ ، اي

ان

$$\dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + 1 + 1 = e$$

لنجد اول خمس منازل عشرية في تمثيل e ككسر عشري . نكتب $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$

$$\frac{1}{12}, \dots, \text{و } s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, e = s_n + b_n \text{ حيث } b_n \text{ الباقي بعد أخذ}$$

$n + 1$ حدا . اذن لأي n موجب ، $e - s_n < s_{n+1}$

$$b_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} > \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1+n}{(n+1)!} = \frac{1+n}{(n+1)!} > \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{اذن } \frac{1}{(n+1)!}$$

$$s_n > e > s_n + \frac{1}{(n+1)!} \dots \dots \dots (6)$$

فلكي نحصل على الدقة المطلوبة فلا بد ان يكون $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$. نجد ان

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6} \dots \dots \dots (6) \text{ اذن يجب ان نحسب قيمة}$$

$$s_n \text{ وهذا سهل . } s_0 = 1, s_1 = 2, s_2 = \frac{5}{2} = 2.5, s_3 = \frac{13}{6} = 2.1666\dots, s_4 = \frac{67}{24} = 2.791666\dots, \dots$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, \dots \text{ فلكي نحصل على تقرب دقيق نقرب جميع } a_n \text{ الى سبع}$$

منازل عشرية :

$$a_0 = 1.0000000$$

$$a_1 = 1.0000000$$

$$a_2 = 1.0000000$$

$$a_3 = 1.0000000$$

$$\dots \dots \dots$$

حيث من موجبة $\frac{1}{10^6} < 10^{-6}$. ويتكلمة ذلك الى a_6 وجمع النتائج نحصل على

$$Y, V1A2A2 = \frac{1}{Y_{1 \times Y}} \quad Y + Y, V1A2A19 >$$

$$.2,7182817 = \frac{2}{\sqrt{1.4}} - 2,7182819 <_{1.0} \text{ من}$$

يستج الآن من (٦)، وبما ان الباقي ب.١، $\frac{1}{\sqrt{1.5 \times 2}} >$ ، ان:

$$y_{182821} > 0 > y_{182813}$$

الحال ٢ .

العدد θ هو عدد غير نسبي. ويمكن اثبات ذلك باستخدام (٦). فبما ان $\theta =$

۲,۷۱۸... فهو عدد غير صحيح. افرض ان امكن ان θ عدد نسبي. مثلاً $\theta = \frac{1}{p}$ حيث p

$\exists N, b \leq 2$. ويأخذ $n = b$ في (٦) نحصل على

$$\frac{1}{15.5} > \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0$$

ويضرب اطراف المتباينة في b نحصل على $a(1-b) - 1 - b \geq 0$ ولكن $\frac{1}{4}$

ب! س_ب = ٢ ب! + ... + ١ ، لهذا فان المتباينة الاخيرة تنص على ان أ (ب - ١) -

ب) س ب هو عدد صحيح موجب اقل من $\frac{1}{p}$ ، وهذا التناقض يتضمن ان θ عدد غير نسبي .

المثال ٣.

سا (س) = e س للاعداد النسبية س. وإذا كان س عددا غير نسبي فإن الطرف الايمن من هذه المعادلة له معنى لان سا معرف على R. ولكن الطرف الايسر لا معنى له. فمثلا $e \cdot e$ غير معرف. ولكن كتابة e كرمز لـ سا (س) يسهل الامور لاي عدد حقيقي او (مركب) س. لا يثبت ان سا (س) = e س لاي عدد نسبي س نستخدم نظرية الجمع (e). وينتج مباشرة من (e) ان سا (س₁ + س₂ + ... + س_n) = سا (س₁) + ... + سا (س_n) لاي س₁ ، س₂ ، ... ، س_n ، اعداد حقيقية، اذن سا (ن) = $e \cdot n$. وإذا كان م $\in N$ فإن

$$e = \text{سا}(1) = \text{سا}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = \text{سا}\left(\frac{1}{1}\right) = \text{اذن سا}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{e} \text{ . لهذا اذا كان م ، ن } \in N \text{ فإن}$$

$$\text{سا}\left(\frac{n}{m}\right) = \text{سا}\left(\frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{m}{n}} + \dots + \frac{1}{\frac{m}{n}} + \frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = \text{سا}\left(\frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = \frac{n}{e} = \frac{1}{\frac{e}{n}}$$

اخيرا اذا كان م $\neq 0$ حيث ن $\in N$ فإن

$$\text{سا}\left(\frac{n}{m}\right) = \text{سا}\left(\frac{n}{m}\right) = \text{سا}(0) = 1$$

اذن

$$\text{سا}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{\frac{e}{n}} = \frac{1}{\frac{e}{m} \cdot \frac{m}{n}} = \frac{1}{\frac{e}{m}} = \frac{m}{e}$$

مما يثبت النتيجة.

لقد ذكرنا ان سا هو اقتران محافظ بين الزمرتين (R ، +) و (R⁺ ، +) وهو في الحقيقة

تشاكل.

النظرية ٣.

سا: $(+ , R) \leftarrow (, + R)$ هو تشاكل.

البرهان.

من نظرية الجمع (٥) نستنتج ان سا اقتران عاقل. كذلك سا اقتران واحد لواحد لانه اقتران متزايد فعلا. يبقى ان نثبت انه اقتران شامل. لئلاخذ ص $\exists R +$. فمن (٤) نحصل على ان سا (ص) = $1 + ص + \dots < ص$ وان سا $(-\frac{1}{ص}) < (-\frac{1}{ص})$ ، اذن (٥) تعطي

$$\text{سا} (-\frac{1}{ص}) = \frac{1}{\text{سا}(\frac{1}{ص})} > ص.$$

اذن سا $(-\frac{1}{ص}) > ص > \text{سا}(ص)$. اي ان ص عدد بين قيمتين لـ سا. ولكن سا قابل للتفاضل على R ، اذن هو متصل على R ومن نظرية القيم الوسطى، الفصل ٦، البند ٣

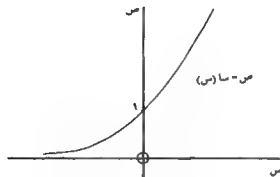
نرى انه يوجد س بحيث ان $-\frac{1}{ص} > ص > \text{سا}(ص)$ وهذا يثبت ان سا اقتران شامل.

ان برهان النظرية ٣ يبين ان سا $\leftarrow \infty$ عندما $ص \leftarrow \infty$. وسا (ص) $\leftarrow 0$ عندما $ص \leftarrow \infty$. ومن الواضح من متسلسلة سا (ص) ان

$$\frac{\text{سا}(ص)}{ص} \leftarrow \infty \text{ عندما } ص \leftarrow \infty$$

لأي عدد صحيح موجب و.

لقد حصلنا على جميع خواص الاقتران الأسّي التي نحتاج اليها عادة. وفي الشكل التالي بيان ص = سا (ص).



تمارين ٩ - ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

- ١ - افرض ان ق اقتران شامل ومحافظ من الزمرة $(R, +)$ الى الزمرة $(R, +)$ بحيث ان ق قابل للتفاضل عند $s = 0$. اثبت ان ق $(0) = 1$ ، ق قابل للتفاضل على R وق $(0) \neq 0$. اذا كان ق $(0) = -1$ ، جد ق وارسم مخططا لبيان ص = ق (س).
- ٢ - اثبت انه يوجد اقتران وحيد ق بحيث ان ق $(0) = 1$ ، ق $(س) = ٢ س$ ق (س) لكل س عدد حقيقي.

- ٣ - افرض ان ق اقتران محافظ من الزمرة $(R, +)$ الى الزمرة $(R, +)$ بحيث ان ق محصور من اعلى. اثبت ان ق ثابت.

- ٤ - افرض ان e_1, e_2 اعداد مركبة. استخدم تعريف ساع_١، ساع_٢ كمتسلسلات لاثبات ان

$$(1) \overline{e_1} = \overline{e_1} \text{ ساع}_1$$

$$(2) \text{متسلسلة حاصل الضرب الكوشي لـ ساع}_1 \text{ وساع}_2 \text{ هي}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 + e_2)^n}{10^n}$$

استتج نظرية الجمع :

$$\text{سا } (١ع + ٢ع) = \text{سا } (١ع) + \text{سا } (٢ع).$$

اثبت كذلك ان $\text{سا } (ع) \neq ٠$ لأي $ع \in \mathbb{C}$.

(٣) استخدم (١) ونظرية الجمع في (٢) لاثبات ان $|\text{سا } (ت س)| = ١$ لأي عدد حقيقي س .
أعط مثالاً تين فيه ان هذا غير صحيح لـ س عدد مركب .

٥ - مكثف سعتة حـ، شحن من بطارية ل فولت . ثم فصل عن البطارية وترك ليفرغ شحنته عبر مقاومة م . اثبت ان الشحنة ك في الدائرة تتناقص أسياً مع الزمن .

٦ - أثبت ان $\theta = ٢,٧١٨٢٨١٨$ صحيح لسبع منازل عشرية .

٧ - اثبت ان نهاية $(١ + \frac{١}{n})^\infty = e$ ساع لكل $ع \in \mathbb{C}$.

$$٨ - (١) \text{ لأي } س \in \mathbb{R}, \text{ اثبت ان } e^{-س} \leq ١ + س, e^{س} \leq ١ + س + \frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٦},$$

حيث المساواة تصح اذا فقط اذا كان س = ٠

$$(٢) \text{ اثبت ان } e^{-س} \leq ١ + س + \frac{س^2}{٢} \text{ اذا فقط اذا كان س } \leq ٠.$$

$$٩ - (١) \text{ اثبت انه لأي عدد مركب } ع, |١ - e^{-ع}| \geq |١ - e^ع|, \text{ واستتج ان } |e^ع| \geq |e^{-ع}|$$

اذ كان س عددا حقيقياً فاثبت ان $|١ - e^{-س}| = |١ - e^س|$ اذا فقط اذا كان س ≤ ٠ .

$$(٢) \text{ اذا كان } |ع| \geq ١ \text{ فاثبت ان } |١ - e^ع| \geq |١ - e^{-ع}|.$$

(٣) لأي عدد حقيقي س اثبت ان $e^{-س} + e^س \leq ٢$, ونحصل على المساواة اذا فقط

اذا كان س = ٠ .

$$١٠ - ما هو مجال الاقتران في المعرف بق (س) = \frac{e^{-س}}{\sqrt{س}} ؟ اثبت ان ق (س) \leq \sqrt{e}$$

لاي س \exists س ، حيث س هو مجال الاقتران . ناقش سلوك ق (س) عندما س $\leftarrow \infty$ ،
وعندما س $\leftarrow 0$. ارسم مخطط ص = ق (س) .

١١ - (١) عرف ق : $R \leftarrow R$ بـ ق (س) = سا - (س^{-٢}) لأي س $\neq 0$ وق (٠) = ٠ . اثبت
ان ق (٠) = ٠ لا ي ن . ومنه اثبت ان متسلسلة تايلور لـ ق حول س = ٠ تكون تقاربية
ولكن لا تتقارب الى ق (س) الا عند س = ٠
(٢) اذا كان ع عددا تخيليا صرفا فاثبت ان سا - (س^{-٢}) $\leftarrow \infty$ عندما س $\leftarrow \infty$. قارن مع
الجزء (١) من هذا السؤال .

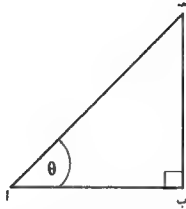
١٢ - اكتب أن = ن^١ لكل ن $\in N$. استخدم نتيجة السؤال ٧ لتثبت ان $\frac{1}{n^{100}}$

$\leftarrow 0$ (ن $\leftarrow \infty$) . استنتج ان

$$\frac{1}{n} \leftarrow \frac{1}{0} \text{ (ن } \leftarrow \infty \text{) .}$$

٢ . الاقترانات المثلثية

يصادف الطالب عند دراسة الهندسة والمثلثات كلمات زاوية ، وجيب الزاوية ، وجيب تمام
الزاوية وما شابه . (انظر الشكل)



$$\frac{\text{بج}}{\text{اج}} = \sin \theta$$

$$\frac{\text{با}}{\text{اج}} = \cos \theta$$

لا تعرف الزاوية عادة في المراحل الاولى من الدراسة ، ويكتفى بأن يكون عند الطالب مفهوم بدائي غامض لطبيعتها . ويتم تعريف الجيب وجيب التمام باستخدام مثلث قائم الزاوية ، ونظرية فيثاغورس ، ونحصل على نتائج مثل

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta$$

لاحظ اننا استخدمنا الرموز المتعارف عليها جـ للجيب ، وجـا لجيب التمام وكتبنا $\sin^2 \theta$ لتعني $(\sin \theta)^2$.

ولا بد من حساب نهايات $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$. حينئذٍ عندما نحتاج الى إيجاد مشتقة جـاس .

ولكي نحسب هذه النهاية (التي تساوي ١) لا بد من استخدام الاشكال وافكار بدئية عن مساحات قطاعات الدائرة .

ومع ان الطريقة الاولى لدراسة الاقترانات المثلثية غير مقبولة من وجهة رياضية بحتة ، الا انها ، اي الطريقة ، تعطي معلومات هامة عن خواص هذه الاقترانات التي هي مفيدة كطرق وكتطبيقات .

بعد هذا النقد صار لازماً علينا ان نقدم عرضاً دقيقاً يوصل في النهاية الى الافكار الهندسية الأولية .

يمكننا البدء ، كما فعلنا عند دراسة الاقتران الاسمي ، بان نأتي بالاقترانات المثلثية عن طريق حل معادلات تفاضلية تظهر بصورة طبيعية ، مثل $ق(س) = -ق(س)$ ، وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة ، (حيث $ق(س)$ تمثل نقطة موضع الجسم على خط مستقيم بعد زمن $س$ ، وثابت التناسب) . ونكمل هذه الطريقة تماماً كما في البند ١ ، ولكن سنترك هذا كتمرين . ولكننا نفضل ان نحلل متسلسلة القوى لـ $سا(ت ع)$ ونحصل على العلاقة المشهورة

$$سا(ت ع) = جتا ع + ت جاع + \dots + (٧)$$

التي كان العالم السويسري اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) اول من اكتشفها . من وجهة نظرنا فان هذه العلاقة ، عندما نحصل عليها ، ستعرف الجيب وجيب التمام (لأي عدد مركب $ع$) على انها متسلسلات قوى . كما انها تبين ان هناك صلة (غير متوقعة) بين جاس ، جتاس الحقيقيتين و $سا(ت س)$.

فمن (٤) في البند ١ ، لأي عدد مركب $ع$

$$\begin{aligned} سا(ت ع) &= ١ + ت ع + \frac{١}{١٢} (ت ع)^2 + \frac{١}{١٣} (ت ع)^3 + \dots \\ &= (١ + ت ع) + \left(\frac{١}{١٢} (ت ع)^2 - \frac{١}{١٣} (ت ع)^3 \right) + \dots \\ &= (١ - \frac{١}{١٢} (ت ع)^2 + \frac{١}{١٣} (ت ع)^3 - \dots) + (ت ع - \frac{١}{١٣} (ت ع)^3 + \frac{١}{١٥} (ت ع)^5 - \dots) \end{aligned}$$

لاحظ اننا استخدمنا بعض الحقائق عن المتسلسلات التقاربية اعلاه (وضع اقواس في متسلسلة تقاربية ، وازدادة الحدود حداً حداً لمتسلسلتين تقاربيتين ، وضرب المتسلسلة حداً حداً بعدد) .

الآن نعرف ما يلي لأي عدد $ع \in \mathbb{R}$.

$$(٨) \quad \dots + \frac{١}{١٢} (ت ع)^2 - \frac{١}{١٣} (ت ع)^3 + \frac{١}{١٤} (ت ع)^4 - \dots = جتا ع - ١$$

$$(٩) \quad \dots + \frac{٤}{١٧} - \frac{٤}{١٥} + \frac{٢}{١٣} - \dots = \text{جاء ع}$$

وهاتان التسلسلتان تقاربتان لكل $\epsilon \in \mathbb{R}$ حسب اختبار النسبة . وهذا نكون حصلنا على معادلة أولر (٧).

ويتبع مباشرة من (٨) و (٩) ان جتا (-ع) = جتا ع ، اي ان جتا هو اقتران زوجي ، وان جا (-ع) = -جاء ع ، اي ان جا هو اقتران فردي . اذن من (٧) نحصل على سا (-ت ع) = جتا ع - ت جاء ع ، ولهذا فان

$$(١٠) \quad \dots - \frac{٤^٢ \text{ع} + ٤^٢ \text{ع}}{٧} = \text{جتا ع}$$

(١١) $\dots - \frac{٤^٢ \text{ع} - ٤^٢ \text{ع}}{٢} = \text{جاء ع}$ وتبين المعادلتان (١٠) و (١١) ان جاء ع ، جتا ع معرفان بدلالة الاقتران الاسي فقط . وبما ان نظرية الجمع سا (ع + ل) = سا (ع) سا (ل) صحيحة وباستخدام (١٠) ، (١١) فاننا نحصل على

$$\text{جتا}^٢ \text{ع} + \text{جاء}^٢ \text{ع} = ١$$

لاي عدد مركب ع . وبطريقة مشابهة ، وباستخدام خواص الاقتران الاسي فقط ، يمكن استنتاج نظريات الجمع لـ جا (ع + ل) ، جتا (ع + ل) ، الخ ، التي ذكرناها في بداية البند . لاحظ ان معالجتنا لـ جا وجتا لا تستخدم فكرة الزاوية . واستطعنا بمجهود بسيط ان نعامل جا ، جتا كاقترانات مركبة (والفضل لأولر).

ويمكن استنتاج جميع خواص الاقترانات المثلثية العادية بطريقة مباشرة . ومعظم هذه الخواص معروف من وجهة نظر هندسية . وسنذكر هذه الخواص للفائدة :

النظرية ٤ .

لاي ع ، ل $\in \mathbb{R}$

$$(١) \text{ جا}^2 \text{ع} + \text{جتا}^2 \text{ع} = ١$$

$$(٢) \text{ جا} (\text{ع} + \text{ل}) = \text{جاع} \text{جتا} \text{ل} + \text{جتا} \text{ع} \text{جال}$$

$$(٣) \text{ جتا} (\text{ع} + \text{ل}) = \text{جتا} \text{ع} \text{جتا} \text{ل} - \text{جاع} \text{جال}$$

$$(٤) \frac{دج}{دع} \text{جاع} = \text{جتا} \text{ع} , \frac{دج}{دع} \text{جتا} \text{ع} = -\text{جاع}$$

$$(٥) \text{ يوجد اصغر عدد موجب ، يرمز له بـ } \frac{\pi}{4} , \text{ حيث ان جتا } \frac{\pi}{4} = ٠$$

$$(٦) \text{ جتا} (\text{ع} + \pi/2) = \text{جتا} \text{ع} ; \text{ جا} (\text{ع} + \pi/2) = \text{جاع} , \text{ سا} (\text{ع} + \pi/2) = \text{سا} (\text{ع}) .$$

البرهان .

نتج (١) - (٣) من نظرية الجمع للاقتران الاسي فعلى سبيل المثال اذا كتبنا الطرف الايسر من (٢) بدلالة θ ، $\theta = \pi/4$ نحصل على الصورة الاسية لـ $\text{جا} (\text{ع} + \text{ل})$ بعد اجراء بعض الاختصارات .

ونحصل على (٤) بمفاضلة حدود المتسلسلتين (٨) و (٩) ، لان كلا من المتسلسلتين ذات تقارب مطلق لكل ع .

سنثبت الآن (٥) : لنعتبر $\text{ع} = \text{س}$ عددا حقيقيا . فمن (٨) نحصل على $\text{جتا} (٠) = ١$. وبما ان جتا قابل للتفاضل على R فانه متصل على R . فاذا بينا انه يوجد $\text{س} < ٠$ بحيث ان $\text{جتا} \text{س} > ٠$ ، فان جتا سوف يأخذ القيمة ٠ في الفترة $(٠ , \text{س})$ (من نظرية القيم الوسطى للاقتران المتصلة) . تبين المناقشة التالية قوة نظرية تايلور .

لاي $\text{س} < ٠$ ،

$$\text{جتا} \text{س} = ١ - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \text{جتا}^3 (\text{س})$$

$$\geq ١ - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} ,$$

لان جتا^٢ أ = ١ - جا^٢ أ ≥ ١ . اذن جتا^٢ ≥ ١ - $\frac{٢}{٣}$ + ١ > ٠ . اذن يوجد حـ و (٢ ، ٠)

بحيث ان جتا حـ = ٠ لاثبات ان حـ هي اصغر صفر لـ جتا ، خذ ٠ > و > حـ . سوف نثبت ان جتا و < ٠ . اذا كان س و (٢ ، ٠) فان

$$\text{جا س} = \text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٣} \text{ جا ب } (٠ > \text{ب} > \text{س})$$

$$(١٢) \quad \dots \dots \dots ٠ < \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{٣} = \frac{\text{س}^٢}{٣} - \text{س} \leq$$

اذن جتا و = جتا حـ - (و-حـ) جا ٠ .

= - (و-حـ) جا ٠ حيث و > ٠ > حـ . من (١٢) نحصل على حـ ٠ < ٠ . اذن جتا و < ٠ .

ومن المتعارف عليه كتابة أصغر صفر لـ جتا على صورة $\frac{\pi}{٣}$ ، حيث $\pi = ٣,١٤١٥٩٠٠$ هو العدد اللانسي المشهور الذي يظهر عند دراسة الدائرة هندسيا .
اخيرا ، ثبت (٦) ، التي تتحدث عن دورية الاقترانات المثلثية .

فبما ان جتا $\frac{\pi}{٣} = ٠$ و جا $\frac{\pi}{٣} < ٠$ فمن (١٢) فان (١) تعطي جا $\frac{\pi}{٣} = ١$.

ومن (٣) يكفي ان نثبت ان جا $\frac{\pi}{٢} = ٠$ ، جتا $\frac{\pi}{٢} = ١$.

من (٢) نحصل على جا $\frac{\pi}{٢} = \pi$ جا π جتا $\frac{\pi}{٢} = ٤$ جا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٣} - \pi$ جتا $\frac{\pi}{٣} = ٠$ ،

ومن (٣) ، جتا $\pi = \pi$ جتا $\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣}$ جا^٢ $\frac{\pi}{٣} = ١ - \pi$ ، جتا $\frac{\pi}{٢} = \pi$ جتا^٢ $\frac{\pi}{٢} = ١ - \pi$. وهذا .

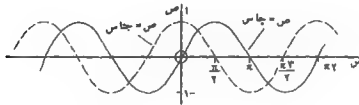
يثبت جتا (ع + $\frac{\pi}{٢}$) = جتا ع . وبالمثل ، فان (٢) تعطي جا (ع + $\frac{\pi}{٢}$) = جا ع .

واخيرا ، من معادلة اويلر ونظرية الجمع والنتائج التي حصلنا عليها نستنتج ان

$$\text{سا (ع + } \pi \text{ ت)} = \text{سا ع} \cdot \text{سا } (\pi \text{ ت)}$$

$$= \text{ساع} (\text{جتا } \pi \cdot 2 + \text{ت جا } \pi \cdot 2) = \text{سا} (ع).$$

وباستخدام المعلومات التي حصلنا عليها في النظرية ٤ وبرهانها فان بالامكان رسم
مخطط ص = جاس و ص = جتاس حيث ص عدد حقيقي .



المثال ٤ .

لاي ص عدد حقيقي ، ص < ٠ ، فان

$$(١) \text{ جاس } > \text{ص}$$

$$(٢) \text{ جتاس } < ١ - \frac{\text{ص}^2}{٢}$$

$$(٣) | \text{ت} - \text{ص} | > ١$$

هذه المتباينات مفيدة . والمتباينة الاولى واضحة من الرسم لان ص = ص هوماس لـ ص

= جاس عند ص = ٠ . ويمكن اثبات ذلك تحليليا باستخدام نظرية القيمة المتوسطة .

لاثبات (١) نكتب ق (س) = س - جاس لكل س ≤ ٠ . فمن نظرية القيمة المتوسطة

فان ق (س) = س في ق (حـ) = س (١ - جتا حـ) حيث ٠ < حـ < س . فاذا كان ٠ > س ≥

π٢ فان ١ - جتا حـ < ٠ ، ومنه ق (س) < ٠ . واذا كان س < π٢ فان س - جاس < π٢

- جاس ≤ جاس . وهذا يثبت (١) . وبطريقة مشابهة فان

$$\text{هـ} (س) = ١ - \frac{\text{ص}^2}{٢} - \text{جتاس} = \text{س} (\text{جاو} - ١) ، حيث ٠ < و < س ، اذن هـ (س)$$

بحذف هـ (س) من هاتين المعادلتين واستخدام جا^٢ (حـس) + جتا^٢ (حـس) = ١ نحصل على

$$ق (س) = ق (٠) جتا (حـس) + هـ (٠) جا (حـس).$$

$$\text{المعادلة ع (هـ)} = \theta^{\text{ت}} \theta^{\text{ج}} = \theta^{\text{ج}} \theta^{\text{ت}} + \theta^{\text{ج}} \theta^{\text{ج}}$$

إذا كان θ عددا حقيقيا فإن

$$|ع (\theta)| = \sqrt{\theta^{\text{ج}} + \theta^{\text{ج}}} = ١. \text{ إذن إذا كانت د } = \{ع | ع| = ١\} \text{ دائرة}$$

الوحدة في المستوى المركب، فإن الاقتران ع المعروف اعلاه هو اقتران يحقق ع : R ← د. وبما

ان ع (٠) = ع (π٢) فإن الاقتران ليس واحدا لواحد. ولكن ع : [٠, π٢) ← د هو واحد

لواحد. والاقتران الأخير اقتران شامل ايضا، لانه يمكن حل المعادلة ع = جتا θ + ت جا θ

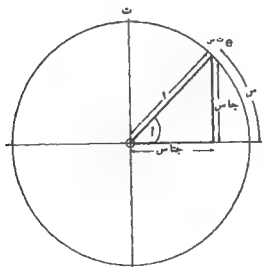
عندما |ع| = ١. لايجاد قيم θ ∈ [٠, π٢) بمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية.

وهناك ترابط واحد لواحد بين نقاط [٠, π٢) ونقاط دوائرنا هندسيا، فانه بازدياد

θ من ٠ الى π٢ فإن النقطة ع (θ) تتحرك على الدائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة من ١

عبرت، ١- وعوداً الى ١ ثانية. على سبيل المثال ٠ > س > $\frac{\pi}{٢}$ تعطي ان θ تـس كما هو

مبين بالرسم.

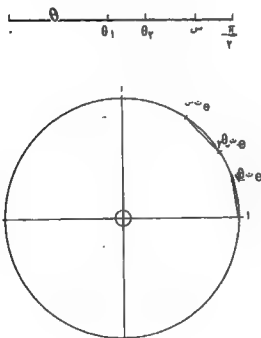


لنستعمل افكارا هندسية بدائية، ولترمز بـ θ الى «الزاوية» بين الخط الواصل بين نقطة الاصل و θ و θ والخط الواصل بين نقطة الاصل وجتاس. اذن طول وتر المثلث القائم الزاوية هو θ ونحصل على $\theta = \theta$ ، جتا $\theta = \theta$. ان تساوي θ ، θ س يسهل الامور ولكنه غير دقيق منطقيا. ولكن ليس من الصعب تمثيل العدد θ على الرسم. سوف نبين ان θ هو طول قوس دائرة الوحدة الذي يصل من θ الى θ كما هو مبين بالشكل السابق.

بقي ان نعطي تعريفا رياضيا معقولا ودقيقا للقوس وطوله. ويمكن اعطاء هذا التعريف للاقواس غير الدائرية ولكن لن نفعل ذلك. وسنركز اهتمامنا على مسألة الاقواس الدائرية.

اولا سنأخذ تجزئة θ للفترة $[0, 1]$. بهذا نعني ان θ مجموعة منتهية من نقاط θ ، θ ، θ ، θ ، θ في $[0, 1]$ بحيث ان $\theta = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = 1$. هذه التجزئة تولد مجموعة نقاط θ ، θ ، θ ، θ ، θ على دائرة الوحدة.

فعلى سبيل المثال:



اول تقرب لطول القوس من ١ الى θ تس هو هندسيا مجموع اطوال المستقيبات التي تصل

النقاط كما هو مبين، اي ان

$$\left| 1 - \theta \right| + \left| \theta - \theta^2 \right| + \left| \theta^2 - \theta^3 \right| + \dots + \left| \theta^{n-1} - \theta^n \right|$$

ويأخذ نقاط أكثر في التجزئة فاننا نأمل ان نقرب أكثر وأكثر (هندسيا) من طول القوس.

وكي نكون دقيقين، فاننا نعرف طول القوس ط (س) على دائرة الوحدة من ١ الى θ تس

على انه

$$\text{ط (س)} = \sum_{j=1}^{\infty} \text{ص.ح.ج} \theta^j - \theta^{j+1}$$

حيث نأخذ اصغر حاصر علوي لجميع التجزئات على $[\theta, 1]$. وسوف نثبت ان ط (س) =

س، اي اننا سنبين ان

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j - \theta^{j+1} \geq \text{س لكل ج} \dots \dots \dots (13)$$

وانه لكل $\theta < 1$ يوجد تجزئة ج بحيث ان

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j - \theta^{j+1} < \text{س} - \theta \dots \dots \dots (14)$$

لايات (١٣) افرض ان ج = $\{\theta, \theta, \dots, \theta, \theta\}$ تجزئة على $[\theta, 1]$

اذن المجموع في (١٣) يساوي

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \theta^j - \theta^{j+1} \right| = \left| \theta - \theta^2 + \theta^2 - \theta^3 + \dots + \theta^{n-1} - \theta^n \right| \\ & = \left| \theta - \theta^n \right| \\ & = \theta (1 - \theta^{n-1}) > \theta \end{aligned}$$

ذلك لأن $\left| \theta - \theta^n \right| = \left| \theta (1 - \theta^{n-1}) \right| > \theta$ لأي ص $\theta < 1$ من مثال ٤ (٣).

افرض ان $0 < \theta$. خذ اي تجزئة ج_n على $[0, \pi]$ من ن من الأجزاء المتساوية :

$$ج_n = \{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi\}$$

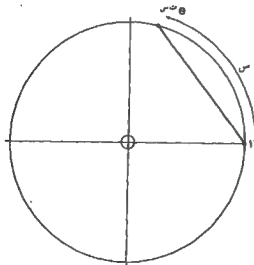
فمجموع المسافات بالنسبة لـ ج_n هو

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| &= |1 - e^{i\frac{\pi}{n}}| + |e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}}| + \dots + |e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} - e^{i\pi}| \\ &= |1 - e^{i\frac{\pi}{n}}| + |e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}}| + \dots + |e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} - e^{i\pi}| \\ &= |1 - e^{i\frac{\pi}{n}}| + |e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}}| + \dots + |e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} - e^{i\pi}| \end{aligned}$$

← س (ن ← ∞).

ويأخذ ن كبيراً، نحصل على $\sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| < \pi$ - وما يثبت (١٤).

يمكن الآن اعطاء تفسير هندسي للمتبينة $|1 - e^{i\theta}|$ س لاي $0 < \theta$ التي استخدمناها في البرهان، فما تعنيه هو ان المسافة من ١ الى $e^{i\theta}$ على القوس اطول من المسافة من ١ الى $e^{i\theta}$ على الخط المستقيم.



وطبيعة الاقترانات المثلثية التذبذبية تعطينا مثالا عن اقتران حقيقي قابل للتفاضل على فترة مفتوحة، وله عدد لا نهائي من القيم العظمى والصغرى المحلية.

المثال ٦.

عرف ق: $(0, 1) \leftarrow R$ بق (س) = $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$. فمجموعة اصفارق هي $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots\right\}$. ونحصل على قيم عظمى مطلقة لقيم س عندما ق(س) = ١ أي $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots\right\}$. والقيم الصغرى المطلقة عند $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots\right\}$. ومن السهل ان نرى ان القيم المطلقة هي ايضا قيم محلية. وعلى القاريء ان يرسم مخطط ص = ق(س)، وهو يتكون من متسلسلة من الامواج عرض كل منها ٢ وتقترب بعضها من بعض قرب س = ٠. ومن الواضح ان ق(س) لا تقترب من أي نهاية عندما س $\rightarrow ٠$. ولا ثبات ذلك افترض ان امكن ان ق(س) $\rightarrow م$ عندما س $\rightarrow ٠$. اذن |ق(س) - م| $> \frac{1}{٤}$ عندما يكون $٠ < س < \delta$ و $١ < \delta$ لعددا $\delta < ٠$. اذن |ق(س) - ق(ص)| > ١ عندما $٠ < س < \delta$ و $١ < \delta$. لئلاخذ عددا صحيحا موجبا بحيث ان $\frac{1}{٤} > \delta$. خذ س = $\frac{1}{١+٤\delta}$ ، ص = $\frac{1}{٤}$. اذن $٠ < س < \delta$ و $١ < \delta$. لهذا فان |ق(س) - ق(ص)| > ١ . ولكن ق(س) = ١ - ق(ص) = ١ مما يعطي |ق(س) - ق(ص)| = ٢، وهذا تناقض.

تمارين ٩ - ٢

(نجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - افرض انه يوجد اقتران ق : $R \leftarrow R$ بحيث ان ق موجود على R وق (س) = - ق (س) ،

ق (٠) = ١ ، ق (٠) = ٠ . اثبت ان ق يجب ان يكون على صورة

$$ق (س) = ١ - \frac{س^٢}{١٢} + \frac{س^٤}{١٤} - \dots ،$$

وان المتسلسلة تقاربية لكل س .

٢ - (١) استخدم متسلسلة جاع لاثبات ان

$$\frac{حاج}{ع} \leftarrow ١ \leftarrow (ع \leftarrow ٠) .$$

(٢) اثبت نفس النتيجة باستخدام $\frac{د}{دع} جاع = جتا ع$.

٣ - على فرض ان س ، ص ، ل اعداد حقيقية قيمتها المطلقة اقل من $١٠^{-٣}$. فاذا كان جتا ل

$$= جتا س جتا ص فاثبت ان ل = س^٢ + ص^٢ + و ، حيث | و | > ١٠^{-١٢} .$$

٤ - اثبت انه لأي عددين مركبين ع ، ل

$$(١) جاع + جا ل = ٢ جا \frac{ل+ع}{٢} جتا \frac{ل-ع}{٢} ،$$

$$(٢) جتا ع + جتا ل = ٢ جتا \frac{ل+ع}{٢} جتا \frac{ل-ع}{٢} ،$$

$$(٣) جا (ع - \frac{\pi}{٢}) = جتا ع ،$$

$$(٤) جا٣ ع = ٣ جاع - ٤ جا^٣ ع ،$$

$$(٥) جا \frac{\pi}{٤} = جتا \frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}} ، جا \frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، جتا \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} ،$$

$$(٦) جتا٢ ع = ٢ جتا ع - ١$$

٥- (١) أثبت أنه لأي عدد حقيقي s فإن $\text{Jas} = 0$ إذا وفقط إذا كان $s = \pi$ لعدد صحيح n .

(٢) إذا كان $s \in R$ فاثبت أن $\text{Jtas} = 0$ إذا وفقط إذا كان $s = (1 + \sqrt{2}) \frac{\pi}{4}$

لعدد صحيح ما n .

(٣) افرض أن $e \in \mathbb{C}$ استخدم (١) و (٢) لاثبات أن $e = 1$ إذا وفقط إذا كان $e =$

$\frac{\pi}{4}$ n ث لعدد صحيح ما، n . (اكتب $e = \text{مس} + \text{تص}$ واستخدم $|e| = 1$).

(٤) على فرض أن $e \in \mathbb{C}$ ، اثبت أن $\text{Jas} = 0$ إذا وفقط إذا كان $e = \pi n$. وأن $\text{Jtas} =$

$= 0$ إذا وفقط إذا كان $e = (1 + \sqrt{2}) \frac{\pi}{4}$.

٦- اثبت أن $\text{Jas}^2 \geq \text{س}^2$ لكل $s \in R$ وضح برسم مخطط $\text{ص} = \text{Jas}^2$ مخطط $\text{ص} =$ س^2 .

٧- عرف $q: [0, \frac{\pi}{4}] \leftarrow R$ بق $q(0) = 1$ ، $q(\text{س}) = \frac{\text{Jas}}{\text{س}}$ لـ $0 < \text{س} \leq$

$\frac{\pi}{4}$. اثبت أن q قابل للتفاضل على مجاله (يجب معالجة $\text{س} = 0$ على حدة). اثبت أن q

$(\text{س}) > 0$ لـ $0 < \text{س} \leq \frac{\pi}{4}$ واستنتج المتباينة التالية المعروفة باسم متباينة جوردان:

$$\frac{\text{س}^2}{\pi} \geq \text{Jas} \geq \text{س} \text{ لـ } 0 \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{4}.$$

٨- عرف $q: [0, 1] \leftarrow R$ بق $q(0) = 0$ ، $q(\text{س}) = \text{س}$ جـ $\frac{\pi}{\text{س}}$ لـ $0 < \text{س} \leq 1$.

اثبت أن q متصل على $[0, 1]$ قابل للتفاضل على $(0, 1]$ ولكن غير قابل للتفاضل عند

$\text{س} = 0$. جد القيم المحلية لـ q وارسم مخطط $\text{ص} = q(\text{س})$.

٩- اثبت بالاستقراء أن $|\text{Jas}(n)| \geq |\text{س}|$ جـ $|\text{كل ن}| \in N$ لكل $\text{س} \in R$.

١٠- اثبت أنه لكل $\text{س} \in R$ ، $|\text{Jas}| \geq 1$ ، $|\text{Jtas}| \geq 1$. هل صحيح أن $|\text{Jas}|$

≥ 1 لكل $e \in \mathbb{C}$ ؟

١١ - افرض ان ع عدد مركب . اثبت ان المتتالية (جا (ن ع)) تكون تقاربية اذا فقط اذا كان ع
 π م = حيث م عدد صحيح . [عند برهنة الشرط الضروري الفرض ان جا (ن ع) \rightarrow م (ن
 $\rightarrow \infty$) ولكن ع $\neq \pi$ م] . { ادوس جا ((ن + ٢) ع) - جا ن ع = ٢ جا ((ن + ١) ع) جا ع
 واستخدم جتا (٢ ن ع) = ٢ جتا^٢ (ن ع) - ١ } .

١٢ - بدأ جسيم بالحركة من نقطة م ، ويتحرك على خط مستقيم يمر في م بحيث أن التسارع
 يساوي بعد الجسيم عند نقطة م واتجاه التسارع الى م .
 فاذا كانت السرعة الابتدائية ع . ، فاثبت ان المسافة المقطوعة بعد زمن ن هي ع جا ن .
 صف حركة الجسيم .

١٣ - اكتب هـ (س) = جتاس لأي عدد حقيقي س . افرض ان س هـ عدد حقيقي وعرف
 $\sin_{\pi} = \text{هـ} (س) \text{ لـ } \pi = ٠, ١, ٢, \dots$. اثبت ان المتتالية (س هـ ، س_١ هـ ، ...) تقارب
 نهاية ما ، بين الصفر و١ .

٣ . اقترانات ابتدائية اخرى

هناك اقترانات اخرى مفيدة تعرف بواسطة الاقتران الاسي والجيب وجيب التمام ، ونستخلص
 خواصها من النتائج المعروفة للاقترانات الابتدائية الاسامية . وسوف نذكر هذه الاقترانات
 وخواصها بقصد الرجوع اليها عند الحاجة وستترك البراهين كتمرين سهل .

وهي ظا ، ظتا ، قا ، قتا ، جتا ، جاز ، ظاز ،

فلاي ع (عادة مركب) ، حيث يكون المقام لا يساوي صفرا ، فاننا نعرف

$$\text{ظاع} = \frac{\text{جاع}}{\text{جاع}} ، \text{ظتاع} = \frac{١}{\text{ظاع}} ، \text{قاع} = \frac{١}{\text{جتاع}} ، \text{قتاع} = \frac{١}{\text{جاع}} .$$

ولجميع قيم ع ، نعرف

$$\frac{t\theta - \epsilon\theta}{\gamma} = (\text{جاز } \epsilon) , \quad \frac{t\theta + \epsilon\theta}{\gamma} = (\text{جتاز } \epsilon)$$

وعندما يكون المقام لا يساوي صفرا نعرف

$$\text{ظاز } (\epsilon) = \frac{\text{جتاز } (\epsilon)}{\text{جتاز } (\epsilon)} , \quad \text{ظتاز } (\epsilon) = \frac{1}{\text{ظاز } (\epsilon)} , \quad \text{قاز } (\epsilon) = \frac{1}{\text{جتاز } (\epsilon)} , \quad \text{قتاز } (\epsilon) = \frac{1}{\text{جاز } (\epsilon)} .$$

تسمى الاقترانات جتاز، جاز، الخ اقترانات زائدية. لهذا فان جتاز(ع) يسمى جيب التمام الزائدي لـ ع (ومن هنا اخذ الرمز جتاز = جتا زائدي). وسبب استخدام كلمة زائدي ان الجزء الايمن من القطع الزائد $s^2 - c^2 = 1$ يعطى بالمعادلات الوسيطة $s = \text{جتاز } (u)$ ، $c = \text{جاز } (u)$ حيث و حقيقية. ونعرف بالطبع ان المعادلتين $s = \text{جا } (u)$ ، $c = \text{جتا } (u)$ ، حيث وعدد حقيقي، تعطيان معادلة الدائرة $s^2 + c^2 = 1$. لهذا فاننا احيانا نسمي الاقترانات المثلثية اقترانات دائرية.

وجميع الاقترانات المذكورة اعلاه قابلة للتفاضل في مجال تعريفها. وسوف نضع جدولا للنتائج ونبرهن النتيجة الاولى.

المثال ٧.

عرف ق (ع) = ظاع. اذن ق معرف على جميع الاعداد المركبة ع، الا عند كون جتاع = 0، اي عدا ع = $(1 + 2n)\frac{\pi}{4}$ ، $n = 1, \pm 1, \pm 2, \dots$. عدا هذه القيم فان ق

يكون كسرا بسطه ومقامه اقترانان قابلان للتفاضل، واذن

$$\text{ق}' (\epsilon) = \frac{\text{جتاع جتاع} - \text{جاع} (-\text{جاع})}{\text{جتاع}^2} = \frac{1}{\text{جتاع}^2} = \text{قا}^2 \epsilon .$$

وبصورة خاصة اذا كان $s \neq (1 + 2n)\frac{\pi}{4}$ وكان s عددا حقيقيا فان ق' (س) < 0. لهذا فان ظاس (كاقتران حقيقي) هو متزايد فعلا على الفترات المفتوحة $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ،

$$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) , (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}) , \dots$$

الاقتران	المشتقة	المجال
ظاع	قا ^١ ع	$\frac{\pi}{\gamma} \text{ع} \neq (١ + ٢٧)$
ظناع	- قنا ^٢ ع	$\pi \text{ع} \neq$
قاع	قاع ظاع	$\frac{\pi}{\gamma} \text{ع} \neq (١ + ٢٧)$
قناع	- قناع ظناع	$\pi \text{ع} \neq$
جتاز(ع)	جاز(ع)	$\bar{\mathbb{C}}$
جاز(ع)	جتاز(ع)	\mathbb{C}
ظاز(ع)	قا ^٢ ع	$\frac{\pi}{\gamma} \text{ع} \neq (١ + ٢٧)$
ظناع(ع)	- قنا ^٢ ع	$\pi \text{ع} \neq$
قاز(ع)	قناز(ع) ظاز(ع)	$\frac{\pi}{\gamma} \text{ع} \neq (١ + ٢٧)$
قناز(ع)	- قنا(ع) ظناع(ع)	$\pi \text{ع} \neq$

من (١٠) و (١١) نرى ان

جتا (ت ع) = جتناز (ع) ، جا (ت ع) = ت جاز (ع) (١٥)

لهذا فان

جتناز^١ (ع) - جاز^٢ (ع) = ١ .

كذلك ، من تعريف جاز وجتناز نحصل على

جتناز (ع) = ١ + $\frac{\text{ع}^1}{12} + \frac{\text{ع}^1}{14} + \dots$ ، جاز (ع) = $\text{ع} + \frac{\text{ع}^2}{13} + \frac{\text{ع}^2}{15} + \dots$
وباستخدام (١٥) يمكن الحصول على نظرية الجمع لهذه الاقترانات .

على سبيل المثال :

جتناز (ع + ل) = جتا (ت ع + ت ل)

= جتا (ت ع) جتا (ت ل) - جا (ت ع) جا (ت ل)

= جتناز (ع) جتناز (ل) - ت^٢ جاز (ع) جاز (ل)

= -جتناز (ع) جتناز (ل) + جاز (ع) جاز (ل) .

لاحظ ان ت^٢ = ١ - تجعل صيغة جتناز (ع + ل) تختلف قليلا عن صيغة جتا (ع + ل) .

تمارين ٩ - ٣

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت نتائج الجدول السابق -

لاي عدد حقيقي s ، ارسم مخططات $s = \text{ظاس}$ ، $s = \text{ظاز}$ (س).

٢ - مع أي من الاعداد الحقيقية s تكون الاقتارات التالية معرفة؟

جد المشتقة عندما تكون موجودة

$$(١) \text{قا}^s - \text{ظا}^s$$

$$(٢) \text{جاز}^s \text{جتاز}^s$$

$$(٣) \text{جا}^s \text{ز}^s (س) + \text{جتاز}^s (س)$$

$$(٤) \text{جا} (س)$$

$$(٥) \text{سا} (\text{جا} (س))$$

$$(٦) [\text{جاز} (س)]^{\frac{1}{3}}$$

$$(٧) s \text{ جا}^s (س)$$

٣ - (١) اثبت ان جتاز (س) ≤ ١ لكل $s \in R$ ، وان جتاز متزايد فعلا لكل $s \leq ٠$.

اثبت كذلك ان جتاز (س) $\leftarrow \infty$ عندما $s \leftarrow \infty$. ارسم مخطط $s = \text{جتاز} (س)$.

$$(٢) \text{اثبت ان جتاز} (ع) = ٠ \text{ اذا وفقط اذا كان } ع = (١ + ن٢) \frac{\text{الكات}}{٢}$$

٤ - اكتب $s \equiv \{ (س ، ص) \mid س ، ص \in R ، ١ \leq s ، ١ - ص^٢ = ١ \}$. اذن

$s \equiv$ هو الجزء الايمن من القطع الزائد $s^٢ - ص^٢ = ١$. ارسم $s \equiv$ في مستوى $(س ، ص)$.

عرّف $ق : R \leftarrow s \equiv \text{برق} (و) = (\text{جتاز} (و) ، \text{جاز} (و))$. اثبت ان $ق$ هو اقتران تقابل .

٥ - افرض ان $ق : R \leftarrow R$ بحيث ان $ق$ موجود على R . اثبت ان $ق (س) = ق (س)$ اذا وفقط اذا كان ١ .

ق (س) = أ اجتاز (س) + ب جاز (س)
 حيث أ = ق (٠) ، ب = ق (٠) .
 ٦ - أثبت بوضع تحديدات على ع ، ل ان

$$\text{ظا (ع + ل)} = \frac{\text{ظاع} + \text{ظال}}{١ - \text{ظاع ظال}}$$

٧ - افرض ان أ ، ن اعداد حقيقية ثابتة وان ق (س) = أ جاس + ب جتاس . جد القيم العظمى والصغرى لـ ق على R .
 ٨ - افرض ان أ ، س_١ ، س_٢ ، ... ، س_n ∈ R وان س_١^٢ + س_٢^٢ + ... + س_n^٢ = ١ . أثبت ان
 (جتاز (أ س_١)) (جتاز (أ س_٢)) ... (جتاز (أ س_n)) ≥ سا (أ) .

٤ . معكوسات الاقترانات الابتدائية والقوى العامة

هناك قاعدة واحدة مشتركة لإيجاد معكوسات الاقترانات الابتدائية . لهذا فاننا سنعالج بالتفصيل معكوسات الاقترانات : الأسى ، والجيب ، وجيب التمام فقط .
 القاعدة هي ان نجد مجالاً مناسباً يكون عنده الاقتران ق اقتران تقابل . نعرف من نتيجة الفصل الاول ، البند ٢ ان ق^{-١} يكون موجوداً ويكون اقتران تقابل ايضا .
 ان معالجة معكوسات الاقترانات الابتدائية المركبة اصعب نوعاً من معالجة معكوسات الاقترانات الاولى الحقيقية . ولتبسيط الامور فسوف ندرس هنا الاقترانات الحقيقية فقط . لكن هناك بعض المعلومات عن اللوغريثم المركب في التمارين .
 سوف ندرس اولاً معكوس الاقتران الأسى الحقيقي ويسمى الاقتران اللوغريتمي (لاسباب تاريخية) وهناك نبذة تاريخية عن اللوغريثم في نهاية البند ، فليرجع اليها من شاء .

الاقتران اللوغريثمي

نعرف من النظرية ٣، البند ١، من هذا الفصل، أن سا : $R \leftarrow R^+$ هو اقتران تقابل . إذن يوجد اقتران نظير (معكوس الاقتران سا) هو سا^{-١} : $R \leftarrow R^+$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة ، فإن هذا الاقتران يسمى الاقتران اللوغريثمي (الطبيعي) ، وبعبارة أدق : الاقتران اللوغريثمي للأساس e . حيث $e = ٧١٨٠٠٠$ ، ٢ . إذن سوف نكتب لوبلا من سا^{-١} وللتأكيد نسرد المعلومات التالية :

سا : $R \leftarrow R^+$ ، لو : $R \leftarrow R^+$

ص = e^s (س $\in R$ ، ص < ٠) يكافئ س = لو ص (ص < ٠ ، س $\in R$) .
 بما أن $e^١ = ١$ و $e^{-١} = ١/e$ فإن لو ١ = ٠ ، لو $e = ١$. نشدد هنا على أن مجال اللوغاريتم ذي القيم الحقيقية هو R^+ ، لهذا فإن لو (١ + س) مثلاً معرف فقط على قيم س ، بحيث أن ١ + س < ٠ ، أي أن س < -١ .

وقد اكتشف نايبير الخواص التالية للوغريثم

$$(١٦) \quad \text{لو}(أ + ب) = \text{لو} أ + \text{لو} ب \quad (أ > ٠ ، ب > ٠) \dots\dots\dots$$

$$(١٧) \quad \text{لو} \left(\frac{أ}{ب} \right) = \text{لو} أ - \text{لو} ب \quad (أ > ٠ ، ب > ٠) \dots\dots\dots$$

لأثبت (١٦) اكتب ح = لو أ ، د = لو ب . إذن $e^ح = أ$ ، $e^د = ب$ ومن نظرية الجمع للاقتران الأسّي [(٥)، الفصل ٩ ، البند ١] نحصل على $e^{(ح+د)} = أ ب$ ، إذن ح + د = لو (أ ب) وهذه (١٦) . ولأثبت (١٧) اكتب لو أ = لو (أ ب آ^{-١}) ثم استخدم (١٦) والمعادلتان (١٦) ، (١٧) تجعلان اللوغريثمات مفيدة لأنها تحول عمليات ضرب وقسمة الأعداد إلى عمليات أسهل وهي عمليات الجمع والطرح . وقد اخذت عملية حساب جداول اللوغريثمات ، التي كانت الأعمال في الفلك والملاحة بحاجة ماسة لها معظم وقت نايبير وبرجز في السنوات الأولى من القرن السابع عشر . وقد ظهرت جداول نايبير في أيدنبرغ عام ١٦١٤ . وأما جداول برجز ، وقد كانت لوغريثمات للأساس ١٠ ، فظهرت في عام ١٦١٧ . وسوف نذكر

فيا بعد اللوغريثمات لاساس غير e مع ان الفكرة ليست ذات اهمية نظرية.

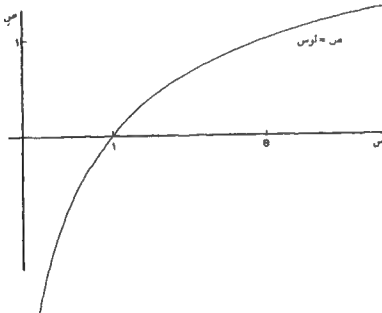
وبما اننا نعرف ان $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ على R فان e^x متزايد فعلا على R ، ويمكن تطبيق النظرية ٥ ، من الفصل ٧ ، البند ١ ، وتنص على ان الاقتران العكسي ، لو ، متزايد فعلا على R^+ . كذلك اذا كان $v = \log u$ ($u > 0$) فان $v = \log u$ و $v' = \frac{1}{u}$.

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{\frac{1}{u}} = u = e^v \text{ ، اي ان}$$

$$\frac{d}{dv} \log u = \frac{1}{v'} = u = e^v \text{ ، لاي } v > 0 .$$

وسوف نبين الآن ان $\log u \rightarrow -\infty$ عندما $u \rightarrow 0^+$ ، وان $\log u \rightarrow \infty$ عندما $u \rightarrow \infty$.
خذ اي عدد حقيقي $h < 0$ ، واكتب $u = e^h$. اذن $u < 1$. تعطي $\log u < 0$.
لو $u = e^h$ ، واذن $\log u \rightarrow -\infty$ عندما $u \rightarrow 0^+$. كذلك اذا كان $u > 1$ ، $\log u > 0$.
لو $u \rightarrow \infty$ ، ومنه $\log u \rightarrow \infty$ عندما $u \rightarrow \infty$.

بجمع المعلومات السابقة يصبح بالامكان رسم غطط $v = \log u$ ، كما في الشكل .



المثال ٨.

إذا كان $s < 0$ فإن $\text{لوس} \geq 1 - s$ ، ونحصل على مساواة إذا فقط إذا كان $s = 1$. وهذا واضح من المخطط. ولإثبات ذلك اكتب $q(s) = 1 - s - \text{لوس} \leq 0$.
 إذن $q(s) = \frac{1-s}{s}$ وهذا يساوي الصفر إذا فقط إذا كان $s = 1$. وعندما يكون $s = 1$ فإن $q(s) = 0$ ، وعندما $s < 1$ فإن $q(s) = (1-s)q'(s)$ ، من نظرية القيمة المتوسطة، حيث $1 > m > s$. إذن $q(s) < 0$ عندما $s < 1$. وبشكل مشابه $q(s) < 0$ عندما $s > 1$. وهذا يثبت المتباينة.

المثال ٩.

لاي $|s| > 1$ نحصل على المتسلسلة

$$\text{لو}(1+s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!}$$

$$= s - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} - \dots \quad (19)$$

أسهل طريقة لإثبات (١٩) هي استخدام النظرية ٢ من الفصل ٨، البند ٢. إن نصف قطر تقارب المتسلسلة (١٩) هو ١ (من اختبار النسبة). لهذا إذا كان $|s| > 1$ أي $1 > |s|$ فإن $s + 1 < 0$ ، ومن ١٨ نحصل على

$$\frac{2}{\text{دس}} = [\text{لو}(1+s) - (s - \frac{s^2}{2}) - (\dots + \frac{s^4}{4!} - \dots)] = \frac{1}{s+1} - (1-s) + s - \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\text{لأن } \frac{1}{s+1} = 1 - s + s^2 - \dots \text{ لـ } |s| > 1 \text{ إذن لو}(1+s) =$$

$$(s - \frac{s^2}{2} + \dots) + \text{ثابت. ويوضع } s = 0 \text{ نحصل على لو}(1+s) = 0 \text{ ومنه (19).}$$

والمتسلسلة (١٩) تقاربية عندما $s = 1$ ، من اختبار ليبنتس، لأنها تصبح $1 - \frac{1}{n!} +$

والنظرية التالية تبين ان \mathcal{A} يتمتع بالخواص المطلوبة للقوى.

النظرية ٥.

افرض ان $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ ، $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$. اذن

$$(1) \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

$$(2) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$(3) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

البرهان.

(١) من التعريف (٢١) ونظرية الجمع للاقتران الاسي نحصل على

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}$$

$$(2) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$(3) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

ولمعظم التعاريف نقاط ضعف، ولا نمشي (٢١) - فهو لا يشمل الحالات $\mathcal{A} = 0$ ، $\mathcal{A} > 0$ ، على فرض التقييد بالاعداد الحقيقية.

فعلى سبيل المثال $(-1)^3 = -1$. ولكن لا نستطيع تطبيق (٢١) لان $\mathcal{A} = (-1)$ غير معرف . ونحن نحتاج لدراسة الاقتران الاسي المركب والاقتران اللوغريتمي المركب لمعالجة جميع الحالات . ولا يشمل اي من التعاريف حالة (صفر) صفر . وهذه سوف نتجنبها ، او نفسرها حسب مقتضى الحال . فعلى سبيل المثال : المتتالية (n^3) حيث نبدأ من الصفر نفسرها على انها $(0, 1, 4, 9, \dots)$. وهناك دافع «معقول» لتعريف (صفر) صفر = 1 ، لان

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

هذا لان $|n| = n$ لو $n = 1$ ، $\sqrt[n]{n} = 1$ ، $0 < n < 1$ ومنه $n < 1$ ومنه $n < 1$.
عندما $n \rightarrow 0$.

وقد جرت العادة على تعريف (صفر) $0 = \emptyset$ ، لأي عدد حقيقي موجب م. وسوف نتبنى هذا التعريف فيما يتبع .

نلاحظ ان (٢١) تعريف مناسب للقوى العامة لان

$$\frac{d}{ds} s^1 = s^1 = s^{1-1} \dots \dots \dots (٢٢)$$

لأي $s > 0$ وأي عدد حقيقي . لهذا فان (٢٢) تعمم نتيجة سابقة حيث كان أ عددا نسبيا .

لأثبت (٢٢) ، حيث نعتبر أ عددا حقيقيا ثابتا ، نأخذ ق : $R \rightarrow R$ ، ق (س) = s^1 ، إذن

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} s^1 &= \frac{d}{ds} s^1 = \frac{d}{ds} s^1 = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

لان

$$\frac{d}{ds} (s^1) = \frac{1}{s} .$$

اللوغريثم لأي أساس .

لقد عرفنا لوص (لوغريثم ص للأساس θ) ويكتب أيضا لوص θ وذلك بأخذ معكوس ص $\theta = s$. وبطريقة مشابهة نعرف لوص (أي لوغريثم ص للأساس أ) بأخذ معكوس ص $\theta = s$. وهذا له معنى إذا كان $0 < \theta \neq 1$. ولاننا نحتاج ان يكون $0 < \theta$ في تعريف θ . فإذا كان $1 = \theta$ فان $\theta = s = 1 = \theta$ لكل س ، لهذا فان الاقتراح ليس واحدا لواحد . وإذا كان $1 < \theta$ فان $1 < \theta$ ، ومنه

$$\frac{d}{ds} s^1 = \frac{d}{ds} s^1 = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} < 0$$

اذن ق ١ : $R \leftarrow R$ * المعرف بق ١ (س) = س^١ هو واحد لواحد. وبما ان $\infty \leftarrow \infty$ عندما
 س $\leftarrow \infty$ و $\infty \leftarrow \infty$ ، عندما س $\leftarrow \infty$ ، فان ق ١ يكون شاملا. اذن ص = ∞ تعطي
 س = لو ص، والاقتران لو : $R \leftarrow R$. تعالج حالة $\infty > \infty$ بنفس الاسلوب.

المثال ١٠.

افرض ان س $\leftarrow \infty$ ، $\infty < \infty$ ، $\infty \neq \infty$. اذن ،
 لوس = (لوس) لو (٢٣)
 لاثبات (٢٣) ، اكتب ح = لوس ، د = لوس . اذن يكون س = ح = ∞ = ∞ دليا .
 وبما ان سا واحد لواحد ، فانه يتتج ان ح = د لو وهو المطلوب .
 لايجاد اللوغريثم للاساس ١٠ (لوغريثمات برجن) من اللوغريثمات للاساس ٥
 (لوغريثمات نابير أو اللوغريثمات الطبيعية) نضرب الاخيرة بـ $\frac{1}{\log 10}$ وهذا العدد يساوي
 ٠.٠٠٤٣٤٢٩٤ .

معكوس اقتران الجيب

نعرف من البند ٢ ان الجيب هو اقتران جا : $R \leftarrow [1, 1]$. فمن الواضح انه شامل . وفي
 الحقيقة لاي ص $\in [1, 1]$ ، يوجد عدد لا نهائي من القيم س $\in R$ بحيث ان جاس =
 ص . ولكن يوجد س واحد فقط في $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ، بحيث ان جاس = ص . لهذا فانه
 اذا حددنا اقتران الجيب على الفترة المغلقة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ليصبح جا : $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ،
 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \leftarrow [1, 1]$ اقتران تقابل ، فانه يوجد اقتران عكسي ، نرمز له بالرمز جا^{-١} ، بحيث
 ان جا^{-١} : $[1, 1] \leftarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. ويستعمل بعض المؤلفين قوجاس ، ليشير ،
 وبشكل غير دقيق ، الى الزاوية (القوس) التي جيها هوس .

وعلى القاريء ان لا يخلط بين جا⁻¹ من $\frac{1}{\text{جاس}}$ التي سنكتبها على هذه الصورة، او بالصورة قئاس.

نشدد هنا على ان جا⁻¹ نستعمل هنا لتعني معكوس الجيب، محددًا على الفترة المغلقة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. فاذا تم تحديد الجيب على فترة اخرى يكون فيها تقابلا، مثلا $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، وحصلنا على اقتران عكسي فاننا لن نستعمل الرمز جا⁻¹ له.

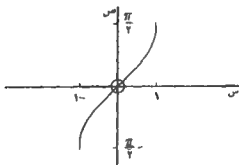
وليجاد مشتقة جا⁻¹ فاننا نتبع الطريق العادية، فإذا كان ص = جاس، $-\frac{\pi}{2} \leq \text{ص} \leq \frac{\pi}{2}$ فإن $\frac{\pi}{2} \geq \text{ص} \geq -\frac{\pi}{2}$ ، $1 \geq \text{ص} \geq -1$. اذن لاي $\frac{\pi}{2} > \text{ص} > -\frac{\pi}{2}$ يكون ص (س) = جئاس < 0 و $1 > \text{ص} > -1$. بما ان جا² ص + جئاس² ص = 1 فان جئاس

$$= \sqrt{1 - \text{جا}^2 \text{ص}} \text{ ومنه}$$

$$\text{س (ص)} = \frac{1}{\text{ص (س)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{جا}^2 \text{ص}}}, \text{ اي ان}$$

$$\frac{د}{د\text{ص}} \text{ جا}^{-1} \text{ص} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{جا}^2 \text{ص}}} \text{ لكل } -1 < \text{ص} < 1.$$

ويستخدم الرموز العادية وكتابة ص = جا⁻¹ ص والمعلومات السابقة نحصل على المخطط التالي.



المثال ١١ .

إذا حددنا الجيب على $f = [-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}]$. فإن $ص = جاس$ يحقق $ص :$

$f \leftarrow [1, -1]$ هو اقتران تقابل . إذن يوجد اقتران عكسي ولكن من الخطأ أن نكتبه بالصورة $س = جا^{-1}$ لأن قيم $جا^{-1}$ تكون في $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ وليس في f . وهناك طبعاً علاقة بين $س$ و $جا^{-1}$. فإذا كان $س \in f$ فإن $س = -\pi \ni [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ و $ص = جاس = جا(-\pi - س)$ ،

واذن

$$-\pi - س = جا^{-1} ص . \text{ أو } س = -\pi - جا^{-1} ص .$$

ونحصل على معكوس جيب التمام ، ومعكوس الظل . . . الخ بنفس الطريقة السابقة تماماً . ولكن بالنسبة لجيب التمام نختار الفترة $[0, \pi]$ لتكون الفترة المغلقة التي يكون عندها جتا متناقصاً فعلاً ويأخذ جميع القيم بين ١ و -١ . وبالنسبة للظل نختار الفترة المفتوحة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ،

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، حيث يكون ظا متزايداً فعلاً ويأخذ جميع القيم الحقيقية . والجداول التالي يبين معكوسات الاقترانات المثلثية ومعكوسات الاقترانات الزائدة ، ومجالاتها المقابلة . وفي حالة المشتقات يجب تحديد $س$ بالطريقة الواضحة . فعلى سبيل المثال مشتقة جتا لها صفر عند $س = 0$ ، وصفر عند $س = \pi$ ، إذن لا يوجد مشتقة لـ $جتا^{-1}$ عند ١ وعند -١ .

نصح القاريء باثبات جميع النتائج بالتفصيل .

الافتران	المجال	المجال المقابل	المشتقة
جا ¹ ص	[۱، ۱-]	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-]$	$\frac{1}{1-\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$
جتا ¹ ص	[۱، ۱-]	$[\pi, 0]$	$\frac{1}{1-\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$
ظا ¹ ص	R	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-)$	$\frac{1}{1+\sin \theta}$
جازا ¹ ص	R	R	$\frac{1}{1+\sin \theta}$
جتازا ¹ ص	$(\infty, ۱]$	$(\infty, 0]$	$\frac{1}{1-\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$
ظازا ¹ ص	$(۱, ۱-)$	R	$\frac{1}{1-\sin \theta}$

المثال ۱۲ .

نخذ ص = ظاز(ص) = $\frac{1-\sin^2 \theta}{1+\sin^2 \theta}$ إذن ص : R $\leftarrow (۱, ۱-)$ و ص(ص) = قاز¹ص

< 0 ، إذن ص متزايد فعلا . كذلك ص $\leftarrow ۱$ عندما ص $\leftarrow \infty$ و ص $\leftarrow ۱-$ عندما ص $\leftarrow \infty-$. إذن ص اقتران تقابل . لهذا فانه يوجد ص = ظاز¹ص . في هذه الحالة يمكن إيجاد ص بدلالة ص :

$$(1 + \sin^2 \theta) = \cos^2 \theta$$

$$\frac{\cos + 1}{\cos - 1} = \sin^2 \theta$$

ومنه

$$\sin = \frac{1}{1} \text{ لو } \frac{\cos + 1}{\cos - 1} = \text{ظاز}^{-1}(\sin) .$$

بما ان (لو) = $\frac{1}{\sin}$ فاننا نحصل على

ارقام، فان لو، ١٥٩ = لو، $(٢١٠ \times ١,٥٩)$ = ٢ + لو، ١,٥٩ = ١,٥٩، ٢٠١٤ = ٢. فاذا أردنا
 (١٥٩) فانتنا ننظر الى ٢ لو، ١,٥٩ = ٤,٤٠٢٨. ولكن لو، ٢,٥٢٨ = ٢,٤٠٢٨ = ٠، اذن
 (١٥٩) = ٢,٥٢٨ = ١٠ × ٢,٥٢٨ = ٢٥٢٨٠.

ان هذه الحسابات تبين ما قد ساعد برجز على السير فيه. ان الشائع في الرياضيات
 التطبيقية ان نكتب اشياء مثل لو، ١,٥٩ = ١,٥٩، ٢٠١٤ = ٠، هذا خطأ ويؤدي الى النتيجة
 المغلوطة (١٥٩) = ٢٥٢٨١.

المقصود طبعاً ان المعادلة تكون صحيحة ضمن مجال دقة الجدول. وكان برجز على علم
 بما فعل وكان يشير الى هذا الخطأ باسم (آفة الارقام العشرية).

ه قول المؤلف عن ان اصل اللوغريثمات غير معروف وأن اصل كلمة لوغريثم يوناني، يمثل رأياً يتجه اليه
 من لم يتوسموا في دراسة تاريخ الرياضيات في العصور الوسطى، أو بيجلون، أو يتجاهلون، دور العرب في
 تطويرها.

هناك امران لرى ضمهما الى الصورة الموجزة التي اعطاها المؤلف لنشأة فكرة اللوغريثم.

اولهما ان عمليتي الضرب والقسمة كانتا تصعبان على الحاسب قبل انتشار الحساب الهندسي، على يد
 العرب، وبقيتا صعبتين، حتى بعد انتشار هذا الحساب. فلما وضع العرب قواعد المثلثات ومنها امثال
 ٢ جا أ جتا ب = جا (أ + ب) + جا (أ - ب)

حيث يتحول الضرب الى جمع، كان طبيعياً ان يطرح السؤال: هل يمكن تحويل الضرب الى جمع، في الاعداد،
 كما تحول الى النسب المثلثية، من هذا المنطلق بدأ تاثير بحثه.

الامر الثاني الذي لرى ضمه الى الصورة ان لوغريثم والفوريثم واللوغريثم، وكلمات غيرها، انتشرت
 لدى الاوروبيين الذين تعلموا على الرياضيين العرب، على وجه التحديد، والكلمات كلها تتعلق بالارقام
 الهندية التي دخلت اوروبا مع حساب الخوارزمي، فكان كل بحث لديهم يستعمل هذه الارقام بوصف بانه
 لوغريثم، اي خوارزمي. نضيف أن الكسور العشرية ابتكار عربي وأن أول كتاب أوروبي بحث فيها نشر
 سنة ١٥٨٥، في عصر تاثير وبرجز.

فان يكن ما نشير اليه ترجيحاً، لا نقطع فيه، فهو ترجيح أقوى من الظن بأن أصل الكلمة اغريقي.

المدقق

تمارين ٩ - ٤

(تجدد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ - عين النقاط التي تكون عندها الاقترانات التالية معرفة، وجد مشتقاتها

$$(١) \text{ لو } \theta \text{ س ، } (٢) \theta \text{ لو س ، } (٣) \theta \text{ س لو } \pi$$

$$(٤) \theta \text{ لو س ، } (٥) \theta \text{ س لو س ، } (٦) \text{ لو } (١ + \text{س}^٢)$$

$$(٧) \text{ لو } | \text{س} | ، (٨) \text{ لو } (جاس) (٩) \text{ لو } (قاس + ظاس)$$

$$(١٠) \text{ لو } \{ \text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^٢} \} (١١) \text{ لو } (\text{ظا} - \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^٢}}).$$

٢ - انقد ما يلي :

$$٠ = \text{لو} = \text{لو}(-١) = \text{لو}(-١) + \text{لو}(-١) = ٢ \text{ لو}(-١). \text{ اذن لو}(-١) = ٠.$$

٣ - (١) اثبت انه اذا كان $| \text{س} | > ١$ فان

$$\text{لو} \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} = ٢ (\text{س} + \frac{\text{س}^٢}{٣} + \frac{\text{س}^٤}{٥} + \dots).$$

هل هذا صحيح عند $\text{س} \neq \pm ١$ ؟

(٢) باختيار قيمة مناسبة لـ س ، احسب لو ٢ صحيحا لـ ثلاث منازل عشرية.

(٣) اثبت انه اذا كان $\text{س} \geq ١$ فإن

$$\text{س} \geq \frac{١}{٣} \text{ لو} \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} \geq \text{س} + \frac{\text{س}^٢}{(٣ - ١)\text{س}^٣}$$

(٤) اثبت انه لا يـ ن موجب يكون

$$\frac{١}{(١ + \text{س}^٢)(١ + \text{س}^٢)} + \frac{٢}{١ + \text{س}^٢} > (\frac{١}{\text{س}} + ١) \text{ لو} > \frac{٢}{١ + \text{س}^٢}$$

٤ - هل يوجد $N \ni$ بحيث ان $\text{لو} N = ٢$ ؟

$$5. - \text{إذا كان } a < b < 0, \text{ فثبت أن } \frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{(a-b)}{ab}.$$

٦- لـ |س| ≥ ١ ون = ٠، ١، ٢، ... عرّف ل_ن (س) = جتا (ن جتا^{-١} س). اثبت أن ل_{ن+١} (س) = ٢س ل_ن (س) - ل_{ن-١} (س) لـ ١ ≤ ن واستنتج أن ل_ن (س) حدودية في س درجتها ن. اكتب ل_ن على صورة حدودية لكل ٠ ≤ ن ≤ ٤. جد كذلك اصفار ل_ن لكل ن ≤ ١.

تعرف ل_ن باسم حدوديات تشبثيشيف نسبة الى الرياضي الروسي المشهور تشبثيشيف (١٨٢١ - ١٨٩٤). وتستهمل هذه الحدوديات في نظرية التقريب والتحليل العددي.

لاي ك عرّف || ك || بانها اكبر قيمة لـ |ك (س)| لكل س ∈ [١، -١]. ثبت ن ∈ N

ونخذ الحدوديات من النوع

$$ك ن (س) = س^n + ا_n^{n-1} س^{n-1} + \dots + ا_1 س + ا_0,$$

التي يكون معامل س^ن فيها يساوي ١. اثبت ان ٢-١+١+١ ل_ن يحقق || ٢-١+١ ل_ن || ≥ || ك ن || لـ ١ ≤ ن. ارشاد: افرض ان ك ن يحقق || ك ن || > || ٢-١+١ ل_ن || ونخذ الحدودية ٢-١+١ ل_ن - ك ن التي درجتها لا تزيد عن ن - ١. ثم توصل الى تناقض.

٧- اثبت ان الاقتران الاسمي المركب سا : C ← C / { ٠ } ليس واحدا لواحد ولكن اذا حددنا سا على س^٢ = { ع - π > تنغ (ع) ≥ π } فانه يصبح واحدا لواحد. كذلك اذا كان م = ا + ت حـ ٢ ، فانه يمكن حل سا (ع) = م حيث ع = م + ت ص ونجد س = لو |م| . وهناك ايضا ص مناسبة في س^٢، نكتب بالصورة ص = سعم (م)، أعني { سعة العدد المركب م }. فيكون سا (ع) تقابلا على س^٢، وحل سا (ع) = م هو الاقتران اللوغريتمي المركب:

$$ع = لوم = لو |م| + ا ت سعم (م).$$

ويمكن ان نعرف القوة المركبة

$$م^ا = سا (ا لوم)$$

لاي عدد مركب أ ولاي عدد مركب م ≠ ٠. ما هوت ؟

افضل لعبه شر

التكامل

١ . تكامل نيوتن وتكامل ريمان

سوف نقصر البحث في هذا البند على تكامل الاقترانات الحقيقية المعرفة على فترات مغلقة على R .

هناك نمطان من التكامل يظهران كثيرا في التحليل الابتدائي : تكامل نيوتن ، وتكامل ريمان . أما تكامل نيوتن فيظهر عند عكس عملية التفاضل . وفي هذه الحالة فان الاقتران Q : $[a, b] \rightarrow R$ يكون معروفا . ونحاول ان نجد اقترانا K : $[a, b] \rightarrow R$ بحيث ان $K(s) = Q(s)$ لكل $s \in [a, b]$. واذا كان K موجودا نسميه الاقتران البدائي ، أو التكامل غير المحدود لـ Q على $[a, b]$. على سبيل المثال اذا كان $Q(s) = s$ على $[a, b]$

فان ك (س) = $\frac{س}{س}$ هو اقتران بدائي له . كذلك اذا كان ح ثابتا على [أ ، ب] فان ك
 + ح هو بدائي ايضا لأن (ك + ح) = ك + ح = ق لأن ح = ٠ .
 اليك الآن التعريف الدقيق لتكامل نيوتن .

تكامل نيوتن .

افرض ان ق : [أ ، ب] ← R . نقول ان ق قابل للتكامل على طريقة نيوتن على
 [أ، ب] اذا وفقط اذا كان لـ ق اقتران بدائي (تكامل غير محدود) ك بحيث ان ك (س) =
 ق(س) لكل س ∈ [أ ، ب] . وسنكتب

ك (س) = [ق (س) دس أو ك (س) = نيو [ق (س) دس . اما تكامل نيوتن المحدود
 لـ ق على [أ ، ب] فيعرف على انه ك (ب) - ك (أ) . حيث ك اي اقتران بدائي لـ ق ونكتب
 ك (ب) - ك (أ) = [ق (س) دس أو نيو [ق (س) دس .
 سوف نرمز لمجموعة جميع الاقتارات القابلة للتكامل على طريقة نيوتن بالرمز نيو[أ ، ب] .
 نذكر هنا انه اذا كان ق ∈ نيو[أ ، ب] فانه يمكن كتابة تكامل نيوتن المحدود على صورة
 $\int [ق (س) دس أو \int [ق (ص) دص$ ، الخ لاننا نحصل على القيمة بحساب ك (ب) - ك (أ)
 ، وهذه القيمة لا تعتمد على المتغير سواء كان س أو ص ، الخ .
 وقد يبدو ان تعريف التكامل المحدود يعتمد على الاقتران البدائي الذي نختاره . هذا
 ظاهري فقط واليك الدليل :

النظرية ١ .

اذا كان ق ∈ نيو[أ ، ب] فان نيو [ق (س) دس لا يعتمد على الاقتران البدائي

الذي نختاره .

البرهان .

افرض ان \mathcal{K}_1 ، \mathcal{K}_2 اقترانان بدائيان لـ \mathcal{Q} . اذن $\mathcal{K}_1 = \mathcal{Q}(\mathcal{S})$ ، $\mathcal{K}_2 = \mathcal{Q}(\mathcal{S})$ لكل $\mathcal{S} \in \mathcal{Q}$ ، اي ان $(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2)(\mathcal{K}_1) = 0$. إذن $\mathcal{K}_1(\mathcal{S}) - \mathcal{K}_2(\mathcal{S}) = 0$ ثابتا ومنه $\mathcal{K}_1(\mathcal{B}) - \mathcal{K}_2(\mathcal{B}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) - \mathcal{K}_2(\mathcal{A})$ ، لهذا فان $\mathcal{K}_1(\mathcal{B}) - \mathcal{K}_2(\mathcal{B}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) - \mathcal{K}_2(\mathcal{A}) = \mathcal{N}_1(\mathcal{Q})$. وهذا يثبت النظرية .

المثال ١ .

على اي فترة $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$: عرف \mathcal{Q}_1 ، \mathcal{Q}_2 ، \mathcal{Q}_3 ، \mathcal{Q}_4 كما يلي : $\mathcal{Q}_1(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^2$ ، $\mathcal{Q}_2(\mathcal{S}) = 0$ ، $\mathcal{Q}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ، $\mathcal{Q}_4(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^3$.

فيكون $\frac{1}{\mathcal{S}+1}$.

$\mathcal{Q}_1(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S}^2}{\mathcal{S}+1}$ ، $\mathcal{Q}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ، $\mathcal{Q}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^2$ ، $\mathcal{Q}_4(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^3$.

اذن ،

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(\mathcal{S}) &= \frac{\mathcal{S}^2}{\mathcal{S}+1} = \mathcal{S} - \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}+1} \\ \mathcal{Q}_2(\mathcal{S}) &= \mathcal{S} \\ \mathcal{Q}_3(\mathcal{S}) &= \mathcal{S}^2 \\ \mathcal{Q}_4(\mathcal{S}) &= \mathcal{S}^3 \end{aligned}$$

كذلك اذا كان $\mathcal{B} < \mathcal{A} < 0$ ، فان

$$\frac{1}{\text{دس}} = \frac{\text{لو}}{\text{ب}}.$$

حيث جميع التكاملات هي تكاملات نيوتنية محدودة ،

المثال ٢ .

إذا كان $Q \ni [أ ، ب]$ وكان $Q(س) < ٠$ على $[أ ، ب]$ فإن نيو $\int_Q Q(س) دس < ٠$. لا ثبات ذلك افرض ان $K(س) = Q(س)$ لكل $س \in [أ ، ب]$. فمُن نظرية القيمة المتوسطة فإنه يوجد $Q \ni [أ ، ب]$ بحيث ان $K(ب) - K(أ) = (ب - أ) Q(و) < ٠$ ، ومنه نتيج النتيجة المطلوبة .

وجدير بالذكر ان جميع الاقترانات في المثال ١ هي اقترانات متصلة على $[أ ، ب]$. وسوف نثبت فيما بعد ان كل اقتران متصل على $[أ ، ب]$ هو قابل للتكامل على طريقة نيوتن على $[أ ، ب]$ ، اي ان $M \ni [أ ، ب] \supset \ni [أ ، ب]$ ، حيث $M[أ ، ب]$ هي مجموعة جميع الاقترانات الحقيقية المتصلة على $[أ ، ب]$. ويمكن اثبات ان الاحتواء هنا فعلي .

والنوع الثاني من التكامل الابتدائي يرتبط باسم الرياضي الالماني ريمان (١٨٢٦ - ١٨٦٦) . لقد أوجد هذا التكامل في الاصل ليعطي معنى تحليليا دقيقا لفكرة المساحة تحت المنحنى $ص = Q(س)$ ، حيث $أ \geq س \geq ب$. ومنعطي التفاصيل فيما بعد ، اما الآن فنذكر بعض الملاحظات العامة :

إذا كان تكامل ريمان لاقتران ما ، $Q : [أ ، ب] \leftarrow R$ ، موجودا ، فاننا سنرمز له في الوقت الحاضر بالرمز

$$R \int_Q Q(س) دس$$

وعند حساب تكامل ريمان لمنحنيات بسيطة ، مثل المنحنى الدائري ، ومنحنى القطع المكافئ ، فان النتيجة تكون نفس التي نحصل عليها بالطرق الهندسية . لهذا فإنه بالامكان تعريف

المساحة تحت المنحنى $ص = ق (س)$ لكل $أ \geq س \geq ب$ على انها قيمة تكامل ريمان. فاذا فعلنا ذلك فان الاقتران غير القابل للتكامل على طريقة ريمان على $[أ ، ب]$ يكون لا مساحة تحته. وهذا يقتضي ان ينصب حديثنا عن مساحة ريمان كلياً اردنا التحدث عن المساحة. سوف يتبين لنا ان كل اقتران متصل على $[أ ، ب]$ هو قابل للتكامل على طريقة ريمان على $[أ ، ب]$ اي ان $م [أ ، ب] = ر [أ ، ب]$. وهناك امثلة توضح ان هذا الاحتواء فعلي. كذلك اذا كان $ق \ni م [أ ، ب]$ فاننا سنثبت فيما بعد ان

نيو $\int_1^2 ق (س) دس = ر \int_1^2 ق (س) دس$ (١)

إن العلاقة (١) خطأ بشكل عام : فقد يكون احد التكاملين موجوداً والآخر غير موجود. ولكنها صبيحة في الاقتران المتصلة التي هي ذات فائدة كبيرة في التطبيقات. وهذا هام جداً لان ايجاد قيمة تكامل نيوتن المحدود اسهل من ايجاد تكامل ريمان.

ويعتمد برهان (١) على ما يسمى «النظرية الاساسية للتكامل» التي تربط التفاضل بالتكامل كما يلي

$\frac{د}{دس} ر \int_1^2 ق (س) دس = ق (س)$ (٢)

على شرط ان يكون $ق$ متصلاً عند $س \ni [أ ، ب]$ وان يكون قابلاً للتكامل على طريقة ريمان على $[أ ، ب]$. ومن (٢)، التي سنبرهنها فيما بعد، نرى انه لكل $ق \ni م [أ ، ب]$ يوجد اقتران بدائي معرف بدلالة تكامل ريمان $\int_1^2 ق$ على $[أ ، س]$.

ان العديد من الاقتران العادية غير قابلة للتكامل، لا على طريقة نيوتن، ولا على طريقة ريمان، ومنذ زمن ريمان تم ايجاد طرق تكامل عديدة لكي تصبح هذه الاقتران قابلة للتكامل.

ومن اهم هذه الطرق طريقة تعرف باسم الرياضي الفرنسي الشهير ليبيج (١٨٧٥ - ١٩٤١). ومع ان نظرية تكامل ليبيج تستعمل كثيراً في التحليل، الا انها قد تكون اصعب من

ان توضح في كتاب ابتدائي . وهناك طريقة حديثة للتكامل استنبطها هنسك وقد وضعها في كتاب له ، يمكن لمن شاء ان يرجع اليه
ولتبسيط الامور فاننا لن نعرض تكامل ريمان بالطريقة التي اتبعها ريمان نفسه . بل
ستتبع طريقة داربو (١٨٤٢ - ١٩١٧) ، وهي تعطي نفس النتائج :

تكامل ريمان

سوف ندرس الاقتارات المحصورة ق : [أ ، ب] ← R ونكتب لكل س $\in [أ ، ب]$ ،
م = ك.ح.د [ق (س)] ، م = ص.ح.ع [ق (س)] (٣)
فيكون م \geq ق (س) \geq م لكل س $\in [أ ، ب]$.

ونعرف مجموعة النقط ج = {أ ، س_١ ، س_٢ ، . . . ، س_{ن-١} ، ب} بانها تجزئة لـ [أ ، ب] اذا كان

$$أ = س_٠ < س_١ < \dots < س_{ن-١} < س_ن = ب .$$

وندعوف ر = [س_{١-١} ، س_١] حيث ١ \geq ر \geq ن الفترة الجزئية الراهية لـ ج . فعلى سبيل المثال {أ ، ب} هي تجزئة لـ [أ ، ب] . فاذا كان أ < ح < ب تكون {أ ، ح ، ب} هي تجزئة محسنة لـ {أ ، ب} اي انها تحوي نقاطا اكثر .

وهذا مثال آخر: اذا وضعنا س_١ = أ + ر $\frac{(ب-أ)}{٥}$ فان {س_١ ، . . . ، س_٥}

هي تجزئة لـ [أ ، ب] ، الى ن من الفترات الجزئية ، طول كل منها $\frac{ب-أ}{٥}$

فاذا كانت ج تجزئة لـ [أ ، ب] ، وكان س \in ج فاننا نكتب

$$س_١ = ك.ح.د [ق (س)] \text{ أو } س \in ج ، \{ س_١ ، \dots \} \quad (٤)$$

$$م = ص.ح.ع [ق (س)] \text{ أو } س \in ج .$$

ويستج من (٣) و (٤) ان :

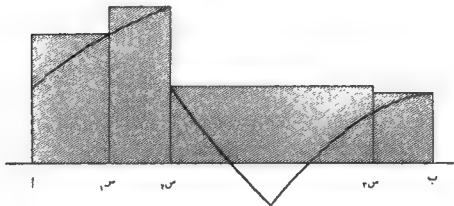
$$m \geq m_r \geq m \geq 1 \geq r \geq n \dots \dots (5)$$

ولاي تجزئة ج فاننا نعرف المجاميع السفلى والعليا كما يلي:

$$d(j) = \sum_{r=1}^n m_r (m_r - m_{r-1}) \quad (ج)$$

$$e(j) = \sum_{r=1}^n m_r (m_r - m_{r-1}) \quad (ج) \quad (6)$$

ويرينا الشكل هندسيا ان ع (ج) هو مجموع مساحات المستطيلات المظلة:



النظرية ٢ .

المجاميع السفلى د (ج) محصورة من أعلى، والمجاميع العليا ع (ج) محصورة من اسفل، اذن يوجد ج (ص.ح.ع) ج (د.ج) و (ك.ح.د) ج (ع.ج).

البرهان .

لاي ج فان $m_r - m_{r-1} < 0$ اذن، وبأخذ المجموع من $r=1$ الى $r=n$ ، نحصل من (5) على:

$$d(j) = \sum_{r=1}^n m_r (m_r - m_{r-1}) \geq \sum_{r=1}^n m_r (m_r - m_{r-1}) \geq \sum_{r=1}^n m_r (m_r - m_{r-1})$$

ولكن $\{س ر - س ر = ب - أ\}$ لأن الحدود تختصر عداس وس ر . لهذا فان $د(ج) \geq$

$م(ب - أ)$ لأي تجزئة ج ، اذن $د(ج)$ محصورة من اعلى بـ $م(ب - أ)$ ، واذن يوجد

(ص ح ع) ج $د(ج)$ و

(ص ح ع) ج $د(ج) \geq م(ب - أ)$ (٧)
حيث نأخذ ص ح ع على جميع التجزئات الممكنة ج لـ [أ ، ب] . كذلك ، وبطريقة مشابهة ،

فان $ع(ج) \leq د(ج) \leq م(ب - أ)$ ، واذن $ع(ج)$ محصورة من اسفل بـ $م(ب - أ)$ و

(ك ح د) ج $ع(ج) \leq م(ب - أ)$ (٨)

وهكذا يتم البرهان .

نعرف التكامل السفلي لأي اقتران محصور ق : [أ ، ب] $\leftarrow R$ كما يلي :

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{ \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}) \mid x_0 = a, x_n = b, n \in \mathbb{N} \} \quad (٩)$$

ونعرف التكامل العلوي كما يلي :

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}) \mid x_0 = a, x_n = b, n \in \mathbb{N} \} \quad (١٠)$$

وبعبارة هندسية ، فان التكامل السفلي يقارب المساحة الواقعة تحت منحنى $ص = ق(س)$ ،
 $\int_a^b f(x) dx \geq$ ب ، بمستطيلات تنشأ تحت المنحنى . واما التكامل العلوي فيقارب المساحة من
اعلى .

فتتوقع ان يكون :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx \quad (١١)$$

ولكن هذا الامر ليس بالبساطة التي يبدو بها .

وقبل برهنة (١١) ، منبرهن نتيجة سهلة ومفيدة .

النظرية ٣ .

ان تحسين التجزئة يزيد من قيمة المجموع السفلي وينقص قيمة المجموع العلوي . اي
انه اذا كانت $J \supseteq J'$ فان $d(J) \leq d(J')$ و $e(J) \geq e(J')$.

البرهان .

سوف نبرهن العلاقة بالنسبة للمجاميع العليا . سوف نفترض ان J' تحوي نقطة واحدة فقط اكثر من J . عند اثبات ان $e(J) \geq e(J')$ نضيف نقطة اخرى لـ J' ونحصل على J'' وبهذا يكون $e(J) \geq e(J') \geq e(J'')$ ، الخ .

افرض ان $J = \{1, \dots, s_{r-1}, s_r, \dots, b\}$ ، وان $J' = \{1, \dots, a, \dots, s_{r-1}, s_r, \dots, b\}$ ، واكتب $m_r = (s_r - s_{r-1})$ في (س) حيث $s_{r-1} \geq s_r$ ،
 $s_r \geq m_r$ ، $m_r = (s_r - s_{r-1})$ (س) حيث $s_r \geq s_{r-1}$ ، اذن $m_r \geq m_r$ ، $m_r \geq m_r$.

ان الفترتين $[s_{r-1}, s_r]$ و $[a, s_r]$ تساهمان في المجموع $e(J)$. أما باقي الفترات فمساهمتها في $e(J)$ هي نفس مساهمتها في $e(J')$ ولكن

$m_r(s_r - s_{r-1}) + m_r(s_r - s_r) \geq m_r(s_r - s_{r-1})$
واذن $e(J) \geq e(J')$. وباستخدام $m_r \leq m_r$ ، نبرهن النتيجة المتعلقة بالمجاميع السفلى . وهذا يتم البرهان .

ملاحظة .

اذا كانت J_1, J_2 تجزئتين لـ $[a, b]$ فان اتحادهما يكون تجزئة محسنة لكل منهما . ولهذا

فان

$$d(J_1 \cup J_2) \leq d(J_1), e(J_1 \cup J_2) \geq e(J_1).$$

النظرية ٤ .

إذا كان ق : [أ ، ب] ← R محصوراً فإن

$$م(ب - أ) \geq \bigwedge_{i=1}^n ق(س) دس \geq \bigwedge_{i=1}^n ق(س) م(ب - أ) \dots \dots (١٢)$$

البرهان .

من (٥) و (٦) لأي ج

$$م(ب - أ) = \bigwedge_{i=1}^n م(س - س_{i-1}) \geq \bigwedge_{i=1}^n م(س - س_{i-1}) د(ج) = د(ج) و بما ان د(ج) \geq (ص ح ع) د(ج) ، فان التعريف (٩) يعطي المتباينة الاولى . و بنفس الطريقة نبرهن المتباينة الاخيرة .$$

الآن ، علينا ان نبرهن (١١) . فمن التعريف (٩) وتعريف اصغر حاصر علوي ، فانه يوجد لكل و < ، تجزئة ج بحيث ان :

$$\bigwedge_{i=1}^n ق(س) دس > د(ج) + و . \dots \dots \dots (١٣)$$

كذلك من (١٠) يوجد ج بحيث ان

$$ع(ج) > \bigwedge_{i=1}^n ق(س) دس + و . \dots \dots \dots (١٤)$$

ويأخذ التجزئة المحسنة ج ل ج ، والملاحظة السابقة ، نحصل على

$$د(ج) + و \geq د(ج) ل ج + و \geq ع(ج) ل ج + و \geq ع(ج) + و وهذا ، مع (١٣) و (١٤) ، يعطي$$

$$\bigwedge_{i=1}^n ق(س) دس > \bigwedge_{i=1}^n ق(س) دس + و .$$

وبما ان و عدد اختياري ، فان (١١) تكون صحيحة . وبهذا تكون النظرية قد برهنت .

وبين المثال التالي انه في بعض الاقترانات المحصورة ، تكون العلاقة في (١١) علاقة

مساواة، وفي بعض الاقتراحات المحصورة، تكون هذه العلاقة «أقل من».

المثال ٣ .

(۱) اذا كان ق (س) = حـ على [أ ، ب] فان [ق (س) دس] = [ق (س) دس]

جے (ب-ا).

(۲) اذا كان هـ : $[1, 0] \leftarrow R$ حيث هـ = (س) ۱ = (س نسبي) وهـ = (س) ۰ = (س)

غیر نسبی) فان

$$.1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{ هـ (س) دس } \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{ هـ (س) دس } = 1.$$

لائيٺ (۱)، خذ اي تجزئة ج ل [أ، ب]. اذن $m_r = m_r' = \text{حومنه د (ج)} = \text{ع (ج)} =$
 ح (ب - أ) . ومنه ينتج ان $\text{ص (ع ج)} = \text{د (ج ج)} = \text{ك (د ج)} = \text{ع (ج ج)} = \text{ح (ب - أ)}$. وهذا
 يثبت (۱).

ولابنات (٢) خذ اي تجزئة ج ل [٠ ، ١] ولناخذ م_١ ، م_٢ هـ. ففي [س_١ ، س_٢] يوجد عدد نسبي د ويا ان هـ (س) ≥ ١ لأي س \in ف_١ هـ (د) = ١ ، فان م_١ = ١. كذلك يوجد في ف_٢ عدد غير نسبي. اذن م_٢ = ١

يُنتج ان $\bar{\Delta} = (ج) ١ = (س, -س, -١) = (ج) ١$ ، $\bar{\Delta} = (ج) ١ = (س, -س, -١) = (ج) ١$.

لهذا فإن (ص:ح:ع) ج (د(ج)) = ٠ و (ك ح د) ج (ع(ج)) = ١ . وهذا يثبت (٢) .
وتوجد تكاملات عليا وسفلى لأي اقتران محصور على [أ ، ب] . والمثال ٣ (٢) يبين أنها
قد لا تكون متساوية . وتستعمل حالة التساوي في التعريف التالي :

قابلية التكامل على طريقة ريان:

نقول ان الاقتران المحصور : $[a, b] \leftarrow R$ قابل للتكامل على طريقة ريمان على

[أ ، ب] اذا فقط اذا كان

$$\begin{matrix} \text{ق} & \text{ق} \\ \text{ب} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{د} \\ \text{س} & \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ق} & \text{ق} \\ \text{ب} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{د} \\ \text{س} & \text{س} \end{matrix}$$

ونكتب القيمة المشتركة على صورة $\begin{bmatrix} \text{ق} \\ \text{ب} \end{bmatrix}$ (س) دس أو $\begin{bmatrix} \text{ق} \\ \text{ب} \end{bmatrix}$ (س) دس، اذا كانت هناك حاجة لتمييزه عن تكامل نيوتن . ويرمز لمجموعة جميع الاقترانات القابلة للتكامل على طريقة ريمان بالرمز $[أ ، ب]$.

وقد جرت العادة على تسمية $[أ ، ب]$ مدى التكامل، وق الاقتران المكامل . اما النقاط أ وب فتسمى نهايات التكامل : أ هي النهاية السفلى وب هي النهاية العليا . ويجب ان لا يخلط الطالب بين هذه النهايات ونهايات المتتاليات او نهايات الاقترانات عند نقطة .

ومن الامور الرئيسية في نظرية التكامل معرفة هل الاقتران قابل للتكامل ام لا . واستخدام التعريف مباشرة قد يكون امرا صعبا في معظم الحالات . والطريقة الاخرى هي ايجاد قيمة التكامل . وسوف نناقش هذين الامرين فيما يلي :

يجب ان نتذكر ان الاقتران القابل للتكامل على طريقة ريمان على $[أ ، ب]$ يكون محصورا على $[أ ، ب]$ ، حسب التعريف . لهذا وعلى سبيل المثال فان ق : $[أ ، ب] \rightarrow R$ المعروف بق (أ) = ٠ وق (س) = $\frac{1}{س}$ ، س $\neq ٠$ لا يتبعي الى $[أ ، ب]$.
والنظرية التالية تعطي شرطا كافيا وضروريا للتكامل على طريقة ريمان .

النظرية ٥ .

ق $\in [أ ، ب]$ اذا فقط اذا كان لكل و $٠ < \epsilon$ يوجد تجزئة ج بحيث ان
ع (ج) - د (ج) $< \epsilon$ (١٥)

البرهان .

(١) افرض ان (١٥) تتحقق حيث و $٠ < \epsilon$ و (ج) تجزئة مناسبة . يجب ان نثبت ان التكامل

العلوي والتكامل السفلي متساويان. الآن

$$د(ج) \geq \bar{I}_1 \text{ ق (س) دس وع (ج)} \leq \bar{I}_1 \text{ ق (س) دس}$$

لهذا ومن النظرية ٤، نجد ان

$$. \geq \bar{I}_1 \text{ ق (س) دس} - \bar{I}_1 \text{ ق (س) دس} \geq ع(ج) - د(ج) >$$

وبما ان وعدد اختياري فان $\bar{I}_1 \text{ ق (س) دس} = \bar{I}_1 \text{ ق (س) دس}$ واذن $ق \supset [أ، ب]$.

(٢) افرض ان $ق \supset [أ، ب]$ ونحذو $< .$ من تعريف (ص ح ع) و(ك ح د) فانه

يوجد ج ، ج بحيث ان

$$د(ج) < \bar{I}_1 \text{ ق} - \frac{ق}{٤} = \bar{I}_1 \text{ ق} - \frac{ق}{٤}$$

$$ع(ج) > \bar{I}_1 \text{ ق} + \frac{ق}{٤} = \bar{I}_1 \text{ ق} + \frac{ق}{٤}$$

اذا اخذنا $ج = ج \cup ج$ فانه، وباستخدام الملاحظة المذكورة قبل النظرية ٣، يتبع ان

$$ع(ج) - د(ج) \geq ع(ج) - د(ج) >$$

اذن ج هي تمهزة مناسبة وهذا يثبت النظرية.

وهناك نمطان من الاقترانان القابلة للتكامل تظهر في النظرية التالية:

النظرية ٦.

(١) اذا كان ق متصلا على $[أ، ب]$ فان $ق \supset [أ، ب]$ ، اي أن $م[أ، ب] \supset [أ، ب]$

والاحتواء فعلي.

(٢) اذا كان ق وتيريا على $[أ، ب]$ فان $ق \supset [أ، ب]$.

البرهان .

سوف نبرهن (١) ونترك (٢) كتمرين .

بما ان ق متصل على [أ ، ب] فانه يكون منتظم الاتصال (انظر الفصل ٦ ، البند ٤) .

اذن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان |ق(س) - ق(ص)| $\leq \epsilon$ اذا كان |س - ص| $\leq \delta$.

كان |س - ص| $\leq \delta$ و س ، ص $\in [أ ، ب]$.

اختر عددا طبيعيا n وعرّف $s_r = \frac{r-b}{n}$ و $r = \frac{r-b}{n}$ لكل $r \geq 0$.

$r \geq n$ وافرض ان $j = \{s_0, \dots, s_n\}$. بما ان ق متصل فانه يوجد r ، ب في فـ ر بحيث ان ق(أ) = م ، ق(ب) = مـ ر .

لكن |أ - ب| $\leq s_{r-1} - s_r = \frac{1}{n}$. لهذا فان مـ ر - م = ق(أ) - ق(ب) $\leq \frac{1}{n}$ ، ومنه

$$ع(ج) - د(ج) = \sum_{r=1}^n (م - مـ ر) (س - س_{r-1}) > \epsilon$$

وباخذ $\epsilon = 0$ في النظرية ٥ ، نحصل على ق $\exists [أ ، ب]$ مما يثبت ان م [أ ، ب] $\supset [أ ، ب]$ ، ولانبات ان الاحتواء فعلي نعرف اقترانا غير متصل قـ ب(أ) = ٠ ، ق(س) = ١ - أ .

$س \geq ب$.

نستخدم الآن النظرية ٥ لانبات ان ق $\exists [أ ، ب]$. افرض ان $0 < \epsilon$ و اختر $س_1$

$\exists (أ ، ب)$ بحيث ان $أ > س_1 > أ + ٠$. عرف $ج = \{أ ، س_1 ، ب\}$. اذن $م = م_1 =$

$م_1 = ١$ ، مـ ١ = ٠ ومنه $ع(ج) - د(ج) = س_1 - أ > ٠$. لهذا فان ق $\exists [أ ، ب]$ من النظرية ٥ . وهذا يثبت النظرية ٦ (١) .

تمارين ١٠ - ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - احسب تكاملات نيوتن المحددة التالية بايجاد إفرانات بدائية مناسبة.

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ (٢) \quad & \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ (٣) \quad & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ (٤) \quad & \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ (٥) \quad & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

٢ - افرض ان q ، هـ قابلان للتفاضل على $[a, b]$ وهـ $(s) < 0$ على $[a, b]$. اثبت ان q و $\frac{1}{s}$ ينتميان الى نيون $[a, b]$.

٣ - اثبت ان نيون $[a, b]$ هو فضاء خطي حقيقي وان الاقتران ل: نيون $[a, b]$ ← R المعروف

$$p \cdot q = \int_a^b p(x)q(x) dx$$

هو خطي.

٤ - افرض ان $q \in$ نيون $[a, b]$ وان $a > b$. اثبت ان تحديد على $[a, b]$ ينتمي الى نيون $[a, b]$ ، نكتب $q \in$ نيون $[a, b]$. كذلك $q \in$ نيون $[a, b]$. اثبت كذلك ان

$$\int_a^b p(x)q(x) dx = \int_a^b p(x)q(x) dx + \int_a^b p(x)q(x) dx$$

حيث التكاملات هي تكاملات نيوتونية محدودة

٥ - التكامل بالاجزاء. افرض ان q ، هـ قابلان للتفاضل على $[a, b]$ وان $q \in$ نيون $[a, b]$ ، اثبت ان هـ $q \in$ نيون $[a, b]$ وان:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (س) هـ (س) دس} = \text{ق هـ} - \left\{ \begin{array}{l} \text{هـ (س) ق (س) دس} \end{array} \right\} \\ \text{حيث } \text{ق هـ} = \text{ق هـ} - \text{ق هـ} = \text{ق هـ} - \text{ق هـ} = \text{ق هـ} \end{array} \right.$$

طبق هذه المعادلة لإيجاد قيمة

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لوس دس (ب) } (0 < 1) ; \int_{\text{س}}^{\text{س}} \text{جتناس دس} \end{array} \right.$$

$$6 - \text{عُرف ق : } [1, 2] \leftarrow R \text{ بق (أ) } 0 = \text{ق (س) } 1 = 1 - 1 > \text{س} \geq \text{ب} . \text{ اثبت ان ق } \Phi \text{ نيو } [1, 2] .$$

$$7 - \text{عُرف ق : } [1, 2] \leftarrow R \text{ بق (أ) } 0 = \text{ق (س) } = \text{جاس لـ } 0 > \text{س} \geq 1 . \text{ اثبت ان ق } \exists \text{ نيو } [1, 2] \cap [1, 2] , \text{ ولكن ق } \Phi \text{ م } [1, 2] . \text{ ارشاد :}$$

$$\text{ادرس س } 2 \text{ جتا } \frac{1}{\text{س}} \text{ لـ } 0 > \text{س} \geq 1 , \text{ واستخدم } \text{م} [1, 2] \supset \text{نيو } [1, 2] .$$

$$8 - \text{اذا كان ق : } [1, 2] \leftarrow R \text{ متزايدا على } [1, 2] , \text{ فاثبت ان ق } \exists \text{ ر } [1, 2] . \text{ اثبت نتيجة مماثلة بالنسبة للاقتران المتناقصة . [اذا كان ق متزايدا فان مر = ق (س-1) , م = ق (س) , استعمال النظرية 5] .}$$

$$9 - \text{عُرف ق : } [1, 2] \leftarrow R \text{ بق (أ) } 0 = \text{ق (س) } = \text{س} - 1 - 1 > \text{س} \geq 1 , \text{ حيث [ص] ترمز الى اكبر عدد صحيح في ص} . \text{ اثبت ان ق } \exists \text{ ر } [1, 2] .$$

$$10 - \text{متباينة شوارتس} . \text{ افرض ان ق }^2 , \text{ ق هـ , هـ }^2 \text{ تنتمي الى نيو } [1, 2] \text{ وان ق }^2 \text{ (س) } < \text{ على (أ) , (ب) . فبدراسة}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(حق (س) + هـ (س)) دس} \end{array} \right.$$

واخذ قيمة مناسبة لـ حـ $\exists R$ ، اثبت متباينة شوارتس

$$(\bar{A} \vee (B \wedge C)) \supseteq (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C)$$

استنتج ان

$$\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y} \text{ دس } \geq \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

١١ - افرض ان ق ، |ق| ينتميان الى نيو[أ ، ب] . استخدم الحقيقة - |ق(س)| ≥

ق(س) ≥ |ق(س)| على [أ ، ب] لاثبات ان

$$| \bar{A} \vee (B \wedge C) | \geq | \bar{A} \vee B | \wedge | \bar{A} \vee C |$$

هذه المتباينة هي في التكامل مثيلة المتباينة الثلاثية للمجموع

$$|A+B+C| \geq |A| + |B| + |C|$$

فاذا كان $0 < A < B$ ، استخدم التكامل بالاجزاء والمتباينة السابقة لاثبات ان

$$| \frac{A}{B} - \frac{C}{D} | \geq \frac{A}{B} - \frac{C}{D}$$

٢ . خواص التكامل

اذا اعتبرنا التكامل مساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ فان النظرية التالية تكون واضحة

هندسيا . وهي ذات فائدة عملية كبيرة لاننا كثيرا ما نود ان نقسم التكامل الى مجموع من التكاملات على فترات اصغر . نذكر هنا ان العبارة $\exists \epsilon > 0$ ، [أ ، ح] تعني ان وتحديد على

[أ ، ح] هو قابل للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، ح] . وكذلك بالنسبة الى [ح ، د] ،

[ب .

النظرية ٧.

افرض ان $ق \ni ر [ا ، ب] وا > ح > ب$. اذن $ق \ni ر [ا ، ح] وق \ni ر [ح ، ب]$ ،

ب[و

$$\tilde{ق} (س) دس = \tilde{ق} (س) دس + \tilde{ق} (س) دس.$$

البرهان.

افرض ان $و < .$ فباستخدام النظرية ٥ فانه يوجد ج بحيث ان $ع (ج) - د (ج) > و$.
افرض ان $ج = ل$ $\{ ح \} = ج$ ، $ل$ $ج$ حيث $ج$ هي تجزئة لـ $[ا ، ح]$ و $ج$ هي تجزئة لـ
[ح ، ب]. اذن $ع (ج) - د (ج) \geq ع (ج) - د (ج) > و$. اذن $ق \ni ر [ا ، ح]$ حسب
النظرية ٥. كذلك $ق \ni ر [ح ، ب]$.

الآن $ق \ni ر [ا ، ح]$ تتضمن ان

$$\tilde{ق} (س) دس = \tilde{ق} (س) دس = (كسج) ع (ج) للتجزئات ج على [ا ،$$

ح]. اذن يوجد $ج$ لـ $[ا ، ح]$ وبطريقة مشابهة $ج$ على $[ح ، ب]$ بحيث ان

$$ع (ج) > \tilde{ق} (س) دس + و$$

$$\text{وكذلك } ع (ج) > \tilde{ق} (س) دس + و.$$

ولكن $ج$ $ل$ $ج$ هي تجزئة لـ $[ا ، ب]$ واذن

$$\tilde{ق} (س) دس \geq ع (ج) ل ج = ع (ج) + ع (ج) ويسا ان واختياري، فاننا
نحصل على$$

$$\tilde{ق} (س) دس \geq \tilde{ق} (س) دس + \tilde{ق} (س) دس.$$

وباستخدام المجاميع السفلى نحصل على المتباينة العكسية . وهذا يثبت النظرية .
والنظرية التالية توضح الخواص الخطية لتكامل ريمان ، وكالعادة ، نعرف $Q + H$ بالصيغة :

$$(Q + H)(S) = Q(S) + H(S) \text{ هو حق بالصيغة :}$$

$$(H)(Q) = H(S) = Q(S) \text{ لكل } H \in R.$$

النظرية ٨ .

$R[1, b]$ فضاء خطي . كذلك إذا كان $Q, H \in R[1, b]$ فإن

$$\{ Q(S) + H(S) \mid Q(S) \in D, H(S) \in D \} = D$$
 كذلك

$$\{ H(S) \mid H(S) \in D \} = D$$

البرهان .

للتبسيط فسوف نختصر الرموز بالطريقة الواضحة : إذا كان $Q < 0$ فإنه يوجد J, K بحيث

$$Q(J, K) > Q + H, \quad Q(J, K) < Q + H.$$

افرض ان $J = K = L$ فيكون

$$Q(J, K) > Q + H, \quad Q(J, K) < Q + H.$$

الآن اذا كان $S \in [r_1, r_2]$ فإن

$$S \in [r_1, r_2] \Rightarrow S \in [r_1, r_2] + H \text{ واذن}$$

$$Q(J, K) + H = \bigcup_{S \in [r_1, r_2]} (Q(S) + H(S))$$

$$\supseteq (ص ح ع ق + ص ح ع هـ) (س ر - س ر_١)$$

$$ع ج ، ق + ع ج ، هـ .$$

$$\text{ومنهُ } [(ق + هـ) \supseteq ع ج ، ق + هـ] > [ق + [هـ + ٢ ، و] \text{ واذن}$$

$$[(ق + هـ) \supseteq [ق + [هـ (١٦)$$

وباستخدام المجاميع السفلى نجد ان

$$[ق + [هـ \supseteq [(ق + هـ) (١٧)$$

$$\text{ولكن } [(ق + هـ) \supseteq [(ق + هـ) ، \text{ اذن من (١٦) و (١٧) نحصل على}$$

$$[(ق + هـ) = [(ق + هـ) = [(ق + هـ) = [ق + [هـ .$$

ومثله برهان $[ح ق = ح [ق$. ويجب معالجة الحالتين $ح \leq ٠$ و $ح > ٠$ ، كلا على

حالة ، باستخدام $ص ح ع (ح ق) = ح (ص ح ع) ق$ و $ك ح د (ح ق) = ح (ك ح د) ق$ اذا

كان $ح \leq ٠$ ؛ و $ص ح ع (ح ق) = ح (ص ح ع) ق$ ، $ك ح د (ح ق) = ح (ك ح د) ق$ اذا كان $ح > ٠$.

نتيجة .

اذا كان $ق ، هـ \supseteq ر [ا ، ب]$ وكان $ق (س) \supseteq هـ (س)$ على $[ا ، ب]$ فان

$$[ق (س) د س \supseteq [هـ (س) د س (١٨)$$

البرهان .

هذه النتيجة هامة ويمكننا من اخذ تكامل طرفي المتباينة .

$$| \text{ل (ع)} | \geq \text{ك} \left(\frac{\pi}{\gamma} \right) - \text{ك} (0) = \frac{(\pi - 1)}{\epsilon^2} \pi > \frac{\pi}{\epsilon^2}.$$

من هذا يتبع ان ل (ع) \leftarrow (ع) \leftarrow (∞) .

تمارين ١٠ - ٢

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - افرض ان ق : [أ ، ب] \leftarrow R متصل ويحقق ق (س) \leq ٠ على [أ ، ب]. اذا كان

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (س) دس} = 0 \text{ فائت ان ق (س)} = 0 \text{ لكل س} \in [أ ، ب]. \\ \text{اذا كان ق ، هـ} \in [أ ، ب] \text{ فائت ان ق هـ} \in [أ ، ب]. \end{array} \right.$$

$$٣ - \text{اثبت ان } \frac{1}{\sqrt[4]{s}} \geq \frac{s}{\sqrt{s+1}} \text{ دس } \frac{1}{s} \geq \frac{1}{s+1}.$$

٤ - اعط مثالا لاقتران ق : [أ ، ب] \leftarrow R بحيث ان ق | ق | $\in [أ ، ب]$ ولكن ق | ر | $\notin [أ ، ب]$.

٥ - اذا كان $1 > \alpha > 0$ ون \exists N فائت ان

$$\left\{ \frac{s^n}{s+1} \text{ دس } \leftarrow (n \leftarrow \infty) \right\}$$

٦ - افرض ان ق : $R^+ \times R^+ \leftarrow [-\frac{\pi}{4}, 0]$ ، وافرض ان $\frac{ق(ل، ل)}{ل} \leftarrow 0$ عندما ل

$\leftarrow \infty$ بانتظام في $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$. وهذا يعني انه لكل $\epsilon < 0$ يوجد ل. ل. $\in (0, \infty)$

تعتمد على ϵ فقط وليس على θ . بحيث ان $\left| \frac{ق(ل، ل)}{ل} \right| > \epsilon$ لكل ل. ل. و θ

$\exists [-\frac{\pi}{4}, 0]$. افرض ان ق قابل للتكامل، اثبت ان

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ق(ل، ل) \text{ سا } (-ل \text{ حا } \theta) \text{ د } \alpha \leftarrow 0 \text{ (ل } \leftarrow \infty).$$

٧- ناقش تقارب المتالتين (أ_ن) ، (ب_ن) حيث

$$أ_n = \left\{ \begin{array}{l} ١ \text{ جا (ن س) دس وب } ٣ \\ ٢ \text{ جا (ن س) ا دس.} \end{array} \right.$$

٨- [نظرية القيمة الوسطى الاولى للتكامل].

إذا كان ق \exists م [أ ، ب] وه \exists ر [أ ، ب] وكان هـ (س) \leq لـ \leq أ \geq س \geq ب ،
قائمت انه يوجد حـ \exists [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_C^b f(x) dx = f(c) (b-a)$$

(ارشاد: لاحظ ان ق (و) \geq ق (س) \geq ق (ي) لـ و، ي \exists [أ ، ب] ولكل س \exists [أ ، ب].
اضرب طرفي المعادلة برهـ (س) ثم كامل.

٩- [نظرية القيمة الوسطى الثانية للتكامل].

إذا كان ق متزايدا على [أ ، ب] وكان هـ \exists ر [أ ، ب] بحيث ان هـ (ص) \leq لـ \leq أ \geq ص
 \geq ب فائمت انه يوجد حـ \exists [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b-a)$$

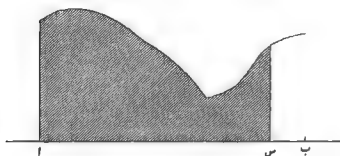
(ارشاد: عرّف ك (أ) = ٠ و ك (س) = $\int_a^s f(x) dx$ هـ (ص) دص لـ أ $>$ س \geq ب ، أثبت ان ك \exists
م [أ ، ب] .)

٣. التكامل كاقتران لنهايته العليا

إذا كان ق \exists ر [أ ، ب] فان ق \exists ر [أ ، س] لـ أ $>$ س \geq ب ، حسب النظرية ٧. لهذا
فانه يمكن اعتبار تكامل ريمان اقترانا متغيراً النهاية العليا، وذلك بان نعرف

$$ك(س) = \int_a^s f(x) dx, \quad a \leq s \leq b, \quad \dots \dots \dots (٢٢)$$

ونتعارف على أن ك (أ) = ٠ . وإذا نظرنا الى التكامل على أنه مساحة تحت المنحنى ص = ق (س) فإن المساحة المظللة في الشكل تمثل ك (س) :



سوف نستخدم (٢٢) لإثبات أن ك (س) = ق (س) عندما يكون ق متصلا على [أ ، ب]. ان هذه النتيجة تعرف باسم «النظرية الأساسية في التكامل» وهي يمكننا من إثبات ان تكاملي ريمان ونيوتن المحددين يتساويان على الاقتربات المتصلة .
كذلك تستخدم النظرية الأساسية لإيجاد طريقتين هامتين من طرق التكامل هما «التكامل بالاجزاء» و «التكامل بالتعويض» .

بالنسبة لتكامل ريمان فقد كاملنا الى الآن على فترات مغلقة [أ ، ب] حيث $a < b$.
وسنعطي تعريفا يجعل بالامكان اخذ اي عددين حقيقيين كنهائيتين للتكامل .
إذا كان ق ∈ [أ ، ب] حيث $a < b$ فأننا نعرف

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (س) دس} = ٠ \dots \dots \dots (٢٣) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (س) دس} = - \dots \dots \dots (٢٤) \end{array} \right.$$

المثال ٦ .

افرض ان ق ∈ [أ ، ب] ، حيث $a < b$. إذن إذا كان $c > a$ فإن

$$\{ \text{ق (س) دس} + \{ \text{ق (س) دس} = \{ \text{ق (س) دس} \dots \dots \dots (٢٥)$$

لا يثبت (٢٥) استخدم النظرية (٧) مع (٢٤):

$$\{ \text{ق (س) دس} = \{ \text{ق (س) دس} + \{ \text{ق (س) دس} = \{ \text{ق (س) دس} -$$

$$\{ \text{ق (س) دس}$$

وهذا يعطي (٢٥).

النظرية ١٠.

إذا كان ق \exists ر [أ ، ب] فان ك المعرف في (٢٢) يكون متصلا على [أ ، ب].

البرهان.

افرض ان ح \exists [أ ، ب] و م \exists [أ ، ب]. اذن

$$\text{ك (س) - ك (ح) = } \{ \text{ق (ص) دص} \dots \dots \dots (٢٦)$$

$$\text{ليس } \leq \text{ ح أوس } > \text{ ح. بما ان ق } \exists \text{ ر [أ ، ب] فان ق يكون محصورا ومنه } | \text{ق (ص) } | \geq$$

م لكل أ \geq ص \geq ب. من (٢٦) اذا كان س \leq ح فان

$$| \text{ك (س) - ك (ح) } | \geq | \{ \text{ق (ص) دص} | \geq \{ \text{ق (ص) دص} = \text{م (س) - ح} ,$$

واذا كان س $>$ ح فان | ك (س) - ك (ح) | \geq م (ح) - س. ففي كلتا الحالتين نحصل

$$\text{على } | \text{ك (س) - ك (ح) } | \geq | \text{م - ح} | .$$

$$\text{فاذا كان } \epsilon < 0 \text{ فانه يوجد } \delta = \frac{\epsilon}{m+1} \text{ بحيث ان } | \text{س - ح} | < \delta$$

تعطي | ك (س) - ك (ح) | $< \epsilon$. اذن ك متصل على ح، وهذا يثبت النظرية.

والنظرية التالية تبين انه اذا كان ق \exists ر [أ ، ب] متصلا عند نقطة ح \exists [أ ، ب] فان

النظرية ١٢.

افرض ان \exists م [أ ، ب] اي ق متصل على كل س \exists [أ ، ب]. اذن يكون تكامل ريان وتكامل نيوتن المحدود موجودين ومتساويين في القيمة.

البرهان.

بما ان \exists م [أ ، ب] فان ق \exists ر [أ ، ب] من النظرية ٦ (١). اذن تكامل ريان
 $\int_C (س) دس$ موجود.

ومن نظرية ١١، وبما ان ق متصل على كل س \exists [أ ، ب] فان ك (س) = ق (س) لكل س \exists [أ ، ب]. ومن تعريف تكامل نيوتن المحدود فان تكامل نيوتن المحدود موجود ويساوي ك (ب) - ك (أ). ولكن ك (أ) = ٠ من (٢٣)، اذن (٢٢) تعطي

$$\int_C (س) دس = ك (ب) - ك (أ) = \int_C (س) دس$$

مما يثبت النتيجة.

وباستخدام النظرية ١٢، نرى ان نتائج المثال (١) صحيحة لتكامل ريان كما هي صحيحة لتكامل نيوتن لان الاقتران المكامل اقتران متصل.

المثال ٧.

افرض ان $ح \neq ٠$ وعرف

$$ك (س) = \frac{١}{ح-٢} + \frac{س}{س+٢} - \frac{١}{ح} \text{ ظا } \frac{١}{ح-٢}$$

على اي فترة مغلقة [أ ، ب]. اذن

$$\int_C (س) دس = \left(\frac{١}{ح-٣} - \frac{١}{س+٢} - \frac{١}{ح} \right) \Big|_أ^ب = \left(\frac{١}{س+٢} + \frac{٢}{(س+٢)(ح-٢)} - \frac{١}{س+٢} \right) \Big|_أ^ب - \frac{١}{(س+٢)(ح-٢)} \Big|_أ^ب$$

اذن ، ففي كل من تكامل نيوتن وتكامل ريمان ،

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دس} \\ \text{(س) } \left(\frac{1}{\text{ج}^2} \right) \end{array} \right. = \text{ك (ب) - ك (أ)} .$$

في مباديء التحليل عادة تكون الافتراضات التي يطلب إيجاد تكاملها افتراضات متصلة ، لهذا وعلى ضوء النظرية ١١ فانه لا فرق بين استخدام تكامل نيوتن أو تكامل ريمان . فعندما

نكتب $\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (س) دس} \end{array} \right.$ بعد الآن فاننا سنعني تكامل ريمان الا اذا ذكرنا غير ذلك .

وبالنسبة لطرق التكامل العملية فان النتيجة التالية ذات اهمية كبرى .

النظرية ١٣ .

اذا كان ق : [أ ، ب] \rightarrow R وكان ق متصلا على [أ ، ب] فان

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) دص} \\ \text{ق (ب) - ق (أ)} \end{array} \right. = \text{ق (ص) } \left\{ \begin{array}{l} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \right. \dots \dots \dots (٢٨)$$

البرهان .

الصيغة في القوس المربع هي طريقة شائعة في كتابة ق (ب) - ق (أ) وهي مفيدة عندما يكون ق (ص) معقدا ويوفر علينا كتابة صيغتين معقدتين لـ ق (ب) وق (أ) .

ولاثبات (٢٨) نأخذ مشتقة العبارة

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) دص} \\ \text{ق (ب) - ق (أ)} \end{array} \right. = \text{ق (ص) دص - ق (ص) دص}$$

ونجد ان $\text{ق (ص) دص} = \text{ق (ص) دص}$ لكل س \in [أ ، ب] ، حسب النظرية ١١ . اذن $\text{ق (ص) دص} = \text{ق (ص) دص}$

لكل س \in [أ ، ب] ومنه $\text{ق (ص) دص} = \text{ق (ص) دص}$ مما يثبت (٢٨) .

المثال ٨ .

احسب $\tilde{[ص^2 د ص]}$ في اسئلة سهلة كهذا يمكن ان نحزر الاقتران البدائي ونستخدم النظرية ١٣ :

$$\tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]} = \tilde{[ص^2 د ص]}$$

في العديد من التكاملات السهلة مثل $\tilde{[ص جاس د س]}$ يكون من الصعب معرفة الاقتران البدائي . لهذا نستخدم التكامل بالاجزاء .

النظرية ١٤ . [التكامل بالاجزاء] .

اذا كان $ق$ ، $هـ$ متصلين على $[ا ، ب]$ فان

$$\tilde{[ق هـ]} = \tilde{[ق هـ]} - \tilde{[ق هـ]} = \tilde{[ق هـ]} .$$

البرهان :

باستخدام النظرية ٢ (٢) ، في الفصل ٧ ، $ق (هـ) = ق هـ + هـ ق$ اذن $ق (هـ) متصل$.
ونحصل على النتيجة المطلوبة من النظرية ١٣ والنظرية ٨ .

المثال ٩ .

لايجاد قيمة $\tilde{[ص جاس د س]}$ نأخذ $ق (س) = س$ ، $هـ (س) = -جاس$ ، في النظرية

$$١٤ ، خصوصا لأن $ق$ اسهل من $ق$. اذن $\tilde{[ص جاس د س]} = \tilde{[ص جاس د س]} + \tilde{[ص جاس د س]}$$$

$$\tilde{[ص جاس د س]} = \tilde{[ص جاس د س]} + \tilde{[ص جاس د س]} .$$

ويمكن التأكد من صحة هذه النتيجة بملاحظة ان $\Delta(-س جتاس + جاس) =$

س جاس .

المثال ١٠ .

احسب قيمة $L = \sum_{\theta} \theta س جاس دس$: نكامل بالاجزاء ونحصل على

$$L = \sum_{\theta} \theta س جتاس + \sum_{\theta} \theta س جتاس دس = \sum_{\theta} \theta س جتاس + \sum_{\theta} \theta س جاس -$$

$\sum_{\theta} \theta س جاس دس$ ، اذن

$$L = \sum_{\theta} \theta س (جتاس - جتاس) .$$

للتأكد: $\Delta(\theta س (جتاس - جتاس)) = \theta س (جتاس + جتاس) +$

$$\theta س (جتاس - جتاس) = \theta س جاس . \text{ لهذا فان}$$

$$L = \sum_{\theta} \theta س جاس دس = \sum_{\theta} \left[\frac{\theta س}{\theta} (جتاس - جتاس) \right] \Delta$$

المثال ١١ :

تفيدنا الصيغة التالية في اثبات نظرية سترلنج .

$$L_n = \sum_{k=1}^n k جاس س دس = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{1-n}{n} \quad (\text{اذا كان } n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{1-n}{n} \quad (\text{اذا كان } n = 3, 5, 7, \dots)$$

لايضاح ذلك نأخذ، في النظرية ١٤، $n \leq 2$ ، $ق (س) = جاس^1 س$ ، $هـ (س) = -جتاس$ ،
فنحصل على:

اذن $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n}$ ، ومنه نحصل على النتيجة المطلوبة. على سبيل المثال:

$$2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2-2}{2-2} + \frac{1-2}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1-2}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

وتتعلق النتيجة التالية بشكل من اشكال التكامل بالاجزاء، لكن ليس في فرضيتها ذكر لقابلية التفاضل.

افترض أن ق، هـ و [ر، أ، ب] كوك (س) = \check{Q} ، ل (س) = \check{L} هـ. إذن $\check{Q} \check{L} = [ل ك] - ب - \check{L}$ هـ ك.

خذ اي تجزئة $J = [a, b]$ ، وافرض ان الجمع يكون لكل $a \geq r \geq n$.

اذن [ك ل] يساوي:

حيث $\alpha < \pi$ ، أما هندسياً، فإن L تمثل المساحة تحت ربع الدائرة التي نصف قطرها α ، لهذا فإننا

$$\text{نتوقع ان يكون } L = \frac{\pi \alpha^2}{4}.$$

بما ان α جـ α ص = ١ - جـ α ص فإننا نحاول وضع α ص = أ جـ α ص حيث $\alpha \geq \alpha$

$$\frac{\pi}{14}. \text{ اذن } \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 \text{ ص}} = \alpha \text{ جـ } \alpha \text{ ص، ص} = \frac{\pi \alpha^2}{4} \text{ عندما } \alpha = 0، \text{ ص} = 0 \text{ عندما } \alpha = \alpha.$$

اذن

$$L = \int_0^{\alpha} \alpha \text{ جـ } \alpha \text{ ص} \cdot \frac{d(\alpha \text{ ص})}{d\alpha} \cdot d\alpha = - \int_0^{\alpha} \alpha^2 \text{ جـ } \alpha \text{ ص} d\alpha = \frac{\pi}{14} \alpha^2 \int_0^{\alpha} \alpha \text{ جـ } \alpha \text{ ص} d\alpha.$$

لكن التكامل الأخير يساوي $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{4}$ ، من المثال ١١. اذن $L =$

$$\frac{\pi \alpha^2}{4} \text{ كما توقعنا.}$$

والنظرية التالية تسبغ على هذه الافكار بعض الدقة.

النظرية ١٦ [التعويض].

افرض ان $f = [A, B]$ و $h = f \circ R$. افرض كذلك ان

(١) h متصل على f

(٢) f متصل على h (ف)

اذن

$$\int_{(f)}^{(h)} f \circ h \, d\alpha = \int_0^1 f \circ h \, d\alpha = \int_0^1 f \circ h \, d\alpha = \int_0^1 f \circ h \, d\alpha.$$

ان النقاش المذكور اعلاه ضروري لاجتياز النتيجة ولكن يكون اسهل احيانا ان نجري

النقاش بشكل منظم كما يلي: افرض ان $ص = ١ + لوس$ ، اذن $دص = \frac{دس}{ص}$. فعند $س =$

١ يكون $ص = ١$ وعند $س = ٠$ يكون $ص = ٢$. اذن

$$١ = \int_1^2 \frac{لوس}{ص + ١} \frac{دس}{ص} = \int_1^2 \frac{ص - ١}{ص} \frac{دص}{ص}.$$

وهذه نفس النتيجة السابقة، وهذا النوع من الحل يعطي عادة نتائج صحيحة. الا أن الخطر الحقيقي ان التعويض قد يستعمل ويكون لا معنى له تحليليا ولكنه يعطي نتائج قد تكون خاطئة. على سبيل المثال اذا اخذنا $ص = ١$ في $ف$ التي تحوي الصفر فاننا نتوقع ان لا يكون هناك معنى لما نحصل عليه لان $ف$ غير معرف على الصفر. انظر السؤال ٧ من التمارين ١٠ - ٣ كمثال من هذا النوع.

المثال ١٣.

احسب قيمة

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{دس}{٣ + جتا س} = ١$$

لقد وجد ان التعويض المناسب لهذا التكامل هو $ص = \frac{س}{٣ + جتا س}$ ، اي $ص = ٢$ ظا $١ = ص$

هـ (ص) حيث $٠ \leq ص \leq ١$. لهذا فان $ف = [٠, ١]$ ، واذن هـ (ف) $= [٠, \frac{\pi}{٣}]$

والاقتران المكامل في أ متصل على هـ (ف). كذلك هـ (ص) $= \frac{٢}{ص + ١}$ متصل على ف.

الآن $٠ \leq ص \leq ١$ تعطي $\frac{س}{٣} \geq \frac{س}{٤} \geq \frac{\pi}{٤}$ لهذا فان جتا $\frac{س}{٣} < ٠$. اذن من

$$\begin{aligned} جا^٢ \frac{س}{٣} + جتا^٢ \frac{س}{٣} &= ١ \text{ نحصل على } ١ + ص = \frac{١}{جتا^٢ \frac{س}{٣}}. \text{ ولكن جتاس} = \\ \frac{٢}{جتا^٢ \frac{س}{٣}} &= ١ - \frac{٢}{ص + ١} = ١ - \frac{١ - ص}{ص + ١} \end{aligned}$$

لهذا فان:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2-8}} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} \right\} = 1 \\
& \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-8}} = \\
& \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-8}} = \\
& \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-8}} = \\
& \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2-8}} + 1} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-8}} =
\end{aligned}$$

تعريف ريان للتكامل المحدود.

الاسلوب الذي سلكناه في شرح تكامل ريان بأخذ المجاميع العليا والسفلى هو اسلوب داريو . ولكن ريان عرّف تكامله بطريقة اخرى .

$$\left\{ \text{ق (س) دس} = \text{نهاية} \cdot \sum_{i=1}^n \text{ق (ح}_i\text{)} (\text{س}_i - \text{س}_{i-1}) \right\}$$

عندما تكون النهاية موجودة وحيث $\Delta = \text{أك} \{ (\text{س}_i - \text{س}_{i-1}) \}$ ، وتأخذ اي تجزئة ج على $[a, b]$ واي اختيار لـ ح_i في $[\text{س}_{i-1}, \text{س}_i]$ ، س_i . وتعتمد ح_i بشكل عام على ن وعلى ر . ويمكن اثبات ان تعريف ريسان وتعريف داريو متكافئان ويعطيان نفس القيمة للتكامل . ولن نثبت هذه النتيجة ، لكن النظرية التالية هي حالة خاصة منها ، تفيد احيانا .

النظرية ١٧ :

افرض ان ق : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ متصل على $[a, b]$ وتأخذ اي ح_i $\in [a, b]$

، $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. اذن :

ن. —. اذن وعندما $n \rightarrow \infty$ ،

$$s_n \leftarrow \left\{ \frac{s_{n+1}}{s_n + 1} \right\} = \left[\frac{1}{2} \log(1 + s^2) \right] = \log \sqrt{2}.$$

تمارين ١٠ - ٣

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت ان $\left\{ (1 + s^2)^{-n} \right\}$ دس $\leftarrow \frac{\pi}{4}$ (ب $\leftarrow \infty$).

٢ - استخدم طريقة التكامل بالاجزاء لحساب ما يلي

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \text{ دس ؛}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^3} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \frac{1}{n^4} \right\} \text{ دس ؛}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^5} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \frac{1}{n^6} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \frac{1}{n^7} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \frac{1}{n^8} \right\} \text{ دس ؛}$$

٣ - لكل $n \in \mathbb{N}$ ، احسب قيمة

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

٤ - اذا كان $Q \in \mathbb{R}$ ، $[A, B]$ ، $K(s) = \left\{ \frac{1}{s} \right\}$ ، فاثبت ان

$$\left\{ K(s) \right\} \text{ دس (ب) } \leftarrow \infty$$

٥ - استخدم تعويضاً مناسباً لحساب قيمة

$$\left\{ \sqrt{1 + s^2} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ \sqrt{1 - s^2} \right\} \text{ دس ؛ } \left\{ (1 - s^2)^n \right\} \text{ دس ؛}$$

($n \in \mathbb{N}$).

٦ - اثبت ان

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\text{دس}}{٣+٥}$$

كذلك احسب قيم

$$\frac{\text{دس}}{٣+٥} = \text{وب} \frac{\text{دس}}{١-١}$$

٧ - اثبت ان ل = (١ + س) - دس = $\frac{\pi}{4}$ عوض س = ص - في ل لتحصل على ان

$$ل = - \frac{\pi}{4} \text{ ما الخطأ؟}$$

٨ - جد نهايات المتتاليات المعطى حدها النوني كما يلي .

$$(١) \quad \frac{1^1 + 2^1 + \dots + n^1}{n^1} \text{ حيث } 1 < 1$$

$$(٢) \quad 1^{-1} + (١ + ٢) + 1^{-1} + (٢ + ٣) + \dots + 1^{-1} + (٣ + ٤)$$

$$(٣) \quad \sum_{r=1}^n (٢ + ٣ + ٤)$$

$$٩ - \text{اذا كان س} = (٥) \quad \sum_{i=1}^n 1^{-1} \text{ جتا } (٥) \text{، فاثبت ان}$$

$$\text{نهاية} \rightarrow \text{نهاية} \rightarrow \text{س} = (٥) = \text{نهاية} \rightarrow \text{نهاية} \rightarrow \text{س} = (٥) = ١$$

١٠ - استخدم طريقة التكامل بالاجزاء لاثبات ان

$$\int_1^1 (١ + س) دس = ١ + لو٤ ، واستنتج ان$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{n} + ١ \right) \left(\frac{2}{n} + ١ \right) \dots \left(\frac{n}{n} + ١ \right) \right\} \rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow \infty \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

٤ - التكامل اللانهائي والتكامل المعتل

هناك اوجه تشابه عديدة بين التكامل اللانهائي والمتسلسلة اللانهائية . نقول ان المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اللانهاية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية ومجموعها A اذا وفقط اذا وجدت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = A.$$

وبالمثل نعرف التكامل اللانهائي كما يلي :

التكامل اللانهائي التقاربى : نقول ان التكامل اللانهائي $\int_a^{\infty} f(x) dx$ (ص) دص هو تقاربى (أو

موجود) اذا وفقط اذا كان $\exists R [a, \infty) \subset R$ لكل $s < \infty$ وكانت توجد

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^s f(x) dx = M,$$

حيث M عدد حقيقى . عندها نكتب $\int_a^{\infty} f(x) dx = M$. ونرمز لمجموعة جميع الاقترانات

$$Q : [a, \infty) \leftarrow R \text{ بحيث ان } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ دص تقاربى بالرمز } R[a, \infty).$$

واذا كان $\int_a^{\infty} f(x) dx$ دص لا يقترب من نهاية عندما $s \rightarrow \infty$ ، فاننا نقول ان

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ دص تباعدى.}$$

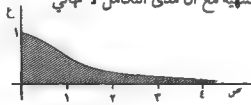
المثال ١٥ .

$$\text{لكل } s < \infty \text{ نعرف ان } \int_1^s \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{s} \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ عندما } s \rightarrow \infty,$$

لهذا فان :

$$\left[(1 + \sqrt{s})^{-1} \text{ دص} = \frac{\pi}{4} \right]$$

تفسر نتيجة المثال ١٥ بالرسم على ان المساحة المظللة والمحدودة بالمنحنى $E = (1 + \sqrt{s})^{-1}$ ومحور \sqrt{s} ، هي منتهية مع ان مدى التكامل لا نهائي



المثال ١٦.

ان التكاملين $\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص}$ و $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ دص}$ هما تباعديان لان $\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \infty$ (س $\leftarrow \infty$)، و $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ دص} = \text{جاس} \leftarrow \text{اي نهاية (س} \leftarrow \infty \text{)}$.

المثال ١٧.

ان

$$\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص} = \frac{1}{1-s} \text{ (عندما } s < 1 \text{)}.$$

والتكامل تباعدي عندما $s \geq 1$. هذا لان

$$\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص} = \frac{1}{1-s} - \frac{s^{-1/2}}{1-s} \leftarrow \frac{1}{1-s} \text{ (عندما } s < 1 \text{)};$$

$$\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص} \leq \infty \text{ عندما } s \geq 1.$$

اما بالنسبة لتقارب او تباعد $\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص}$ فإنه يعرف بطريقة مشابهة، أي نأخذ

سلوك

$$\int_0^\infty \sqrt{s} \text{ دص}$$

عندما $s \leftarrow \infty$ ،

إذا كان ق : $R \leftarrow R$ وق $\exists R$ [ص، ص] لكل ص، $\exists R$ حيث $\text{ص} >$
ص، فالتنا قول ان

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع}$$

تقاربي اذا وفقط اذا وجد عدداً $\exists R$ بحيث ان $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ص}) \text{ دص}$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ص}) \text{ دص}$
تقاربان. وعندها تعرف

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع} + \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع}.$$

من السهل ان نرى ان $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع}$ لا يعتمد على أ.

المثال ١٨ .

$$\text{اذا كان ق}(\text{ع}) = \frac{1}{(1+2\text{ع})(1+\text{ع})} \text{ فان } \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع} = \text{لو}٤، \text{ لان}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع} = \text{لو} \left[\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}+2} \right] \text{ س} \leftarrow \text{لو} \frac{1}{2} = \text{لو} 2 \text{ (عندما س} \leftarrow \infty \text{).}$$

كذلك $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{ق}(\text{ع}) \text{ دع} = \text{لو} 2$
والنظرية التالية تقابل القاعدة العامة لتقارب المتسلسلات.

النظرية ١٨ .

افرض أن ق $\exists R$ [ص، ص] لكل ص $< \infty$. اذن ق $\exists R$ [ص، ∞] اذا وفقط اذا كان لكل
 $\epsilon < \infty$ يوجد $\text{ع} = \text{ع}(\epsilon)$ بحيث ان :

$$| \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع } | \epsilon > \text{ لكل } \epsilon < \beta < \epsilon \dots (32)$$

البرهان.

اولا، افرض ان $\exists [r, \infty)$ ، لهذا فان $\check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع} \leftarrow m \leftarrow (s \leftarrow \infty)$. اذن اذا كان $\epsilon < \infty$ فانه يوجد $\epsilon < \alpha$ بحيث ان

$$| \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع} - m | > \frac{\epsilon}{4} \text{ لكل } s < \epsilon.$$

اذن $\epsilon < \beta < \epsilon$ تعطي

$$| \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع} | = | \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع} - m | + | m | > \frac{\epsilon}{4} + | m | > \epsilon$$

ما يثبت (32). وبالعكس، افرض ان (32) تتحقق. لأي $n \in \mathbb{N}$ عرف

$$s_n = \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع}$$

من (32) فاننا نحصل على $|s_n - s_m| < \epsilon$ اذا كان $n < m \leq \infty$. اذن (s_n) متتالية كوشية من اعداد حقيقية، لهذا فان (s_n) تقاربية. لنقل $s_n \leftarrow m \leftarrow (n \leftarrow \infty)$

لنختار الان عددا طبيعيا r - ا بحيث ان $|s_r - m| > \epsilon$. اذن $s < \alpha +$

$$| \check{\check{A}} \text{ ق (ع) دع} - m | = | s_r - m | + | m - s_r | > \epsilon + | m - s_r |$$

$$\geq |s_r - m| + |m - s_r| > \epsilon + \epsilon > \epsilon$$

اذن $Q \in [1, \infty)$ و $\left\{ Q(E)D = M \right\}$ مما يثبت النظرية.

المثال ١٩ .

سُتَبْت الآن ان $L = \left\{ (جاص) \text{ صـرد صـ تقاربي اذا كان } 1 < \right\}$. لقد بينا في المثال ١٧ ان $\left\{ \text{صـرد صـ تقاربي اذا كان } 1 < \right\}$ فمن النظرية ١٨ لكل $0 < \epsilon$ يوجد صـ بحيث ان

$\left\{ \text{صـرد صـ } > \epsilon \right\}$ لكل $ح < ب < \text{صـ} .$
ولكن $\left\{ جاص \mid 1 \geq \right\}$ لكل صـ $\in R$ ، اذن

$\left\{ (جاص) \text{ صـرد صـ } \mid 1 \geq \right\} \left\{ \text{صـرد صـ } > \epsilon \right\} .$
لكل $ح < ب < \text{صـ}$ ، اذن ل تقاربي ، من النظرية ١٨ .

وفي الحقيقة ان ل تقاربي لكل و $0 < \epsilon$ ، لكن الحالة $0 < \epsilon$ ليست سهلة .
سنعطي مثالا الآن يوضح ان التشابه بين التكامل اللانهائي التقاربي والمتسلسلة اللانهائية التقاربية ليس تشابها تاما .

المثال ٢٠ .

من النظرية ٢ ، الفصل ٥ ، وجدنا انه اذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربياً يكون $a_n \rightarrow 0$ (ر $\leftarrow \infty$) .
ولكن هناك تكاملات لا نهائية تقاربياً بحيث ان $Q(ص) \not\rightarrow 0$ عندما $ص \leftarrow \infty$. كمثال
على ذلك خذ $Q : [1, \infty) \leftarrow R$ حيث $Q(ص) = 1$ لكل $n \geq ص$ و $n + 2^{-n}$ (كل $n \geq N$) ، ولكن $Q(ص) = 0$ عدا ذلك .

بالرسم يتبين لنا ان $L = \left\{ Q(ص)D = \right\}$ (صـ) دص هو مجموع متسلسلة مساحات مستطيلات ،

ارتفاع كل مستطيل منها ١، وقواعدها هي $٢^{-١}$ ، $٢^{-٢}$ ، $٢^{-٣}$ ، ... لهذا فإن $٢^{-١} + ٢^{-٢} + ٢^{-٣} + \dots = ١$ ولكن ق (ص) $\neq ٠$ عندما ص $\leftarrow \infty$ ، لأن ق (ص) = ١ لعدد لا نهائي من ص، (على سبيل المثال ص = ١، ٢، ٣، ...). كذلك ق (ص) = ٠ لعدد لا نهائي من ص (على سبيل المثال ص = $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٧}{٧}$ ، $\frac{٩}{٧}$ ، ...). إذن ق (ص) لا يقترب من نهاية عندما ص $\leftarrow \infty$.

ويمكن تعريف التقارب المطلق للتكامل اللانهائي بنفس طريقة المتسلسلات:
 التكامل ذو التقارب المطلق. يقال ان التكامل $\int_a^\infty f(x) dx$ ق (ص) د ص ذو تقارب مطلق اذا وفقط اذا كان ق $\exists [A, \infty)$ لكل س $< A$ أو ق $\exists [A, \infty)$.

النظرية ١٩.

اذا كان $\int_a^\infty f(x) dx$ ق (ص) د ص ذا تقارب مطلق فانه يكون تقاربيا، لكن العكس غير صحيح بشكل عام.

البرهان.

يتبع من النظرية ١٨ انه لكل $\epsilon > ٠$ يوجد ص. $< A$ بحيث ان

$$L = \int_a^\infty f(x) dx \text{ ق (ص) د ص } \epsilon > \text{ لكل ح } \leq b < \infty.$$

$$\text{لكن } \int_a^\infty f(x) dx \text{ ق (ص) د ص } |L| \geq \epsilon, \text{ إذن ق } \exists [A, \infty).$$

لأثبت ان العكس غير صحيح بشكل عام نأخذ $L = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ص. فاذا

استخدمنا طريقة التكامل بالأجزاء وقربنا نحصل على:

$$\left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| \geq \frac{1}{\epsilon} > \epsilon \text{ لكل } \epsilon \leq \text{ب} < \frac{1}{\epsilon},$$

اذن ل تقاربي، من النظرية ١٨. لكن ل ليس ذا تقارب مطلق لانه لكل $n \in \mathbb{N}$ ، اذا كتبنا

$$= \pi(1 - \pi), \text{ ب} = \pi \text{ ر} = \pi \text{ نحصل على}$$

$$\left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right|$$

$$= \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \left| \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right|$$

لان $\sum r^{-1}$ تباعدي.

سنعرض الآن فكرة التكامل المعتل بمثال. لنكتب

$$l = \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}}$$

لا معنى لما كتبناه كتكامل ريماني، لان $\frac{1}{\sqrt{\text{دص}}}$ غير معرف عند الصفر. حتى لو عرفنا ق عند ص

$= 0$ بطريقة خاصة بحيث ق (٠) $\exists R$ وق (ص) $= \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}}$ ، $0 < \text{ص} \leq 1$ ، فان ق يكون

غير محصور على $[0, 1]$. اذن ق $\notin [0, 1]$.

فلكي نتمكن من إعطاء معنى لـ نفرض ان $0 < \text{ص} \leq 1$ ونأخذ النهاية عندما س

$$\left| \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}}$$

س $\leftarrow 0$ لهذا فانه من الطبيعي ان نقول ان «التكامل المعتل» ل موجود (او تقاربي)، ونعرف

$$\left| \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} \right| = \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{دص}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{دص}}}$$

ويشكل عام فاننا نعرف التكامل المعتل كما يلي:

التكامل المعتل: افرض ان ق : (أ، ب] $\leftarrow R$ ، وان ق $\exists [س، ب]$ لكل س $\in (أ، ب]$

، ب. نقول ان التكامل المعتل $\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص)} \end{array} \right\}$ د ص موجود اذا وفقط اذا كانت توجد

نحاس $\leftarrow + \left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = ل ، حيث ل } \exists R . \end{array} \right\}$

عندها نكتب $\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = ل ، أوللتأكيد نكتب} \end{array} \right\}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = ل .} \end{array} \right\}$

وبطريقة مشابهة اذا كان ق : [أ ، ب) $\leftarrow R$ ، ق $\exists R$ [أ ، س) لكل س \exists [أ ،

ب) ، وكانت

نحاس $\leftarrow ب \left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = م} \end{array} \right\}$

فاننا نكتب

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = م} . \end{array} \right\}$

كذلك ، اذا كان ق $\exists R$ [س ، ص) لكل أ $> س > ص$ ب وكان يوجد ح \exists [أ ، ب] بحيث ان

ي $= \left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص وي} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص موجودان فاننا نعرف التكامل} \end{array} \right\}$

المعتل على [أ ، ب] بر

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص = ي} + ي . \end{array} \right\}$

وهناك تكاملات هامة (مثل التكامل الذي يعرف اقتران جاما) تكون معتلة عند احدى نهايتي التكامل وتكون لا نهائية عند الاخرى . لهذا فان تكاملا من نوع

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص} \end{array} \right\} = ل$

يكون موجودا (أو تقاربيا) اذا كان ق : (أ ، ∞) $\leftarrow R$ ، ق $\exists R$ [س ، ص) لكل س ،

ص بحيث ان $أ > س > ص$ ، وكان يوجد $ح < أ$ بحيث ان
 $١م = \left[\begin{array}{c} ق \\ + \end{array} \right] (ص) دص = ٢م$ ، $٢م = \left[\begin{array}{c} ق \\ - \end{array} \right] (ص) دص$ موجودان عندها نعرف $ل = ١م + ٢م$.

المثال ٢١ .

إذا كان $ق (ص) = ص^{-١}$ فان $ق$ غير قابل للتكامل وغير قابل للتكامل المعتل على ١ ،
 [١] . وكونه غير قابل للتكامل واضح، وإذا كان $٠ > س > ١$ فان

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{دص}{ص} = -لوس \leftarrow \infty (س \leftarrow +٠) \\ \text{لهذا فان التكامل المعتل } \left[\begin{array}{c} ١ \\ - \end{array} \right] ص^{-١} دص \text{ غير موجود.} \end{array} \right.$$

المثال ٢٢ .

$$\left\{ \begin{array}{l} ص^{-٢} دص = \frac{١}{١-س} \text{ (عندما } ١ > س \text{)، لانه اذا كان } ٠ > س > ١ \text{ فان} \\ ص^{-٢} دص = \frac{١-س^{-١}}{١-س} \leftarrow \frac{١}{١-س} (س \leftarrow +٠) \end{array} \right.$$

المثال ٢٣ .

$$\left\{ \begin{array}{l} لو (ص) دص = ١-س \text{، لانه اذا كان } ٠ > س > ١ \text{ فان} \\ لو (ص) دص = [ص لوص - ص] س^{-١} \\ ١-س + س - س لوس = \\ ولس لوس \leftarrow ٠ \text{ عندما } س \leftarrow +٠ \end{array} \right.$$

والنظرية التالية تساعد احيانا في اثبات وجود التكامل المعتل . سوف ندرس الحالة التي

تتعلق بـ \mathbf{A} عند النهاية السفلى للتكامل .

النظرية ٢٠ .

افرض ان ق : $(\mathbf{A} , \mathbf{B}) \leftarrow \mathbf{R}$ ، ق $\ni \mathbf{R} [\mathbf{B} , \mathbf{A}] > \mathbf{S} > \mathbf{B}$ وق (ص) \leq ،
 $\mathbf{A} > \mathbf{S} \geq \mathbf{B}$. اذا كان يوجد عدد ثابت م بحيث ان

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص} \geq \text{م لكل س} \ni (\mathbf{A} , \mathbf{B}) , \dots \dots \dots (٣٣) \end{array} \right.$$

فان $\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص} \end{array} \right\}_{+1}$ يكون موجودا .

البرهان .

لنرمز للتكامل في (٣٣) بـ هـ (س) . فمن مسلمة الحد الاعلى فانه يوجد للمجموعة سـ هـ
 $= \{ \text{هـ (س) | س} \ni (\mathbf{A} , \mathbf{B}) \}$ اصغر حاصر اعلى ع . اذن هـ (س) \geq ع لكل س $\ni (\mathbf{A} , \mathbf{B})$ ولكل و $<$ يوجد س . $\ni (\mathbf{A} , \mathbf{B})$ بحيث ان هـ (س) $<$ ع - و . اذا كان $\mathbf{A} >$
 $\mathbf{S} > \mathbf{S}$. فان هـ (س) \geq هـ (س) ، لان ق (ص) \leq ، لهذا فان
 $\mathbf{E} - \mathbf{W} > \mathbf{H} - \mathbf{S}$. هـ (س) \geq هـ (س) \geq ع $>$ ع + و .
اي ان هـ (س) - ع $>$ واذا كان $\mathbf{A} > \mathbf{S} > \mathbf{S}$. ، مما يعطي ان هـ (س) \leftarrow ع عندما
 $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{A}$. اذن $\left\{ \begin{array}{l} \text{ق (ص) د ص} = \mathbf{E} , \text{ وهكذا يتم البرهان .} \end{array} \right\}_{+1}$

المثال ٢٤ .

ستثبت ان التكامل المعتل $\left\{ \begin{array}{l} \text{جـ صـ} \end{array} \right\}_{+1}$ د ص موجود . فمن المثال ٤ في الفصل ٩ نعرف

ان حاصل $\langle \text{ص لكل ص} \rangle < 0$ ، لهذا فانه لكل $س \in (0, 1)$ ،

$$\left\{ \frac{\text{جاص} - \text{دص}}{\text{ص}} > 1 - \text{ص} = 1 - \text{ص} > 1 \right\}$$

اذن (٣٣) تتحقق باخذ $م = 1$.

المثال ٢٥ [اقتران جاما].

$$٢ (م) = \left\{ \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص تقاربي لكل } م < 0 \right\}$$

لانيات ذلك نأخذ التكاملات على $(0, 1]$ وعلى $[1, \infty)$. لكل ص كبيرة كبرا

كافيا، فنحصل على $0 < \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} \geq \text{ص}^{1-\text{ص}} \text{ واذن:}$

$$\left\{ \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} \text{ ذو تقارب مطلق، واذن هو تقاربي.} \right\}$$

الآن نأخذ $0 < س < 1$ ، لهذا فان $0 < \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} \geq \text{ص}^{1-\text{ص}} \geq 1$ ، اذن

$$\left\{ \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} > 1 - \text{ص} = 1 - \text{ص} > \frac{1}{\text{ص}} \right\}$$

كما يعطي ان $\left\{ \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} \right\}$ موجود من النظرية ٢٠.

تمارين ١٠ - ٤

(نجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - افرض ان $هـ \in [١, \infty)$ و $هـ(س) < 1 - س \leq ١$. اذا كان $ق \in [١, س]$ لكل

$س < ١$ او $ق(س) \leftarrow م(س) \leftarrow \infty$ فثبت ان $ق \in [١, \infty)$.

استخدم هذه النتيجة لانيات ان $\left\{ \text{ص ص}^{1-\text{ص}} \text{ دص}^{1-\text{ص}} \text{ تقاربي لكل } ح \in \right\}$

R.

٢ - اثبت وجود

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \text{ د ص ، وب } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) \text{ جا (ص) د ص .}$$

يرد هذان التكاملان في الفيزياء ، فالتكامل أ يظهر عند دراسة قانون ماكس بلانك لاشعاع الاجسام السوداء . والتكامل ب ويسمى تكامل فرزنال ، ويرد في نظرية الانعطاف في البصريات .

٣ - اذا كان $0 < \epsilon$ ، فاثبت ان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) = \frac{2}{1} = 2 \text{ د ص ، } \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) > 1 + \frac{1}{2^n} \text{ ق (ا) حيث } 0 < \epsilon < \frac{1}{2} .$$

٤ - اثبت وجود $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right)$ لو (خاص) د ص وجد قيمته .

٥ - اثبت ان $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) = 2$ د ص موجود ، لـ $0 < \epsilon < \pi$ اثبت ان

$$\text{جا (٢ ن س) = } 2 \text{ جاس } \sum_{i=1}^n (2 - 1) \text{ س ، ثم استنتج ان}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) = 2 \text{ جا (٢ ن س) ظئاس د ص } = \frac{\pi}{4} .$$

بدراسة لـ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) = 2$ د ص عندئذ $n \rightarrow \infty$ ، اثبت ان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) = \frac{\pi}{4} \text{ خاص د ص } = \frac{\pi}{4} .$$

٦ - افرض ان A ، B اعداد حقيقية لا تساوي الصفر . ما هي التحديدات التي يجب ان توضع على A ، B بحيث ان التكامل

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 - 2^{-n}} \right) \text{ جا (ب ص) د ص يكون موجودا}$$

تستخدم هذه النتيجة في الاحصاء والاحتمالات واجزاء عديدة من الرياضيات التطبيقية .
 واخيرا نناقش فكرة طول المنحنى ونشتق قاعدة سمبسن للتكامل العددي للاقتربات .

النظرية ٢١ .

إذا كان $1 > s \geq 1$ فاننا نحصل على التسلسلة اللانهائية

$$\text{لو } (1+s) = s - \frac{s^1}{4} + \frac{s^2}{9} - \frac{s^3}{16} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)^2} \dots \dots \dots (34)$$

البرهان .

لـ $s < 1$ تكون مشتقة لو $(1+s)$ هي $(1+s)^{-1}$ ، لهذا اذا كان $s < 1$ يكون

$$\begin{aligned} \text{لو } (1+s) &= \left[\frac{ds}{s+1} = (1-s) + s - s^2 + \dots + (-s)^{n-1} + \dots \right] \\ \text{ب } (n) \text{ دص حيث } b_n &= \frac{(-s)^n}{s+1} . \text{ اذن} \\ | \text{لو } (1+s) - (s - \frac{s^1}{4} + \frac{s^2}{9} - \frac{s^3}{16} + \dots + (-s)^{n-1} + \frac{(-s)^n}{s+1}) | &= \\ &= \left| \frac{s^n}{s+1} \right| \end{aligned}$$

لائبات (34) علينا ان نبرهن انه اذا كان $1 > s \geq 1$ فان القيمة المطلقة للتكامل تقترب

من الصفر عندما $n \rightarrow \infty$.

الآن اذا كان $0 \leq s \leq 1$ فان

$$\left| \frac{s^n}{s+1} \right| \geq \left[s^n \text{ دص} = \frac{s^{n+1}}{s+1} \geq \frac{1}{s+1} \right] \left(n \rightarrow \infty \right)$$

النظرية ٢٣ [اختبار التكامل للمتسلسلات].

افرض ان $q: [1, \infty) \leftarrow R$ متناقص وغير سالب. اذن يوجد $M \in R$ بحيث ان

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(n) < \infty$$

حيث $0 \leq M < \infty$. (١).

كذلك، اذا كان q كما هو مذكور اعلاه فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} q(n)$ تكون تقاربية اذا وفقط اذا كان التكامل اللانهائي $\int_1^{\infty} q(x) dx$ تقاربيا.

البرهان

من النظرية ٦، (٢) فان $q \in [1, \infty)$ لكل $s < 1$. وبما ان q متناقص فانه لكل n

$q(n) \leq q$ يكون

$$\begin{aligned} q(n) - q(n-1) &= q(n) - q(n-1) \\ &= q(n) - q(n-1) \end{aligned}$$

لهذا فان المتتالية $(q(n))$ متناقصة. كذلك، $q(n) \leq q(n-1)$ على $[1, \infty)$ تعطي

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q(n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} q(n)$$

وهذا يكافئ

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q(n-1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q(n)$$

اذن $0 \leq q(n) \leq q(n-1) \leq q(n)$. لهذا فان $(q(n))$ متناقصة وخصوصية من اسفل بالصفر،

اذن $(ح_n)$ تقاربية ولنقل $ح_n \leftarrow م$ $(ن \leftarrow \infty)$. عندما $ن \leftarrow \infty$ في $0 \geq ح_n \geq 1$ (١) فاننا نحصل على $0 \geq م \geq 1$.

اخيرا، اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} (ر)$ تقاربية مجموعها اقل من ١ نختار $N \ni$

بحيث ان $ن < م$ ونحصل على

$$\begin{aligned} ك (س) &= \sum_{n=1}^{\infty} (ص) ق (ص) د ص \geq \sum_{n=1}^N (ص) ق (ص) د ص \\ &= \sum_{n=1}^N (ص) ق (ص) د ص - ح_n \geq \sum_{n=1}^N (ر) ق (ر) \geq 1 \end{aligned}$$

اذن، وبما ان $ك (س)$ تتزايد بازدياد $س$ فاننا نحصل على ان $ك (س)$ يقترب من نهاية عندما $س \leftarrow \infty$.

وبالعكس، اذا كان $ل = \sum_{n=1}^{\infty} (ص) ق (ص) د ص$ تقاربيا فان

$$\sum_{n=1}^N (ر) ق (ر) د ر = \sum_{n=1}^N (ص) ق (ص) د ص + ح_n \leftarrow ل (ن \leftarrow \infty),$$

لذا فان $\sum_{n=1}^{\infty} (ر) ق (ر) د ر$ تقاربية، وهذا يثبت النظرية.

ملاحظة.

ان النتيجة المتعلقة بتقارب $(ح_n)$ لا تفترض تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} (ر) ق (ر) د ر$ او تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} (ص) ق (ص) د ص$.

المثال ٢٦.

(١) باخذ $ق (ص) = ص^{-1}$ في اختبار التكامل نرى ان

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots - \left(\frac{1}{n}\right) - ل \leftarrow \gamma \text{ عندما } ن \leftarrow \infty$$

العدد γ يسمى ثابت أوليفر قيمته هي $\gamma = 0.577 \dots$.

كذلك بما ان $\left[\gamma \right]$ ص 1^- د ص تباعدي فانه يتبع ان $\sum \gamma^n$ و 1^- تباعدي.

(٢) اذا اخذنا q (ص) = ص 1^- حيث $m < 1$ فان تقارب $\sum \gamma^n$ يتبع من تقارب

$\left[\gamma \right]$ ص 1^- د ص.

(٣) المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ تباعدية لان

$$\left[\gamma \right] \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1) \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} \rightarrow 0$$

عندما $n \rightarrow \infty$.

قبل برهنة النظرية التالية فاننا سنذكر رمزا مفيدا.

افرض ان (a_n) ، (b_n) متاليتان من الاعداد الحقيقية او المركبة، حيث $|b_n| < \infty$.

لكل $n \in \mathbb{N}$ قد لا تكون المتاليات تقاربية. وسوف نكتب

$$a_n \sim b_n$$

اذا وفقط اذا كان يوجد عدد $m \neq 0$ بحيث ان $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow m$ (ن $\rightarrow \infty$).

لهذا، وعلى سبيل المثال، فان $a_n = 1 + n + n^2 \sim n^2$ و

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}. \text{ اذا كان } \frac{1}{b_n} \rightarrow 0 \text{ (ن } \rightarrow \infty) \text{ فاننا نكتب } a_n \sim b_n$$

النظرية ٢٤ [صيغة ستيرلج للمضروب $n!$]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

البرهان .

عرف $u_n = \frac{n!}{n^{\frac{1}{n}}}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. سوف نثبت ان (u_n) متناقصة ومحصورة

من اسفل بعدد ثابت موجب . من هذا يتبع ان $u_n \leftarrow m$ عندما $(n \rightarrow \infty)$ حيث $m > 0$ ، ثم

نستخدم التكامل لاثبات ان $m = \sqrt[n]{n!}$ مما يثبت صيغة ستيرلنج .

نبدأ من النتيجة انه لكل $|s| > 1$ فان

$$لو (\frac{s+1}{s-1}) = (s + \frac{s^2}{4} + \frac{s^4}{8} + \dots) ،$$

وهذه نحصل عليها من النظرية ٢١ . لهذا اذا كان $s > 1$ فان

$$\frac{1}{s^2} > 0 \quad لو (\frac{s+1}{s-1}) = 1 - (\frac{s^2}{(s-1)^3}) > 0$$

$$وبوضع $s = \frac{1}{1+n^{\frac{1}{n}}}$ نحصل على$$

$$(37) \dots \dots \frac{1}{(1+n)^{\frac{1}{n}}} > 1 - (\frac{1}{n} + 1) لو (\frac{1}{1+n^{\frac{1}{n}}}) > 0$$

وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{1}{1+n^{\frac{1}{n}}} - (\frac{1}{n} + 1) = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}+1}}$$

$$اذن لو (\frac{1}{1+n^{\frac{1}{n}}}) < 0 \text{ من (37) . اذن } \frac{1}{n^{\frac{1}{n}+1}} < 1 \text{ وهذا يعطي ان (أ)}_n$$

متناقصة .

باستخدام (37) ثانية نحصل على

$$لو \frac{1}{1+n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{1}{n}+1}}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+j}.$$

$$\frac{1}{1+j} > \frac{1}{(1+j)^2} \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+j} >$$

اذن $\frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+j} \leq \frac{11}{12}$ ، وبما ان $(\frac{11}{12})^n$ متناقصة فإنه يوجد عدد $R \in \mathbb{R}$ بحيث ان $\frac{1}{1+n} \leftarrow \infty$ و $\frac{11}{12} \leq \frac{11}{12} < \dots$.

بقي ان نثبت ان $m = \sqrt[n]{n}$ وهذا غير واضح، سنعمل ذلك بدراسة $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n^2}$ الان $\frac{1}{n}$ $\leftarrow m$ و $\frac{1}{n^2}$ $\leftarrow m$ ، اذن

$$(38) \dots (\infty \leftarrow n) \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leftarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \equiv \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{n}}{1 \cdot (\sqrt[n]{n})} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}$$

يكفي ان نثبت ان $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ المعرفة بـ (38) تحقق $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leftarrow \infty$.
لنكتب $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$ جان من دس كما في المثال ١١. بما ان $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2}$ على $[0, \infty)$ فان $\left[\frac{\pi}{4} \right]$

$$(39) \dots \frac{1}{1+n^2} + 1 = \frac{1-n^2}{1+n^2} \geq \frac{1-n^2}{1+n^2} \geq 1$$

نحصل على التساوي الأخير من معادلة المثال ١١ عندما يكون n فرديا. من (39) نحصل

$$\text{على } \frac{1}{1+n^2} \leftarrow 1, (\infty \leftarrow n), \text{ لهذا ومن المثال ١١ نحصل على}$$

$$\frac{1}{1+n^2} \leftarrow \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{(1-n^2) \times \dots \times 3 \times 1} \right) \cdot \frac{1}{\pi} \equiv \frac{1}{1+n^2} \leftarrow \frac{1}{\pi}$$

عندما $n \leftarrow \infty$.

وباجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على:

$$\text{حـ} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} (15)}{1(2)} \right)^2 \frac{1}{1+2^2} \leftarrow 1 \text{ عندما } n \rightarrow \infty.$$

اذن

$$\sqrt[n]{1 \leftarrow (n \leftarrow \infty)} \dots \dots (40)$$

يتبع من (40) ان ب_n المعرفة في (38) تحقق ب_n ← √[n]{1 ← (n ← ∞)}، وبهذا تم البرهان.

المثال ٢٧.

يتكرر ظهور التعبير ل_n = (2ⁿ - 2) في نظرية الاحتمالات ويتعلق بالمشي العشوائي. ويتطلب معرفة سلوك ل_n (احتمال حدث معين) لقيم كبيرة ل_n.

من صيغة سترنج نحصل على

$$1 \sim \sqrt[n]{2^n \pi} \sim \sqrt[n]{2^n \pi} \sim 1(2), \quad 1 \sim \sqrt[n]{2^n \pi} \sim 1(2), \quad \text{اذن}$$

$$L_n = \frac{1(2^n)}{2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} (15)} \sim \frac{2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} (2^n) \pi \sqrt[n]{2^n \pi}}{2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n \pi \sqrt[n]{2^n \pi}} = \frac{1}{\pi \sqrt[n]{2^n \pi}}$$

في الحقيقة فان $\frac{1}{\pi \sqrt[n]{2^n \pi}}$ هو تقريب جيد ل_n حتى لقيم صغيرة ل_n. على سبيل المثال، ل_n = 1762، والتقريب هو 1784.

وفكرة المنحنى في المستوى المركب فكرة مألوفة ولها اهمية خاصة عند دراسة التحليل العقدي (المركب). لذا سنعرف ما نعنيه بـ «المنحنى» ونتحدث عن فكرة المنحنى القابل للقياس (اي الذي له طول). ولنوع معين من المنحنيات، التي سندعوها بمنحنيات ممهدة، سنعطى صيغة تكاملية تمكننا من حساب اطوالها.

المنحنى.

المنحنى م في \mathbb{C} هو اقتران متصل م : [a, b] → \mathbb{C} حيث [a, b] فترة مغلقة في R.

مخطط يعرف على انه $m([a, b]) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$. سنرمز لمخطط m بالرمز m^* .

المتحنى القابل للقياس .

يقال ان المتحنى m في \mathbb{R} قابل للقياس اذا وفقط اذا كان يوجد عدد ثابت ϵ بحيث ان

$$\sum_{i=1}^n |m(x_i) - m(x_{i-1})| \leq \epsilon$$

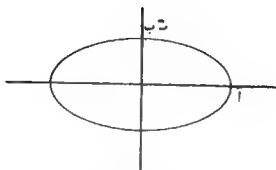
لجميع التجزئات $J = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ حيث $x_0 = a, x_n = b$.
 $\epsilon > 0$. ويعرف طول المتحنى القابل للقياس على انه
 $L(m) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$.
 حيث يؤخذ اصغر حاصر علوي على جميع التجزئات J لـ $[a, b]$.

المثال ٢٨ .

عرف $m : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $m(x) = \sin x$. اذن m^* هو محيط دائرة الوحدة في \mathbb{R} . نحصل من البند ٢ ، الفصل ٩ ، على ان m قابل للقياس وان $L(m) = \pi$.

المثال ٢٩ .

عرف $m : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $m(x) = \sin x$. اذن m^* هو محيط دائرة الوحدة في \mathbb{R} . نحصل من البند ٢ ، الفصل ٩ ، على ان m قابل للقياس وان $L(m) = \pi$.
 عرف $m : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $m(x) = \sin x$. اذن m^* هو محيط دائرة الوحدة في \mathbb{R} .
 عرف $m : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $m(x) = \sin x$. اذن m^* هو محيط دائرة الوحدة في \mathbb{R} .
 عرف $m : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ بـ $m(x) = \sin x$. اذن m^* هو محيط دائرة الوحدة في \mathbb{R} .



ان عملية ايجاد صيغة لطول القطع الناقص اصعب مما يتوقع المرء وفي الحقيقة فانه لا يوجد صيغة سهلة . على اي حال فان النظرية التالية تمكننا من كتابة صيغة تكاملية لطول القطع الناقص .

ان النظرية تعالج حالة اعم وهي كون مشتقة المنحنى م متصلة . اذا كان ق ، هـ د [ا ، ب] وكان ل (ص) = ق (ص) + ت هـ (ص) فاننا نعرف

$$\int_a^b \text{ل (ص) دص} = \int_a^b \text{ق (ص) دص} + \int_a^b \text{ت هـ (ص) دص} .$$

النظرية ٢٥ .

افرض ان م : [ا ، ب] \rightarrow \mathbb{C} منحنى بحيث ان م متصل على [ا ، ب] . اذن م قابل للقياس وطوله معطى بـ

$$\text{ط (م)} = \int_a^b |م'| د\epsilon \quad (٤١)$$

البرهان .

اكتب م (ع) = س (ع) + ت ص (ع) حيث س (ع) ، ص (ع) حقيقيان و $\epsilon \geq 0$
 ب . اذن م' = س' + ت ص' واتصال م' يعطي اتصال س' ، ص' . لهذا فان التكامل في (٤١) موجود .

خذ اي تجزئة جـ لـ [ا ، ب] ، واكتب

$$\Delta \epsilon_1^- = \epsilon_1^- - \epsilon_2^- , \Delta \epsilon_2^- = \epsilon_2^- - \epsilon_3^- , \dots , \Delta \epsilon_{n-1}^- = \epsilon_{n-1}^- - \epsilon_n^-$$

الآن، وحيث المجموع مأخوذ لـ $1 \geq r \geq n$ ، والتكامل على $[ع_1, ع_r]$ ، نحصل

على

$$\int \Delta |م| ر |ا| \int |م| (ع) د ع |ا| \int |م| (ع) ا د ع \\ = \int |م| (ع) ا د ع ،$$

اذن م قابل للقياس.

لأثبت (٤١) علينا ان نبرهن انه لكل $0 < \epsilon$ يوجد تجزئة ج لـ $[أ, ب]$ بحيث ان

$$\int \Delta |م| ر |ا| \int |م| (ص) ا د ص - و (٤٢)$$

بما ان م منتظم الاتصال على $[أ, ب]$ فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|م(ح) - م(ف)|$

(ف) $|ا| ح ي و حيث ي = \frac{1}{3(ب-ا)}$ ، اذا كان $|ا - ح| < \delta$ ، الآن نختار ج بحيث ان $اك \{ \Delta ع ر \} > \delta$.

$$\text{اذن } \int |م| (ع) ا د ع = \int |م| (ع) - م(ع) + م(ع) د ع ا د ع$$

$$\geq \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) د ع ا$$

$$= \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) - م(ع) + م(ع) د ع ا$$

$$\geq \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) د ع ا$$

$$= \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) د ع ا .$$

اذن؛

$$\int |م| (ع) ا د ع \geq \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) د ع ا + \int |م| (ع) د ع ا$$

وهذا يعطي (٤٢)، وهذا يثبت النظرية.

المثال ٣٠ [التكامل الناقص].

لنأخذ القطع الناقص المعروف بـ م (ع) = أ جاع + ت ب جناع كما في المثال ٢٩، وافرض

ان $0 < ب < أ$. والاختلاف المركزي للقطع الناقص يعرف $ز = \sqrt{1 - \frac{ب^2}{أ^2}}$. لهذا

فان $0 \leq ز < 1$ وب $أ^2 = أ^2 (1 - ز^2)$. وإذا كانت $ز = 0$ ، فان القطع الناقص يصبح دائرة نصف قطرها أ.

فمن النظرية ٢٥، ونمثال القطع الناقص نحصل على ان طول القطع الناقص يساوي

$$\begin{aligned} ٤ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{أ^2 - ب^2 \sin^2 \theta} d\theta &= ٤ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{أ^2 (1 - ز^2 \sin^2 \theta)} d\theta \\ &= ٤ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{أ^2 (1 - ز^2 \sin^2 \theta)} d\theta \quad (٤٣) \end{aligned}$$

يسمى التكامل في (٤٣) بالتكامل الناقصي. وإذا كان $ز = 0$ فان طول القطع الناقص (أي الدائرة) هو $٤ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{أ^2} d\theta = ٢\pi أ$ كما نتوقع. أما اذا كان $0 < ز < 1$ فانه من غير الممكن كتابة التكامل بدلالة اقترانات اولية معروفة. ولكن اذا كان $0 < ز < 1$ فانه بالامكان كتابة سلسلة الاقتران المكامل في (٤٣). ونجد ان طول القطع الناقص يساوي

$$٢\pi أ \left(1 - \frac{ز^2}{٢} + \frac{٣ز^4}{٦٤} - \frac{٥ز^6}{٢٠٤٨} + \dots \right)$$

الحدود الاولى من هذه التسلسلة تعطى تقريبا لطول القطع الناقص على شرط ان لا يكون ز قريبا من ١.

قاعدة سمبسن

نهي هذا البند بمناقشة قاعدة سمبسن، وهي تعطي صيغة سهلة كثيرة الاستعمال في التقريب العددي للتكاملات المحددة.

سنبدأ بفرض ان $ق د ر [أ ، ب]$ وانه تم تنصيف الفترة المغلقة $[أ ، ب]$ الى $[أ ، ح]$ و $[ح ، ب]$ حيث $ح = \frac{أ+ب}{٢}$. نرغب في إيجاد تقريب عددي لـ $\int ق (س) دس$.
والفكرة الاساسيه هي استبدال ق باقتران تربيعي ك يمر عبر النقاط الثلاث (أ)
، ق (أ) ، (ح ، ق (ح)) ، (ب ، ق (ب)) اي ان ك يحقق ك (أ) = ق (أ) ، ك (ب) = ق (ب) ، ك (ح) = ق (ح) . عندها ويوضع تحديدات مناسبة على ق نرى ان
 $\int ك (س) دس$ هو تقريب معقول لـ $\int ق (س) دس$.
الآن ان الاقتران التربيعي ك المعروف بـ

$$ك (س) = ق (أ) \frac{(س-ح)(س-ب)}{(أ-ح)(أ-ب)} + ق (ح) \frac{(س-أ)(س-ب)}{(ح-أ)(ح-ب)} + ق (ب) \frac{(س-أ)(س-ح)}{(ب-أ)(ب-ح)}$$

يحقق ق (س) = ك (س) لكل س = أ ، ب ، ح . كذلك ، ان التكامل المباشرين ان

$$\int ك (س) دس = \frac{أ-ب}{٢} ق (أ) + \frac{١}{٢} ق (ح) + \frac{ب-أ}{٢} ق (ب) .$$

ان قاعدة سمبسون باسطة صورها هي استبدال

$$\int ق (س) دس \approx \frac{أ-ب}{٢} ق (أ) + \frac{١}{٢} ق (ح) + \frac{ب-أ}{٢} ق (ب) (٤٤)$$

حيث $ح = \frac{أ+ب}{٢}$. لم نذكر هنا شيئاً عن كون التقريب ذا قيمة . وفي النظرية ٢٦ سوف

نعطي حصراً للمخطأ في قاعدة سمبسون ، لكن قبل ذلك سنوضح بمثال كيف تستعمل القاعدة عملياً .

المثال ٣١ .

لنحاول تقريب $\int_١^٢ س^{-١} دس = \ln ٢$ باستخدام قاعدة سمبسون : باستخدام (٤٤)

حيث $أ = ١$ ، $ب = ٢$ وق (س) = $س^{-١}$ فإن التقريب يكون

$$٠,٦٩٤٤٤... = \frac{٢٥}{٣١} = \left(\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} \times ٤ + ١ \right) \frac{١}{٢}$$

وللحصول على نتيجة افضل نأخذ $ح = \frac{٣}{٢}$ ونكتب

$$\left[\frac{٢}{س} + \frac{دس}{س} \right] + \left[\frac{دس}{س} \right] = \frac{٢}{س} \quad (٤٥)$$

نم تطبيق قاعدة سمبسن على كل تكامل على يسار (٤٥). ويكون التقريب

$$\frac{١-ب}{١٧} \text{ ق (أ) } + ٢ \text{ ق (ح) } + ٤ \text{ ق (} \frac{١+ح}{٢} \text{) } + ٤ \text{ ق (} \frac{١+ح}{٢} \text{) } + \text{ ق (ب) } (٤٦)$$

وهذا يساوي ٠,٦٩٣٢٥ عند تقريبه لحمس منازل عشرية.

وإذا قسمنا الفترة [١ ، ٢] الى ثمانية اجزاء متساوية فإن التقريب يكون ٠,٦٩٣١٥
 عند تقريبه لحمس منازل عشرية. وبما ان $٢ = ٠,٦٩٣١٤٧١$ ، فإننا نرى ان النتيجة الاخيرة
 «صحيحة» عند التقريب لحمس منازل عشرية.

والنظرية التالية تعطي تقريبا للخطأ في قاعدة سمبسون للاقتارات التي لها مشتقة رابعة
 محصورة.

النظرية ٢٦.

افرض ان ق ^(٣) \exists رول [أ ، ب] وان ق ^(٤) محصور على [أ ، ب] ، لنقل | ق ^(٤)

$$\text{ (س) } | \geq \text{ ي لكل س } \exists \text{ (أ ، ب) بوضع ح = } \frac{١+ب}{٢} \text{ ، و } \frac{١-ب}{٢} \text{ فان}$$

$$\left| \int \frac{٢}{س} - دس - \frac{٢}{٢} \text{ ق (أ) } + ٤ \text{ ق (ح) } + \text{ ق (ب) } \right| \geq \frac{٢}{٩} \text{ .}$$

حيث $|ب| \geq \frac{1}{n} \leq 1$. جرت العادة على كتابة (*) على صورة :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لون} + \gamma + r \left(\frac{1}{n} \right)$$

لأن $|ب|$ هي من «رتبة» $\frac{1}{n}$.

وبشكل عام اذا كانت $(س_n)$ ، $(ص_n)$ متساويتين حيث $ص_n \leq 0$ لكل $n \in N$ وكان

يوجد ثابت m بحيث ان $|س_n| \geq m$ لكل $n \in N$ ، فاننا نكتب $س_n = r(ص_n)$.

(٢) باستخدام المجاميع الجزئية و(*) اثبت ان

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)} = 2 - 2 \text{ لو } 2$$

$$(3) \text{ اثبت ان } \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = \text{لون} + \gamma + r \left(\frac{\text{لون}}{n} \right)$$

٤- يوجد في بحيرة عدد ثابت n ، غير معروف ، من السمك . افترض انه تم اصطياد ١٠٠٠ سمكة

سمكة ووضعت عليها علامات حمراء ثم اعيدت للبحيرة . ثم تم اصطياد ١٠٠٠ سمكة

اخرى ووجد على ١٠٠ منها علامات حمراء .

الآن يمكن ان يكون $n = 1900$ ، اي انه بقي ٩٠٠ سمكة بالضبط في البحيرة . ان

هذا غير محتمل ولكن ما هي درجة عدم الاحتمال هذه ؟ افترض ان n هوكون ١٠٠ سمكة

حمراء من صيد ١٠٠٠ ، وافترض ان $n = 1900$.

$$L = (1; \dots; 1) (1; \dots; 1)$$

اكتب ل بدلالة المضروبيات واستخدم صيغة ستيرلنج لاثبات ان ل يساوي 10^{-43} ، تقريبا ،

وهذا طبعاً احتمال صغير جداً .

٥- عرف $m(0) = 0$ ، $m(ص) = ص + ت$ ص جـ $\frac{1}{ص} \leq 0 < ص \geq 2$. اثبت ان m هو

منحنى غير قابل للقياس. ارشاد: لاثبات عدم القابلية للقياس خذ التجزئة:

$$J = \{0, \frac{1}{1-2^n}, \frac{1}{1-2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{1-2^2}, \frac{1}{1-2^1}, 1\}$$

حيث $n \in \mathbb{N}$ ، $n > 2$.

٦ - افرض ان $0 < \epsilon$ ثابت. ارسم مخططات المنحنيات (١) ، (٢) ، (٣) وتحقق من الطول المعطى:

(١) [الدائرة]

م (٤) = ϵ (ع - جاع) + ت أ (١ - جاع) حيث $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$ ، طوله ١٨.

(٢) [النجمة]

م (٤) = ϵ أ جتا^٢ع + ت أ جتا^٢ع حيث $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$ ، طوله ١٦.

(٣) م (٤) = ϵ + ت ($\frac{1}{\epsilon} + \frac{\epsilon^2}{4}$) حيث $1 \leq \epsilon \leq 3$ ، طوله $\frac{14}{3}$.

٧ - افرض ان ق (س) = ح + ك س + ل س + م س^٢ حيث ح ، ك ، ل ، م ثوابت.

اثبت أنه لهذا الاقتران تكون قاعدة سمبسون صحيحة تماماً وذلك بحساب قيمة $\int_m^b q(s) ds$

وإثبات انها تساوي $\frac{b-a}{4} \{ q(a) + 3q(\frac{a+b}{2}) + q(b) \}$.

٨ - افرض ان $q \in C^4$ (س) $| q \geq 0$ على (أ ، ب). قسّم [أ ، ب] الى ٢ اقساماً متساوية

حيث $b = a + 2\eta$ و $\eta = a + \eta$ و $\eta \geq 0$ ، بكتابة

$L = \int_a^b q(s) ds = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(s) ds$ ق (س) د س و $\eta = q(s_j)$ ، اثبت ان:

$$\left| 1 - \frac{2}{3} \{ \text{ص} + \text{ص}_{20} + 4(\text{ص}_1 + \text{ص}_3 + \dots) + 2(\text{ص}_3 + \text{ص}_5 + \dots) \} \right| \geq \frac{1 - (1 - \frac{1}{2})^n}{2880}.$$

٩- [قاعدة شبه المنحرف]

إذا كان $|ق(س)| \geq م$ على $[أ، ب]$ فاثبت ان

$$\left| \int_A^B ق(س) دس - \frac{1-ب}{2} \{ ق(أ) + ق(ب) \} \right| \geq \frac{2}{12} (ب - أ)^2.$$

بين هندسيا، ان $\frac{1-ب}{2} ق(أ) + ق(ب)$ هي مساحة شبه المنحرف الذي رؤسه على

النقاط $(أ، ٠)$ ، $(ب، ٠)$ ، $(أ، ق(أ))$ ، $(ب، ق(ب))$.

١٠- $[\pi، \pi]^2$ غير نسبيين

افرض، ان كان ممكنا، ان $\pi^2 \ni Q$ ، لنكتب $\frac{1}{ب} = \frac{1}{أ}$ حيث $أ، ب \ni N$. اختر

$$N \ni N \text{ بحيث ان } \frac{\pi^2}{10} > 1، \text{ خذ } ق(س) = \frac{س^2(1-س)}{10}. \text{ اثبت ان}$$

ق(٠)، ق(١) عدنان صحيحان لـ $ر = ٠، ١، ٢، \dots$ ومنه اثبت ان

$$ل = \pi^2 \int_0^1 ق(س) دس \text{ عدد صحيح.}$$

اثبت كذلك ان $٠ < ل < \frac{\pi^2}{10}$ مما يناقض كون ل عددا

صحيحاً. اذن π^2 يجب ان يكون عدداً غير نسبي. استنتج ان π عدد غير نسبي.

الفصل الحادي عشر

اقترانات بمتغيرين حقيقيين

سندرس في هذا الفصل الاتصال وقابلية التفاضل لاقترانات ذات قيم حقيقية معرفة على مجموعات جزئية من المستوى $R \times R$. نعرف ان $R \times R$ هي مجموعة الأزواج المرتبة (س، ص) حيث $s \in R$ ، $v \in R$. سوف نكتب R^2 بدلا من $R \times R$. لهذا فان $(0, 0)$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(-1, -1)$ ، (π, e) $\in R^2$

لتبسيط الامور سوف نحصر اهتمامنا باقترانات بمتغيرين حقيقيين اي باقترانات معرفة على مجموعات جزئية من R^2 . ولن نقوم اي مشكلة اساسية عند التعميم الى الاقترانات ذات n من المتغيرات الحقيقية، اي الاقترانات المعرفة على مجموعات جزئية من R^n . سنرمز لعناصر R^2 عادة بالرمز (a, b) وم (s, v) . وسنعرف المسافة بين l وم بالصيغة:

$$\|l - m\| = \sqrt{(a - s)^2 + (b - v)^2}.$$

والرمز $\theta = (0, 0)$ يرمز الى عنصر الصفر في R^2 (أي نقطة الاصل).

ونعرف معيار m على انه $\|m\| = \sqrt{m^2 - \theta}$ ، اذن

$$\|m\| = \|s\| = \|v\| = \sqrt{s^2 + v^2},$$

لكل $m \in R^2$. لهذا فان $\|m\|$ هي المسافة بين m ونقطة الاصل في R^2 . وسنرمز للكرة التي

مركزها l ونصف قطرها n بالرمز $K(l, n)$ حيث $l \in R^2$ ، $n > 0$ ، أي أن

$$K(l, n) = \{m \in R^2 \mid \|m - l\| > n\}.$$

وبصورة خاصة تسمى $K(\theta, 1)$ كرة الوحدة في R^2 ، ونقول ان المجموعة الجزئية H من R^2

مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل $l \in H$ يوجد كرة $K(l, n)$ (نق) $\subset H$.

المثال ١.

لتكن $H = \{m \in R^2 \mid s < 0, v < 0\}$. سوف نبين ان H مجموعة مفتوحة.

ان H هي، هندسيا الجزء المظلل في الرسم (أنظر الصفحة القادمة)

الآن لتأخذ $l \in H$ ، اذن $l = (a, b)$ ، $a < 0$ ، $b < 0$. افرض ان $n = \sqrt{a^2 + b^2}$ ،

اذن $n < 0$ ، $n \leq a$ ، $n \leq b$. سوف نثبت ان $K(l, n) \subset H$ ، ومن هذا نستنتج

ان H مفتوحة. لتأخذ $m \in K(l, n)$. اذن $\|m - l\| > n$ ، ومنها

$$|s - a| + |v - b| > n \geq n,$$

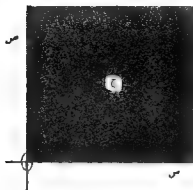
وهذا يعطي $|s - a| > n$ و $|v - b| > n$. اذن $s - a < -n$ و $v - b < -n$ و

$s < a - n$ ، لهذا فان $s < 0$ و $v < b - n$ و $v < 0$. وهذا يثبت ان $s < 0$ ، $v < 0$

$\Rightarrow m \in H$ ، مما يعطي $H = \{m \in R^2 \mid s < 0, v < 0\}$. من هذا يتبع ان H مفتوحة. ويمكن وبسهولة إثبات

ان $K(l, n)$ (نق) مجموعة مفتوحة،

وذلك باستخدام تعريف المجموعة المفتوحة. فكل ما نفعله هو اخذ $l \in K(l, n)$ و نثبت



انه يوجد لك (ى ، نَق) \supset لك (ل ، نَق) حيث $\text{نَق} < 0$. ويساعد الرسم على اختيار نَق مناسب .

لنعرف الآن اتصال الاقتران الحقيقي :

الاقتران المتصل على R^2 .

افرض ان سِه مجموعة جزئية من R^2 وغير خالية ، وافرض ان $ق : \text{سِه} \leftarrow R$. نقول ان $ق$ متصل على $ل$ \ni سِه اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon < 0$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon, ل)$ < 0 بحيث ان $||ل - م|| > \delta$ وم \ni سِه تعطي $|ق(ل) - ق(م)| > \epsilon$.

المثال ٢ .

عرف $ق : R^2 \leftarrow R$ - $ق(م) = \text{س.ص.}$ اذن $ق$ متصل على R^2 اي ان $ق$ متصل على كل نقطة $ل \ni R^2$. لاثبات ذلك افرض ان $\epsilon < 0$, ونخذ $\ni R^2$ وعرف $ح = 1 + |ا| + |ب| + |ص|$. $\delta = \text{أص} \{ \frac{\epsilon}{ح}, 1 \}$. اذن $||ل - م|| > \delta$ تعطي $|\text{س.ص.} - ا| > \delta$ و $|\text{س.ص.} - ب| > \delta$. اذن ويكتابة
 $\text{س.ص.} - ا = ب - ا + (\text{س.ص.} - ب) + ب - ا + (\text{س.ص.} - ب) + ب - ا + (\text{س.ص.} - ب) + ب - ا$
ويما ان $|\text{س.ص.} - ا| > 1$, نحصل على

$$|ق(م) - ق(ل)| \geq |ص - ب| + |ب| + |س - أ| + |أ| + |ص - ب|$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{\delta} |أ| + \frac{\epsilon}{\delta} |ب| + \frac{\epsilon}{\delta} >$$

اذن ق متصل على ل .

المثال ٣ .

عرف ق : $R \leftarrow^2 R$ بق(م) = $\frac{ص^2}{ص^1 + ص^2}$ لـ م $\neq \emptyset$ وق(\emptyset) = \emptyset . اذن ق

غير متصل على \emptyset . لو كان متصلا على \emptyset لوجد $\delta < \epsilon$ بحيث ان $||م|| < \delta > \epsilon$ تعطي |ق(م)| > 1 . الآن اختر م بحيث ان س = ص = $\frac{\delta}{4}$. اذن $||م|| = \frac{\delta}{4} = ص^2 + ص^1 > \frac{\delta}{4} > \frac{\epsilon}{4}$. اذن $||م|| > \delta$. ومنه |ق(م)| > 1 . ولكن اخترنا م بحيث ان ق(م)

$$= \frac{ص^2}{ص^1 + ص^2} = 1 . \text{ وهذا يناقض } |ق(م)| > 1 .$$

لاحظ هنا ان الاقتران الذي نحصل عليه بتثبيت ص = \emptyset هو اقتران متصل لـ س $\ni R$.

اي ان هـ : $R \leftarrow R$ بهـ (س) = ق(س) ، اذا كان س $\neq \emptyset$ ، هـ (\emptyset) = ق(\emptyset) = (\emptyset ، \emptyset) هو اقتران متصل . كذلك ق(\emptyset ، ص) هو اقتران متصل لـ ص $\ni R$. يوضح هذا المثال انه يمكن لاقتران بمتغيرين حقيقيين ان يكون متصلا عند نقطة بكل من المتغيرين على حدة (اي بمتغير واحد مع تثبيت الآخر) دون ان يكون متصلا عند تلك النقطة كاقتران بمتغيرين .

ندرس الآن فكرة التفاضل لاقتران بمتغيرين حقيقيين . ولتبسيط الامور سنقصر اهتمامنا على الاقترانات المعرفة على مجموعات جزئية مفتوحة من R^2 . ومعظم الحالات العملية الهامة هي من هذا النوع .

الاقترانات في R^2 القابلة للتفاضل

افرض ان \mathcal{C} مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من R^2 . وافرض ان $\mathcal{L} \ni \mathcal{C}$ وان $\mathcal{C} : \mathcal{C} \leftarrow R$. نقول ان \mathcal{C} قابل للتفاضل عند \mathcal{L} اذا وفقط اذا وجد عدنان حقيقيان \mathcal{C} ، وبحيث انه لكل $\mathcal{C} < \mathcal{C}$ يوجد $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) < \mathcal{C}$ بحيث ان $\|\mathcal{C} - \mathcal{L}\| < \mathcal{C}$ و $\mathcal{C} \ni \mathcal{C}$ تعطي $\mathcal{C}(\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{L}) - \mathcal{C}(\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{C}) \geq \mathcal{C} \|\mathcal{C} - \mathcal{L}\|$.

المشتقة التفاضلية

اذا كان $\mathcal{C} : \mathcal{C} \leftarrow R$ قابلا للتفاضل عند $\mathcal{L} \ni \mathcal{C}$ فاننا نعرف مشتقة \mathcal{C} عند \mathcal{L} على انها الزوج المرتب $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

التفاضلة

اذا كان $\mathcal{C} : \mathcal{C} \leftarrow R$ قابلا للتفاضل عند $\mathcal{L} \ni \mathcal{C}$ فان التفاضلة دق \mathcal{C} عند \mathcal{L} تعرف على انها الاقتران دق $\mathcal{C} : \mathcal{C} \leftarrow R$ المعطى بـ
دق $\mathcal{C}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(\mathcal{C}) + \mathcal{C}(\mathcal{C})$ ، حيث $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{C}) \ni \mathcal{C}$.

المثال ٤.

عرّف $\mathcal{C} : \mathcal{C} \leftarrow R$ بالصيغة $\mathcal{C}(\mathcal{C}) = \|\mathcal{C}\|$. ان \mathcal{C} قابل للتفاضل على R^2 . اي ان \mathcal{C} قابل للتفاضل عند كل نقطة $\mathcal{L} \ni \mathcal{C}$. ومشتقة \mathcal{C} عند \mathcal{L} هي $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. والتفاضلة معطاة بـ دق $\mathcal{C}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(\mathcal{C}) + \mathcal{C}(\mathcal{C})$.
لايثبات ذلك ندرس

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}(\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{L}) - \mathcal{C}(\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{C}) \\ & = \|\mathcal{C}\| - \|\mathcal{L}\| - \|\mathcal{C}\| - \|\mathcal{C}\| \\ & = \|\mathcal{C} - \mathcal{L}\| + \|\mathcal{C} - \mathcal{C}\| = \|\mathcal{C} - \mathcal{L}\| + \|\mathcal{C} - \mathcal{L}\| \geq \mathcal{C} \|\mathcal{C} - \mathcal{L}\|, \end{aligned}$$

على شرط ان نأخذ $||م - ل|| > \epsilon$. لهذا يمكن اخذ $\epsilon = \delta$ في تعريف قابلية التفاضل في هذا المثال.

ومن السهل اثبات ان المشتقة (حـ ، و) وحيدة في الحالة العامة. ولكن لا يبدو واضحاً كيف نستطيع معرفة المشتقة. مثلاً كيف عرفنا ان المشتقة في المثال ٤ هي (٢ ، ٢)؟ يكمن حل هذه المسألة في فكرة المشتقة الجزئية. فببساطة يمكن ايجاد المشتقة الجزئية بالنسبة لـ s لاقران q (س ، ص) بمتغيرين حقيقيين s ، $ص$ ، بتثبيت $ص$ ومفاضلة q بالنسبة الى s .

على سبيل المثال، اذا كان q (س ، ص) = $s^2 + ص^2$ كما في المثال ٤ ، فاننا نثبت $ص$ أي نعامل $ص$ على انه ثابت، فيكون $دس q$ (س ، ص) = $2s$ لأن $دس ص^2 = 0$ ، $دس ص^2 = 0$ حيث $دس$ تعني المشتقة بالنسبة الى s . هناك رموز اخرى تعني $دس q$ (س ، ص) وهي q_s (س ، ص) أو q_s (م).

وبالمثل نستطيع ايجاد المشتقة الجزئية لـ q بالنسبة الى $ص$ ، بتثبيت s . لهذا اذا كان q (س ، ص) = $s^2 + ص^2$ فانه، باستخدام الرموز المختلفة، يكون

$$دص q = 2ص = q_v = \frac{\partial q}{\partial v} \quad (م)$$

سنرى الآن كيف نستطيع ايجاد المشتقة في المثال ٤. لأي نقطة $م = (س ، ص)$ نجد ان المشتقات الجزئية هي $q_s (م) = 2s$ و $q_v (م) = 2ص$. اذن عند $ل = (أ ، ب)$ تكون مشتقة q هي (٢أ ، ٢ب) اي الزوج المرتب المكون من قيم المشتقات الجزئية عند $ل$. وقبل ان نثبت ان مشتقة q اي اقران قابل للتفاضل عند $ل$ هي $(ق_s (ل) ، ق_v (ل))$ سوف نعطي امثلة توضح طرق ايجاد المشتقات الجزئية لاقترانات ابتدائية.

المثال ٥.

عرّف $ق$ ، $هـ$ من R^2 الى R بـ

ق = (ق ، س) ، ص = e = ص جصاص وه = هـ (ص ، ص) = جاس جتاز (ص) .
 كذلك ، عرفى من $R \times R$ الى R بـ
 $ى = ى (ص ، ص) = ص ص$.

اذن ق س = ص جصاص ، ق ص = e = ص جصاص ، هـ س = جتاس جتاز (ص) ، هـ ص =
 جاس جاز (ص) ، ى س = ص ص لوص ، ى ص = ص ص س^١ .

والملاحظة التالية جديرة بالذكر . افرض اننا وجدنا المشتقة الجزئية الثانية ، اى ق س ص =

د س (ق س) وق ص ص = د ص (ق ص) . كذلك بالنسبة لـ هـ . اذن

ق س ص = e = ص جصاص ، ق ص ص = e = ص جصاص ،

اذن ق س ص + ق ص ص = ٠ لكل (ص ، ص) . كذلك ،

هـ س ص = - جاس جتاز (ص) ، هـ ص ص = جاس جتاز (ص) ،

ومنه هـ س ص + هـ ص ص = ٠ لكل (ص ، ص)

يسمى الاقتران ك الذي يحقق

$$ك س س + ك ص ص = ٠ \dots \dots \dots (١)$$

لكل (ص ، س) ، في مجموعة مفتوحة ح في R^2 ، اقترانا توافقيا على ح . ان الاقترانات
 التوافقية هامة في العديد من فروع الرياضيات التطبيقية . وتسمى المعادلة (١) بمعادلة
 لابلاس .

وليست جميع الاقترانات توافقية طبعاً ، فمثلاً اذا كان

$$ق (ص ، ص) = ص + ص^2 \text{ فان } ق س س + ق ص ص = ٤ .$$

ويجد القاريء في التبارين ١١ ملاحظات عن العلاقة بين ق س ص وق ص ص .

ستثبت الآن انه اذا كان ق قابلاً للتفاضل عند ل = (أ ، ب) فان مشتقته تكون (ح ،

$$و) = (ق س (ل) ، ق ص (ل)) .$$

النظرية ١ .

افرض ان ق قابل للتفاضل عند ل \exists ح ، ومشتقته هي (ح ، و) .

اذن

$$\text{ح} = \text{نهاية} \cdot \frac{\text{ق} (أ + م ، ب) - \text{ق} (أ ، ب)}{م} \quad \text{و}$$

$$\text{و} = \text{نهاية} \cdot \frac{\text{ق} (أ ، ب + ف) - \text{ق} (أ ، ب)}{ف} ,$$

اي ان ح هي قيمة مشتقة ق الجزئية بالنسبة الى م عند (أ ، ب) ، كذلك و هي قيمة مشتقة ق الجزئية بالنسبة الى ص عند (أ ، ب) .

البرهان .

خذ $\epsilon > 0$. بما ان ق قابل للتفاضل عند ل فانه يوجد ح ، و ، $\delta > 0$ بحيث ان

$$م \exists \text{ ح و } ||م - ل|| > \delta \text{ تعطي}$$

$$| \text{ق} (م) - \text{ق} (ل) - \text{ح} (س - ل) - \text{و} (ص - ب) | \geq \frac{\epsilon}{4} ||م - ل|| \dots (٢)$$

كذلك ، بما ان ح مفتوحة فانه يوجد ك (ل ، نق) \exists ح . افرض ان $||م - ل|| > \delta$ و $||ص - ب|| > \delta$

{ δ ، نق } وخذ م = (أ + م ، ب) . اذن $||م - ل|| = ||م - ل||^2$ ولهذا فان م \exists ح و $||م - ل|| > \delta$. اذن نحصل من (٢) على

$$| \text{ق} (أ + م ، ب) - \text{ق} (أ ، ب) - \text{ح} م | \geq \frac{\epsilon}{4} ||م - ل|| > \epsilon ||م - ل||$$

ومنه

$$\text{ح} = \text{نهاية} \cdot \frac{\text{ق} (أ + م ، ب) - \text{ق} (أ ، ب)}{م}$$

وبطريقة مشابهة ، ثبت ان و هي قيمة المشتقة الجزئية بالنسبة الى ص عند (أ ، ب) مما يثبت النظرية .

نرى من النظرية ١ ان لكل اقتران قابل للتفاضل يوجد مشتقات جزئية، ولكن العكس غير صحيح. بشكل عام كما نرى من المثال ٣. ففي هذه الحالة لكل $m \neq 0$ ، $f \neq 0$ نحصل على $q(0, m) = 0$ و $q(0, 0) = 0$.

اذن

$$q(0, 0) = 0, \quad q(0, m) = \frac{q(0, 0) - q(0, m)}{m} = 0.$$

$$q(m, 0) = 0, \quad q(n, 0) = \frac{q(n, 0) - q(0, 0)}{n} = 0.$$

اذن المشتقتان الجزئيتان موجودتان عند $(0, 0)$. ولكن q غير قابل للتفاضل عند 0 ، لاننا نعرف ان q غير متصل عند 0 . بالطبع ان قابلية التفاضل عند 0 تعطي الاتصال عند 0 بشكل عام. لانه اذا كانت $||l - m|| \geq \delta$ فان

$$|q(m) - q(l)| = |(s - a) - (s - b)| = |b - a| \geq \epsilon$$

ولذلك

$$\text{فان } ||l - m|| \geq \delta \Rightarrow \{ \frac{\epsilon}{|a| + |b| + |c| + \epsilon}, \delta \} \text{ تعطي}$$

$$|q(m) - q(l)| \geq |a| + |b| + |c| + \epsilon \geq ||l - m|| \geq \delta.$$

تعريف بديل لقابلية التفاضل.

تعطي النظرية ٢ التالية تعريفاً بديلاً لقابلية التفاضل لاقتران بمتغيرين حقيقيين. سوف نثبت بالنظرية ان $q \leftarrow R$ قابل للتفاضل عند l \Leftrightarrow ح اذا وفقط اذا وجد اقتران خطي $y : R \leftarrow$ بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $||l - m|| > \delta$ و $m \in R$ تعطي

$$|q(m) - q(l) - y(m - l)| \geq \epsilon \quad ||l - m|| \geq \delta \quad (3)$$

ينسب هذا التعريف البديل الى الرياضي الفرنسي م. فريشه. ان هذا التعريف هام لانه

يجعل بالامكان تعميم فكرة قابلية التفاضل الى الفضاءات الخطية المعيارية. فقد اصبحت دراسة قابلية تفاضل الاقترانات بين فضاءات خطية معيارية جزءا هاما من تحليل الاقترانات. يمكن استخدام تعريف فريشيه بشكل خاص لتعريف قابلية تفاضل اقتران ما من 2A الى 2R . ولعمل ذلك كل ما نفعله هو استبدال القيمة المطلقة في الطرف الايمن لـ (٣) باشارة المعيار. وبعبارة ادق: اذا كانت ح مفتوحة في 2R وكان ق: ${}^2R \leftarrow {}^2A$ ، و \exists ح فاننا نقول ان ق قابل للتفاضل عند ل اذا وفقط اذا كان يوجد اقتران خطي ${}^2R \leftarrow {}^2A$ بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon, l) > 0$ بحيث ان $\|l - m\| < \delta$ وم \exists ح تعطي

$$\| (م) - (ق) - (ل) - (ل) \| \leq \epsilon \|ل - م\|$$

النظرية ٢.

لتكن ح مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من 2R وافرض ان ق: ${}^2R \leftarrow {}^2A$ اذن يكون ق قابلا للتفاضل عند ل \exists ح اذا وفقط اذا كان يوجد اقتران خطي ${}^2R \leftarrow {}^2A$ بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon, l) > 0$ بحيث ان $\|ل - م\| > \delta$ وم \exists ح تعطي (٣).

البرهان.

تذكر ان 2R هو فضاء خطي حقيقي حيث نستخدم تعاريف الجمع والضرب القياسي، العادية المعطاة بـ

$$م + ل = (س، ص) + (أ، ب) = (س + أ، ص + ب)،$$

$$و ح م = ح(س، ص) = (حس، حص) لكل ح \exists 2R .$$

$$كذلك م - ل = (س - أ، ص - ب)$$

افرض الآن ان ق قابل للتفاضل عند ل \exists ح وافرض ان (ح، و) هي مشتقته

عند (أ، ب). لتعرف الاقتران ${}^2R \leftarrow {}^2A$ بـ

، ص هما اقترانان في $E \ni R$ معرفان بـ $S(E) = E^2$ و $S(E) = E$ جاع .
اذن ، $Q(S, S) = E^4 + J^2 E$ كاقتران في E . لهذا فان

$$\frac{DQ}{DE} = E^4 + J^2 E + J^2 E + J^2 E \dots \dots \dots (6)$$

الآن $S(E) = E^2$ ، $S(E) = E$ جاع ، وبما ان $Q(S, S) = E^4 + J^2 E$ ، $Q(S, S) = E^2$ جاع ،
فاننا نحصل على

$$Q(S, S) = \frac{DQ}{DE} + Q(S, S) = \frac{DQ}{DE} + E^4 + J^2 E + J^2 E + J^2 E \dots \dots \dots (7)$$

$$= E^4 + J^2 E + J^2 E + J^2 E$$

ومن (6) و (7) نحصل على

$$\frac{DQ}{DE} = Q(S, S) + \frac{DQ}{DE} + Q(S, S) \dots \dots \dots (8)$$

ان الصيغة (8) ليست مصادفة ومستثبت الآن انه يمكن تعميمها تحت شروط مناسبة للتفاضل .

النظرية 3 [قاعدة السلسلة] .

افرض ان S مجموعة غير خالية مفتوحة وجزئية من H وان H مجموعة غير خالية مفتوحة وجزئية من R .
افرض كذلك ان $S : S \leftarrow H$ و $H : H \leftarrow R$ قابلان للتفاضل
عند $E \ni S$ ، وان $L = (S(E), S(E)) \ni H$. اذن اذا كان $Q : H \leftarrow R$
قابلا للتفاضل عند L فان

$$\frac{DQ}{DE} = Q(S, S) + \frac{DQ}{DE} + Q(S, S) \dots \dots \dots$$

$\Delta ق = ق (م) - ق (ل)$. اذن

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) \right| \\ & = \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) - \left(\frac{\Delta س}{\epsilon \Delta} + \frac{\Delta و}{\epsilon \Delta} \right) - \left(\frac{\Delta ص}{\epsilon \Delta} \right) \right| \\ & = \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) - \frac{\Delta س}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta و}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta ص}{\epsilon \Delta} \right| \\ & \geq \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) - \frac{\Delta س}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta و}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta ص}{\epsilon \Delta} \right| \\ & \geq \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) - \frac{\Delta س}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta و}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta ص}{\epsilon \Delta} \right| \\ & \geq \left| \frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} - ح س (ع) - و ص (ع) - \frac{\Delta س}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta و}{\epsilon \Delta} - \frac{\Delta ص}{\epsilon \Delta} \right| \\ & > \epsilon (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \epsilon \end{aligned}$$

من هذا ينتج

$$\frac{\Delta ق}{\epsilon \Delta} \leftarrow ح س (ع) = ق س + ق و$$

عندما $\epsilon \rightarrow 0$. وهذا يثبت النظرية.

المثال ٧ [نتيجة اويلر للاقتارات المتجانسة].

افرض ان $ح \leftarrow R$ وان $ق$ متجانس من الدرجة $م < ٠$ ، اي ان

$$ق (ع م) = ع^{-م} ق (م)$$

لكل $م \geq ٠$ حيث ان $ع م \geq ٠$ اذن إذا كان $ق$ قابلاً للتفاضل عند $ل$ ، فاننا نحصل على نتيجة اويلر للاقتارات المتصلة

$$أ ق س (ل) + ب ق س (ل) = م ق (ل) \dots \dots \dots (٩)$$

لأبواب (٩) افرض ان $س = أ ع$ ، $ص = ب ع$. من النظرية ٣ نحصل على

$$\frac{د ق}{د ع} = ق س + \frac{د س}{د ع} + ق ص$$

$$= أ ق س (أ ع ، ب ع) + ب ق ص (أ ع ، ب ع) \dots \dots (١٠)$$

عند النقطة ع.

لكن ق (س ، ص) = ق (أ ع ، ب ع) = ع س ق (أ ، ب)، لهذا فان

$$\frac{د ق}{د ع} = د ع س ق (أ ، ب) \dots \dots \dots (١١)$$

بوضع $ع = ١$ في (١٠) و (١١) نحصل على (٩).

وكمثال على نتيجة أولر، خذ ق = ق (س ، ص) = $٢س + ٣س + ٢س$. اذن ق

متجانس من الدرجة ٣، ولكل (س ، ص) $\exists R$ يكون

$$س ق س + ص ق ص = س (٦س - ٢س ص) + ص (٣س - ٢س ق) = ٣ ق .$$

الاقتراحات الضمنية

يتكرر ظهور معادلات مثل $جا(س + ص) = س ص$ ، حيث يكون من المستحيل إيجاد

قيمة ص بدلالة س. ليس هناك ما يؤكد وجود حل في الحالة العامة. على سبيل المثال

$$فان س٢ + ص٢ = ١ = لا يتحقق لأي س ، ص في R .$$

والنظرية التالية تعطينا شروطا كافية لكي يمكن للمعادلة ق (س ، ص) = ٠ أن تعرف

ص كاقتران صريح في س. والحل إنما هو حل «محلي»، أي ان $ص = هـ(س)$ حيث س

في فترة ما فقط حول النقطة أ حيث ق (أ ، ب) = ٠.

النظرية ٤ [نظرية الاقتران الضمني].

افرض ان ح مربع مفتوح (مركزه النقطة ل = (أ ، ب)) في R^2 . وافرض ان ق : ح \rightarrow ١١ يحقق

(١) ق قابل للتفاضل على ح،

(٢) ق (ل) = ٠ ،

(٣) ق (م) < ٠ لكل م \in ح.

اذن يوجد فترة ف = (أ - δ ، أ + δ) في R^1 ، ويوجد اقتران قابل للتفاضل لك : ف $\rightarrow R$ بحيث انه لكل س \in ف،

$$ق (س) ، ك (س) = ٠ \text{ و } \frac{دك}{دس} = - \frac{ق}{ق'}$$

البرهان .

لنأخذ مربعاً مغلقاً S مركزه ل بحيث ان $S \supset$ ح. من (١)، ق قابل للتفاضل على S ، اذن متصل على S افرض ان S معرف بـ أ - ر \geq س \geq أ + ر و ب - ر \geq ص \geq ب + ر حيث ر < ٠ .

بتطبيق نظرية القيمة الوسطى على ق (أ ، ص) نحصل على

$$ق (أ ، ب + ر) - ق (أ ، ب) = ر ق' (أ ، م)$$

حيث م \in (ب ، ب + ر). اذن ق (أ ، ب + ر) < ٠ من (٢) و (٣).

كذلك، ق (أ ، ب - ر) > ٠ .

بما ان ق متصل على (أ ، ب + ر) وبما ان ق (أ ، ب + ر) < ٠ ينتج انه يوجد $\delta > ٠$ ،

بحيث ان

$$|س - أ| > \delta \text{ تعطي ق (س ، ب + ر) < ٠ .}$$

كذلك يوجد $\delta < \epsilon$ بحيث ان $|s - a| > \delta$ تعطي $q(s, b - r) > 0$.
 بوضع $\epsilon = \min \{ \delta, \epsilon \}$ ينتج ان $|s - a| > \delta$ تعطي
 $q(s, b + r) < 0 < q(s, b - r)$ (١٢)
 الآن نثبت نقطة s بحيث ان $|s - a| > \delta$ ، ونعتبر $q(s, s)$ كاقتران
 في s حيث $b - r \geq s \geq b + r$.

من اتصال $q(s, s)$ على الفترة المغلقة $[b - r, b + r]$ ، ومن (١٢)، ومن
 نظرية القيمة المتوسطة للاقترانات المتصلة، نجد انه يوجد عدد $\xi \in (b - r, b + r)$
 بحيث ان $q(s, s) = 0$. من الواضح ان ξ يعتمد على s عامة.
 لكن (٣) تعطي ان $q(s, s)$ متزايد بالضبط كاقتران في s ، اذن ξ وحيد.
 لهذا فانه لكل $s \in F = (a - \delta, a + \delta)$ يوجد عنصر وحيد $\xi(s)$ ، اذن حصلنا على
 اقتران $\xi : F \rightarrow R$. كذلك $q(s, s) = 0$ لكل $s \in F$.
 الخطوة التالية هي اثبات ان ξ متصل على F ثم نثبت ان ξ قابل للتفاضل وان

$$\xi'(s) = \frac{-q_{ss}}{q_{ss}}$$

لإثبات ان ξ متصل عند $c = f$ ، خذ $\epsilon < \delta$ ، بحيث ان
 $q(c, \xi(c) - \epsilon) > q(c, \xi(c) + \epsilon) > 0$ و $q(c, \xi(c) - \epsilon) > 0$ و $q(c, \xi(c) + \epsilon) > 0$.
 بما ان $q(c, \xi(c)) = 0$ وبما ان ξ متصل عند c ، $\xi(c) - \epsilon$ و $\xi(c) + \epsilon$ فانه يوجد δ يحقق

$\delta > \epsilon$ بحيث ان $|s - c| > \delta$ تعطي
 $q(s, \xi(c) - \epsilon) > 0 > q(s, \xi(c) + \epsilon)$. . . (١٣)
 هذا يعطي $\xi(s) > \xi(c) + \epsilon$ ، بغير ذلك يكون $\xi(s) \leq \xi(c) + \epsilon$ وعندها
 $0 = q(s, s) \leq q(s, \xi(c) + \epsilon)$

مما يناقض (١٣). كذلك ك (س) < ك (ع) - ε. لهذا فإن ك (س) - ك (ع) > ε ،
ويتبع ان ق متصل على ع .

اخيرا ثبت س و ف ونحذ ط ≠ • بحيث ان س + ط و ف .

اكتب

$$r = ك (س + ط) - ك (س) .$$

اذن وبما ان $\sqrt{ط^2 + ر^2} \geq |ط| + |ر|$ فان (١) تعطي

$|ق (س + ط) ك (س + ط) - ق (س) ك (س)| - حط - و ر \geq \epsilon (|ط| + |ر|)$.
|ط| صغيرة الى درجة كافية (تذكر ان ط ← • تعطي ر ← • من اتصال ك) . بالطبع ان
(ح ، و) هي مشتقة ق عند (س ، ك (س)) .

بما ان ق (س + ط ، ك (س + ط)) = ق (س ، ك (س)) = • فانه يتبع ان

$$(١٥) \quad |حط + و ر| \geq \epsilon (|ط| + |ر|) \dots \dots$$

لكل |ط| صغيرة لدرجة كافية . من (٣) نحصل على ح < • ، اختر • > ε > $\frac{\epsilon}{٤}$.

اذن (١٥) تعطي

$$|حط + و ر| \geq |ط| \frac{\epsilon}{٤} + |ر| \frac{\epsilon}{٤} ،$$

لهذا فان

$$|و ر| \geq |ط| \frac{\epsilon}{٤} + |ر| \frac{\epsilon}{٤} - |حط| ،$$

$$(١٦) \quad |و ر| \geq \frac{١ + |ح|}{٤} (|ط| + |ر|) ، \text{ مثلا } \dots$$

من (١٥) و (١٦) نرى ان

$$| \frac{١}{ط} + \frac{ح}{٤} | \epsilon \geq \left(\frac{١ + |ح|}{٤} \right) .$$

اذن، باستخدام (١٤) نحصل على

$$\frac{ك(س + ط) - ك(س)}{ط} \leftarrow \frac{ح}{و} (ط \leftarrow ٠),$$

اي ان ك (س) = $\frac{ق - ق_{س}}{ق_{س}}$ ، مما يثبت النظرية .

المثال ٨ .

لندرس المعادلة س جتاص - ص جتاص = ١ .

اذا عرفنا ق (س ، ص) = ١ + ص جتاص - س جتاص يمكن ان نطبق النظرية ٤ .
لانه من الواضح ان ق قابل للتفاضل على R^2 . كذلك ق (٠ ، ١) = ٠ ، ق ص =
جتاص - س جاص < ٠ لكل (س ، ص) بالقرب من (٠ ، ١) .
اذن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ق - ق_{س}}{ق_{س}} = \frac{جتاص + ص جاص}{جتاص + س جاص} .$$

في فترة مفتوحة ف تحوي الصفر .

تمارين ١١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

- ١ - عرّف ق : $R^2 \leftarrow R$ بق (م) = $||م||$ حيث م = (س ، ص) . اثبت ان ق متصل على R^2 ، ولكن ق غير قابل للتفاضل عند $\theta = (٠ ، ٠)$.
- ٢ - افرض ان $٢ \leq ن$ ، $ن \in N$. عرّف ق : $R^2 \leftarrow R$ بق (م) = $|س^n - ص^n|$.
جد مشتقات ق الجزئية عند θ ومنه اثبت ان ق قابل للتفاضل عند θ .
- ٣ - افرض ان $ن \geq ٣$ ، $ن \in N$. عرّف ق : $R^2 \leftarrow R$ بق (م) = (س ص)^ن $||م||^2$.
اذا كان $||م|| < ٠$ وق (θ) = ٠ . اثبت ان ق قابل للتفاضل عند θ .

٤ - افرض ان ح مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من R^2 . افرض كذلك ان ق : ح $\rightarrow R$ بحيث ان ق r موجودة عند ل ح وان ق r كاقتران في م = (س ، ص) متصل عند ل. اثبت ان ق قابل للتفاضل عند ل.

٥ - عرف اقترانات ذات قيم حقيقية بالصيغ ق ، ك ، ي على R^2 بـ
 $ق = \theta = (\theta^1 - \theta^2)$ جتا θ ص ، ك = $\theta = (\theta^1 + \theta^2)$ جا (س - ص) ،
 $ي = س^2 - ص^2 + 3س + 4$ ص ص .
 اي من هذه الاقترانات اقتران توافقي ؟

٦ - يمكن توسيع قاعدة السلسلة كما يلي :
 افرض انه تحت شروط نفاضلية مناسبة كان ق اقترانا في س و ص ، وكان س ، ص اقترانين في ع ، م . فيكون ق اقترانا في ع و م ويكون

ق م = ق س س م + ق م ص م
 ق ع = ق م م ع + ق م ص ع .
 تحقق من صحة هذه النتيجة للحالة الخاصة ق (س ، ص) = س ص ، س = م جتا ع ، ص = م جاع .

٧ - افرض ان س^١ = أ ص + ب ص^٢ + ح ص^٣ حيث أ ، ب ، ح ثوابت و أ < ٠ .

استخدم نظرية الاقتران الضمني لاثبات ان ص = $\frac{س^2}{١} - \frac{ب س^3}{٢} + \dots$ قرب الصفر .

٨ - في المثال ٨ ، حيث ق (م) = ١ + ص جتا س - س جتا ص ، اثبت ان ق (م) < ٠ على المقطع الرأسي المعروف بـ

{ (س ، ص) | |س| $\geq \frac{\pi}{٢}$ } . اثبت كذلك انه |س| $\geq \frac{\pi}{٢}$ ، ق (س ، ص) < ٠

$0 < \omega$ وق (س) ، $-\frac{\pi^2}{4}$ ، $0 > \omega$. اذن اثبت ان ك معرف (على الاقل) على $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ،

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ وان $-\frac{\pi^2}{4} > \omega$ ك (س) $0 > \omega$ هناك .

٩- (١) افرض ان $Q : \leftarrow R$ بحيث ان Q من M (م) وق من M (م) موجودتان لكل M

\exists ح . اذا كان Q من M ، Q من M متصلين عند L \exists ح ، فاثبت ان

Q من M (ل) = Q من M (ل) .

(٢) عرف $Y : R \leftarrow R$ بي M = M (س) - Y (ص) $\parallel M \parallel Y$ - $M \neq \emptyset$ وي

(\emptyset) = 0 . اثبت ان Y من M (\emptyset) = 1 ، ولكن Y من M (\emptyset) = 1^- .

تمارين متنوعة

١- افرض ان S حلقة ذات عنصر محايد: 0 و 1 نسمي $a \in S$ وحدة اذا كان يوجد

$b \in S$ بحيث $a \cdot b = 1$ و $a \cdot 0 = 0$. اثبت ان مجموعة جميع الوحدات في S هي زمرة مع عملية الضرب.

عين مجموعة جميع الوحدات عندما تكون $S = \mathbb{Z}$ ، وكذلك عندما تكون S حلقة اعداد جاكوس الصحيحة.

٢- ليكن $Q : S \leftarrow S$ اقترانا محافظا بين حلقتي S و S . عرّف $\nu(Q) = \{s \in S \mid Q(s) = 0\}$ ، حيث 0 هو صفر الحلقة S . اذا كانت S تبديلية فاثبت ان $\nu(Q)$ مثالية في S .

٣- [متطابقة جاكوبي]. افرض ان S حلقة وعرّف $[s, t] = st - ts$. افرض ان S

لكل s ، $v \in s$. أثبت ان

$$[s, [v, e] + [s, [e, s] + [e, [s, v]]] = \emptyset.$$

٤- (١) افرض ان s حلقة و $s \ni s$. نسمي s عنصرا صفريا اذا وفقط اذا كان يوجد $N \ni N$ بحيث ان $s = \emptyset$ ، قد تعتمد N على s . افرض ان v, e عنصران صفريان وان $v = e$. اثبت ان $v + e$ عنصر صفري.

(٢) اثبت ان العناصر الصفرية في حلقة تبديلية تكون مثالية.

(٣) افرض ان M (R) هي حلقة المصفوفات من الرتبة 3×3 ومدخلاتها من R . اثبت

ان المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عنصر صفري في $M(R)$.

٥- اذا كانت a, b, c اعدادا حقيقية موجبة، اثبت ان

$$(a + b + c)(b + c + a + a + b) \leq 4abc$$

المساواة.

٦- افرض ان $a, b, c, y \in \mathbb{C}$ بحيث ان $|a| + |b| \geq 1$. اذا كان $|c| \leq 1$ ،

فاثبت ان

$$|a| + |b| + |c| \geq |a| + |b| + |c|.$$

٧- افرض ان (s_n) هي متتالية من الاعداد الحقيقية المحصورة من اعلى بحيث ان $s_n \geq$

s_{n+1} لكل $n \in \mathbb{N}$. هل يجب ان تكون (s_n) تقاربية ؟

٨- افرض ان (s_n) هي متتالية من الاعداد الحقيقية المحصورة من اسفل بحيث ان $s_n \leq$

$$\geq \frac{m^{n+1} + m^n}{2} \text{ لكل } n \in \mathbb{N}. \text{ اثبت ان } (m^n) \text{ تقاربية.}$$

٩ - افرض ان (s_n) هي متسالية من الاعداد الحقيقية. اثبت ان (s_n) تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت : (١) (s_n) محصورة من أعلى و(٢) لكل $\epsilon > 0$ يوجد $n_0 = n_0(\epsilon)$ بحيث ان $s_m < s_n + \epsilon$ ولكل $m < n \leq n_0$.

١٠ - افرض ان $a_n < 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، واكتب $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. اذا كان $\sum a_n$

تباعدية فاثبت ان $\sum \frac{a_n}{n}$ تبعدية. استنتج ان $\sum n^{-1}$ تبعدية.

١١ - افرض ان (a_n) متسالية من الاعداد غير السالبة بحيث ان $\sum a_n$ تبعدية. اثبت انه

يوجد (b_n) بحيث ان $0 \leq b_n \leq a_n$ ، $\sum b_n$ تبعدية ولكن $\sum \frac{b_n}{n}$ تقاربية.

ارشاد: ادرس الحالتين $a_n \leq 0$ و $a_n > 0$.

١٢ - افرض ان $s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. اثبت ان

المتسلسلة اللانهائية $\sum (s_n - 2)$ تقاربية.

١٣ - افرض ان $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث ان $n > m$ و $\frac{n}{m} \leq (n \leftarrow m)$. عرف

$$s(n, m) = \sum_{j=1}^n \frac{2^j}{n - 2^{j-1}}$$

حيث يكون مفهوما ان الحد $r = n$ محذوف من المجموع.

اثبت انه اذا كان $1 > \alpha$ فان $s(n, m) \leftarrow \alpha$ لو $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ عندما $n \leftarrow \infty$ ، واذا كان

$\alpha = 1$ فان $s(n, m) \leftarrow \infty$ عندما $n \leftarrow \infty$.

١٤ - افرض ان $q: R \leftarrow R$ اقتران لا يساوي الصفر، وان $q(s) = q(s) + q$

(s) و $q(s, s) = q(s) + q(s)$ لكل $s, v \in R$. اثبت ان $q(s) = s$

لكل $s \in R$. ارشاد: اثبت ان $Q \ni A = A^s$ لكل $A \in Q$ ، ثم استخدم كثافة Q في R ١٥ - ليكن $Q : [A, B] \leftarrow Z$ اقترانا متصلًا على الفترة المغلقة $[A, B]$ ، حيث Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة . اثبت ان Q ثابت على $[A, B]$.

١٦ - ليكن $Q : [A, B] \leftarrow R$ ثابتًا محليًا . اي انه لكل $s \in Q$ ، $[A, B]$ يوجد عدد حقيقي موجب ϵ يعتمد على s بحيث ان Q ثابت على $K(s, \epsilon)$. اثبت ان Q ثابت على $[A, B]$.

١٧ - عرف $Q : R \leftarrow R$ بـ $Q(s) = s^2(1-s)$ اذا كان $|s| > 1$ و $Q(s) = 0$ اذا كان $|s| \leq 1$. اثبت ان Q قابل للتفاضل على R . ارسم مخطط $s = Q(s)$.

١٨ - افرض ان h, d عددان حقيقيان ثابتان بحيث ان $0 < h < d < \pi/2$. اثبت انه يوجد ثابت موجب ϵ بحيث ان

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \epsilon$$

لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لكل $s \in [h, d]$.

افرض ان (r_n) متتالية وتيرية متناقصة بحيث ان $r_n \rightarrow 0$. اثبت انه لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ ، $\epsilon > 0$ بحيث انه لكل $s \in [h, d]$ وكل $n \leq N$. نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \epsilon$$

استنتج ان $Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} r_n$ (درس) تقاربية لكل $s \in [h, d]$. اثبت كذلك ان Q متصل على $[h, d]$.

١٩ - عرف $Q : R \leftarrow R$ بـ $Q(s) = \frac{1}{s}$ اذا كان $s \neq 0$ و $Q(0) = 1$. اثبت انه

لكل $s \in R$ ،

$$Q(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{s}{n} \right)^n = e^{-s}$$

استنتج انه اذا كان $\frac{1}{p} = 1$ ، فان

$$\frac{2}{p} = \dots \sqrt[2]{1+1} + \sqrt[3]{1+1} + \sqrt[4]{1+1} + \dots$$

حيث النقاط الثلاث ترمز الى نهاية حاصل الضرب النوني الجزئي.

٢٠ - افرض ان $q : (A, B) \leftarrow R$ قابل للتفاضل على (A, B) وان $q(s) \leftarrow l(s)$ $\leftarrow (A)$. اثبت ان النهاية اليمنى $q(A)$ موجودة.

الآن عَرّف $h : [A, B) \leftarrow R$ بـ $h(A) = q(A)$ و $h(s) = q(s)$ لكل $s \in (A, B)$. لهذا فان h تكون امتدادا لـ q يحوي نقطة النهاية A . اثبت ان h قابل للتفاضل على $[A, B)$ وان $h(A) = l(A)$.

٢١ - يسمى الاقتران $q : (A, B) \leftarrow R$ اقترانا محبدا على (A, B) اذا وفقط اذا كان $q(\lambda + \mu(s) \geq \lambda$ في (s) + μ في (s)

لكل $s, s \in (A, B)$ و $\lambda \leq \mu \leq \nu$ ، $\nu = \mu + \lambda$. اذا كان q محبدا على (A, B) ، فاثبت ان

$$q(s) - q(s) \geq q(s) - q(s)$$

لـ $l > s > s > h$. اذن اثبت انه اذا كان q محبدا وقابلا للتفاضل على (A, B) فإن مشقته تكون متزايدة على (A, B) .

٢٢ - افرض ان $A, B, h \in R$ بحيث ان

$$h + جتا ب + جتا ح = ج ا + جاب + جاح = ٠$$

اثبت ان جتا ١ + جتا ٢ + جتا ٣ = جتا ٤ + جتا ٥ + جتا ٦، وان

$$جا ٣ + جا ٤ + جا ٥ + جا ٦ = جا ١ + جا ٢ + جا ٣.$$

٢٣ - أثبت انه اذا كان $N \geq 1$ و $3 > 3$ فان

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ دس } \leftarrow (n \leftarrow \infty).$$

٢٤ - افرض ان $Q : [A, B] \leftarrow R$ متصل ومتناقص على $[A, B]$.
عرّف $H : [A, B] \leftarrow R$ بـ

$$H(s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{حيث } Q(s) \text{ دص}$$

اثبت ان H متناقص على $[A, B]$.

٢٥ - [نظرية القيمة المتوسطة لاقتران بمتغيرين]

افرض ان H مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من \mathbb{R}^2

وافرض ان $Q : H \leftarrow R$ قابل للتفاضل على H .

افرض ان L, M نقطتان في H وان القطعة المستقيمة LM ، الواصلة بينهما تحقق

\square ح. اثبت انه يوجد نقطة P و Q بحيث ان

$$Q(M) - Q(L) = DQ_P(M - L),$$

حيث Q ترمز DQ_P الى تفاضلة Q عند P .

إرشادات لحل بعض التمارين

تمارين ١ - ١

١ -	ف	ن	ف ← ن
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	خ
خ	خ	خ	ص

٢ - أ ، ح) تحصيل حاصل ، د) تناقض ، ب) ليس أيا منها .

٥ - نعم سيفوز الفريق .

٦ - أ) ص ، ب) خ

٧- أ، ص، ب، خ، ح، ص، د، ص، هـ، خ
 لان $ع^3 - 1 = (ع - 1)(ع^2 + ع + 1)$. لهذا فان

$$ع = \frac{ع^3 + 1}{ع^2 + ع + 1} \neq 1 \text{ تحقق } ع^3 = 1.$$

٩- المحاضر كسول وينهي جميع الطلبة عملهم.

تمارين ١ - ٢

١- افرض ان $ص \supseteq س$. اذا كان $س \supseteq ص$ فان $س \supseteq س$ ومنه $س \supseteq س \cap ص$ واذن $ص \supseteq س \cap ص$.

ولكن $س \cap ص \supseteq ص$ دائما. اذن $ص = س \cap ص$. وبالعكس، افرض ان $س \cap ص = ص$. اذن $س \supseteq ص$ تعطي $س \supseteq س \cap ص$ واذن $س \supseteq س$ ومنه $ص \supseteq س$.

٢- $ص_١ = س_١$ ، $ص_٢ = س_٢$ / $ص_٣ = س_٣$.
 ٣. \emptyset ، $\{ا\}$ ، $\{ب\}$ ، $\{ح\}$ ، $\{ا، ب\}$ ، $\{ا، ح\}$ ، $\{ب، ح\}$ ، $\{ا، ب، ح\}$ ، $س$.

٤- $س_١$ ، $س_٢$ خاليتان

٦- $س > ص$ و $ص > ع$ تعطي $س > ع$. ولكن

$س > س$ خطأ و $س > ص$ تعطي $ص > س$ خطأ

٧- $س$ تقبل القسمة على $ص$.

٨- $س = \{س \mid س > ٠\} \cup \{س \mid س \in R \mid س < ٠\}$

٩- $س - س = ص = أن$ ، $س - ص = ب ن$. اذن

$س - س = ص = ص + أ + ب ن$. اذن $س - س = ص + ص$ (مض ن).

(ح) $١٦ \equiv ١$ (مض ٥) تعطي $١٦ \equiv ١$ (مض ٥). اي ان $٢٠٢ \equiv ١$ (مض ٥).

١٠- $ق(ح) = ق(ع) + ق(ح/ع) \leq ق(ع)$.

١١ - ح) اذا كان $s \in N$ فان $s \in Y$ و $s \in X$. اذن $K \cap (s) = \emptyset$
 (س) = كح (س) = اذا كان $s \in N$ فان $K \cap (s) = \emptyset$. اذن $s \in Y \cap X$ ،
 اي ان $s \in Y \cap X$. لهذا فان
 $K \cap (s) = \emptyset$ او كح (س) = \emptyset ، اذن $K \cap (s) = \emptyset$.

تمارين ١ - ٣

١ - $M = M$ لان M هو عنصر محايد و $M = M$ لان M هو عنصر محايد. لهذا فان
 $M = M$. اذا كان $s \in M$ فان
 $s \in (s) \cap (s) = s \cap s = s$.
 اي ان $(s) \cap (s) = s$ و $s \in (s) \cap (s)$.
 ٢ - $(s^{-1} \cap s^{-1}) \cap (s^{-1} \cap s^{-1}) = s^{-1} \cap s^{-1}$ (س) = $s^{-1} \cap s^{-1}$ ، اذن $s^{-1} \cap s^{-1} = s^{-1}$.

٤ - $M = N$ ، $s \in N = s^{-1} \cap s^{-1}$.

٦ - العنصر المحايد (١، ٠).

٨ - اذا كان $s \in Q$ فان $s \in (M \cap M) = M \cap M$ ، $s \in (M \cap M) = M \cap M$ (ص) \square (ص). أي ان $M = s \in Q$ (ص).

١٠ - لا يوجد زمرة جزئية Y رتبته $n < 1$. لانه ان وجد فانه يوجد $s \in Y$ ، $s \neq 1$.

لذا فان s^2 ، s^3 ، ... $s^n \in Y$. واذن

١، s ، s^2 ، ... s^n هي $n + 1$ من عناصر Y المختلفة.

١٤ - $M(R)$ ليست حقلا لانه على سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اي ان المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ التي لا تساوي الصفر لا يوجد لها نظير.

$$17-0 = (0, \dots, 0, 0, 0, 0) = (-s_1, \dots, -s_p, \dots, -s_n) = (-s_1, \dots, -s_n).$$

۱۸- ص = (۲، ۱، ۲) = ۲

۱۹۔ لتفرض ان س، ص $\in R$ ، ا، پ $\in R$: اذن

$$\cdot \text{ق (أ س + ب ص)} = (\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 - \text{أ س}_2 + \text{ب ص}_2) = (\text{أ س}_3 + \text{ب ص}_3)$$

$$(A_1, -B_1, B_2) + (A_2, -B_2, B_3) =$$

= أق (س) + ب ق (ص).

لهذا فان q هو اقتران خطي. اذا كان $q(s) = f(v)$ فان $(s_1, s_2, s_3) =$

(ص ۲ ، ص ۱ - ص ۳)

ومنه $s_1 = s_2$ ، $s_2 = s_3$ ، $s_3 = s_4$. لهذا فان $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = r$ ، ١ ، ٢ ،

٣. أي س = ص ومنه ق واحد لواحد. اذا كان

ص = (ص_۱ ، ص_۲ ، ص_۳) ∈ R^۳ فان

س = (-ص_۱ ، ص_۱ ، ص_۲) تحقق ق (س) = ص. لهذا فان ق شامل.

$$.(1, \dots, 1, 1, 1) = s, (1, \dots, 1, 1) = m - 2,$$

٢١- م = (١ ، ١) واستخدم أو = و و س و = و.

تمارين: ٢ - ١

١- بما أن $1 \leq 1$ ، فإن $1 \in S$. افترض الآن أن $s \in S$. إذن $s + 1 = s + 1$ و $1 < 1$ ومنه

فإن $M \ni S$ ينتج إذن بالاستقراء أن $M = N$ ، وبالتالي فإن $M \ni N$ تتضمن أن M

و سه. اذن $s \leq 1$ لكل $s \in N$.

٤- لو وُجِدَتْ $n \in N$ بمثل هذه الخاصية، لكانت $n < 1$ ، اذن $n = 1 + s$ لقيمة ماس

3. N. ولكن $s \leq 1$ ، من التمرين (1). إذن $s + 1 \leq 1 + 1 = 2$ ، ومنه $n \leq 2$ ، مما

يناقض الفرضية ن $2 >$.

٧- ج (١١) غير صحيحة.

٨- اذا كانت $a = b$ ، فإن $a^2 + b^2 = 2a^2 = 2b^2$. اذا كانت $a < b$ ، فإن $a = b + ج$ ، $a^2 = b^2 + ٢ب + ج + ج = b^2 + ٢ب + ح + ح$ ، ومنه $a^2 < b^2 + ٢ب + ح$. وبالمثل اذا كانت $a > b$.

٩- ١ (١ + ٢) قابل للقسمة على ٦، واذا كان n (٥ + ٢) = $٦م$ ، فإن n (١ + ٢) (١ + ٢) (١ + ٢) = $٥ + ٦م + ٣(١ + ٢) + ٦ = ٦ + ٦م + ٦$ (لأن n (١ + ٢) عدد زوجي). الآن استخدم الاستقراء. لاحظ ان بالامكان استخدام الاستقراء لاثبات أن n (١ + ٢) زوجي، اي قابل للقسمة على ٢.

تمارين ٢ - ٢

١- واضح أن $a = ٠$ هي حل للمعادلة $a^2 = ا$. افرض اذن أن $a \neq ٠$. من قانون الاختزال في Z ، نستنتج من $a^2 = ا$ أن $a = ١$.

٢- ق (٢ن) = n ، ق (٢ - ١) = $n - ١$.

٦- لا. مثلاً، $(-١)^2 < ٠$.

٧- ٤ (٢ا + ا + ب + ب) = $(٢ + ا)ب + ٣ب^2$ ، $٠ \leq$ ، واذا $a^2 + ا + ب + ب^2 \leq ٠$. الآن استخدم $٣ - ب^2 = (ا - ب) (٢ا + ا + ب + ب^2)$.

تمارين ٢ - ٣

١- $|ب - ٢| = |٢ - ٢م - ٢ن| = |٢(٢ - م - ن)| > |٢ - ٢م - ٢ن|$.

٤- إذا كان $|س| < ٠$ ، فإنه يوجد $N \geq ٣$ بحيث أن $|س| < ١$ ، ومنه فإن $|س| < ١$.

١. بما ينقض $|س| \geq \frac{1}{n}$ لكل $n \geq N$.

٥- $١ - ص + ١ = ص$ ؛ واذا كان $(١ + ص)^n \leq ١ + ص$ ، فإن $(١ + ص)^{n+1} \leq ١ + ص$.

n (ص + ١). أي أن $(١ + ص)^{n+1} \leq ١ + ص + ١ (١ + ص) + ١ \leq ١ + ص + ١ (١ + ص)$.

$$9 - m = 1.$$

$$10 - 1 - 1 = 1 + b + c, \dots, \text{و}$$

$$(b + c)(c + a)(a + b) - 8abc$$

$$= (b^2 + c^2 + a^2 + bc + ca + ab) - 8abc$$

$$\leq 2abc + 2abc + 2abc - 8abc$$

$$= 0.$$

$$\text{إذا كان } (a-1)(b-1)(c-1) = 8abc, \text{ فإن}$$

$$a(b-1)(c-1) + b(c-1)(a-1) + c(a-1)(b-1) = 0, \text{ ومنه}$$

$$a = b = c.$$

$$11 - 0 \geq (b-2)(c-2) \text{ تتضمن } b \leq 4 - a \geq 2b. \text{ إذن}$$

$$a(b-1) \geq \left(\frac{b-1}{2}\right)^2.$$

تمارين ٢ - ٤

١ - هناك ٢١ زوجاً في الأول من آب.

٢ - خذ أي عدد نسبي موجب ϵ وضع $\epsilon = \frac{1}{n}$ (أي أن ϵ هي أصغر

العدد بين ϵ و $\frac{1}{n}$). إذن

$$0 < \epsilon < \frac{1}{n}, \text{ ومنه } |s_n - a| > \epsilon \geq \epsilon \text{ لكل } n \leq n. \text{ إذن } s_n \leftarrow a$$

٤ - $s_n \leftarrow a$ تتضمن $|s_n - a| > \epsilon$ لكل $n \leq n$. ولكن

$$|s_n - a| \geq |s_n - a|, \text{ ومنه } |s_n - a| > \epsilon \text{ لكل } n \leq n. \text{ إذن}$$

$$s_n \leftarrow a.$$

المتتالية $s = (1, -1, 1, -1, \dots)$ مثال مناسب.

٥ - من الصحيح ان نقول أن كلاً من $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n^2}$ تؤول الى الصفر (عندما $n \leftarrow \infty$).

من الصحيح كذلك ان نقول ان $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leftarrow 0$ (عندما $n \leftarrow \infty$). ولكننا لم نعرف

على الاطلاق عبارات مثل

$s_n \leftarrow s$ (حيث s عدد ثابت)،

والحقيقة ان السهم (\leftarrow) قد استعمل فقط في العبارات

$s_n \leftarrow a$ (حيث a عدد ثابت)،

$s_n \leftarrow \infty$ ،

$s_n \leftarrow -\infty$.

٦ - يوجد $l = n_0$ (١) بحيث أن $|s_n - s_m| > 1$ لكل $n, m \leq l$. ولكن $|s_n - s_m|$

هي عدد صحيح غير سالب، إذن $|s_n - s_m| = 0$ لكل $n, m \leq l$.

اذن $s_n \leftarrow s$ (حيث s عدد ثابت).

٧ - (١) ليكن $\epsilon > 0$ ، واختر N بحيث أن $N > \frac{1}{\epsilon}$.

اذن $n \leq N$ تتضمن:

$$\epsilon > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n(n+1)} \right|$$

(٣) ليكن $a < 0$ ، واختر N بحيث أن $N > \frac{1}{|a|}$ ، واخذ $n \leq N$. اذن

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < |a|$$

٩ - ليكن $\epsilon > 0$. اذن يوجد N بحيث ان $s_n < \frac{1}{\epsilon}$ لكل $n \leq N$. اذن

$$\epsilon > \frac{1}{s_n} = \left| \frac{1}{s_n} \right|$$

$$1 = \text{ب تعطي } 1^2 + \text{ب}^2 = 2^2 = 4 \text{ ب}.$$

$$10 - 1 - \text{ن} + \text{س} = (1 + \text{س})^{\text{ن تعطي}} 1 + \text{ن} + \text{س} \leq 1 + \text{ن} + \text{س} + (1 - \text{ن}) \text{ س}^2 \text{ ومنه } \text{س}^2 = 0$$

$$11 - \text{إذا كان } \text{س} < 0, \text{ خذ } \epsilon = \text{س}. \text{ إذن } \text{س} > \text{س}, \text{ تناقض. إذن } \text{س} \geq 0. \text{ الآن لكل}$$

$$\epsilon < 0 \text{ يوجد } \text{ن} \text{ بحيث أن}$$

$$1 - \text{أ} > \frac{\epsilon}{\text{ن}}, \text{ ب} - \text{ن} > \frac{\epsilon}{\text{ن}} \text{ لكل } \text{ن} < \text{ن}_0.$$

$$\text{إذن } 1 - \text{ب} > 1 - \text{ب} - \text{ن} + \epsilon \geq \epsilon \text{ ومنه } 1 - \text{ب} \geq 0 \text{ أي أن } 1 \geq \text{ب}.$$

$$12 - \frac{1}{\text{ن}} = 8$$

$$14 - \text{س} - \text{ن} = 1 + \frac{\text{ن}(\text{ن} + 1)}{2} \leftarrow \infty$$

تمارين 2-6

$$1 - 2 = \frac{10 - 5}{0} = \frac{(3 - 4)(2 + 3)}{(2 + 3)(3 - 4)} = \frac{3 - 4}{3 - 2} = 1$$

$$3 - \text{الجملة التالية متكافئة: } \bar{E} = \text{ع}, \text{س} + \text{ت} + \text{ص} = \text{س} - \text{ت} + \text{ص}, \text{ت} + \text{ص} = -\text{ت} + \text{ص},$$

$$\text{ص} = 0, \text{ص} = 0$$

$$6 - 1 + \text{ت} + 3 = \text{ت}$$

$$7 - \text{استخدم } |1\text{ع} + 2\text{ع}| = |2\text{ع} + 1\text{ع}| = |2\text{ع} + 1\text{ع}|.$$

$$11 - |1\text{س} + 2\text{ص}| \geq |1\text{س}| + |2\text{ص}| = |1\text{س}| + |2\text{ص}|. \text{ من المتباينة المثلثية.}$$

$$12 - (|1\text{س}| + |2\text{ص}|) \geq 2\text{س} + 2\text{ص} \geq |2\text{س}| + |2\text{ص}| \geq 2\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ص} + 2\text{ص} = 4\text{ص} + 2\text{س}$$

$$2 = |2\text{س} + 2\text{ص}|$$

$$\text{واذن } |س| + |ص| \geq \sqrt{2} |س + ص|. \\ ١٣ - ع_٢ ع_٢ - ١ = (ع_١ |ع_١ - ١| - ١) (١ - |ع_١|) (١ - |ع_١|) = (١ - ع_١) (١ - ع_١) (١ - ع_١).$$

تمارين ٢ - ٧

$$١ - \text{المتباينة المثلثية مع } ٢ \text{ حد } \geq \text{حد} + \text{حد}.$$

$$٢ - س = \frac{ن}{١ + ن} \text{ في متباينة برنولي.}$$

$$٤ - \text{استخدم متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي.}$$

$$٥ - \text{استخدم } |ا| ا ب ر \geq |ا| ا ب ر \text{ ومتباينة هولدر.}$$

$$٦ - (٢) \text{ خذ } و = ٢, ن = م = ٣ \text{ في (١). كذلك } ا = ب = \text{حد} = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٣}}.$$

$$٨ - \text{استخدم المتباينة المثلثية ومتباينة منكوفسكي.}$$

$$١٠ - ا ن \geq ا ر \geq ا ن \geq ن ا ن.$$

تمارين ٣ - ١

$$١ - (ا) \text{ المجموعة هي } \{ ١, -٢ \}, \text{ لهذا فان ص.ح.ع هو } ١, \text{ ك.ح.د هو } -٢.$$

$$(ب) \text{ لنسم المجموعة } س. \text{ اذن (ك.ح.د) } س = ٠ \text{ و (ص.ح.ع) } س = \sqrt{2}. \text{ لاثبات}$$

$$\text{الاخيرة خذ } س \geq ٠. \text{ اذا كان } س < \sqrt{2}. \text{ اذن } س^٢ < ٢ \text{ مما يناقض } س \geq ٠ \text{ ومنه}$$

$$\text{س} > \sqrt{2} \text{ لهذا فان } \sqrt{2} \text{ هو حد علوي لـ } س. \text{ الآن لتأخذ } و < ٠. \text{ اذن } \sqrt{2} - و > \sqrt{2}$$

لهذا وباستخدام كثافة Q في R فانه يوجد $s \in Q$ بحيث ان $\bar{A} \cap s > 0$ ولكن

و $s > 0$ تعطي $\bar{A} \cap s > 0$. لهذا فانه يوجد $s \in Q$ بحيث ان $s < \bar{A} \cap s$ و
فاذن $(s \cap \bar{A}) = \emptyset$.

(ح) كبح هو صفر، $s \cap \bar{A} = \emptyset$.

(د) افرض ان $s = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$.
... ثم استعمل $A \cap B \leq A \cap \bar{B}$ لان $A \cap B$ لا يوجد $s \cap \bar{A}$ لان
المجموعة غير محصورة من اعلى . في الحقيقة لأي $m \in R$ خذ $A \cap B = 1 + m$ ، $A \cap \bar{B} = 1$.
فيكون $s < 1 \leq m$.

٢ - افرض ان $m = s \cap \bar{A}$ ، $s \cap \bar{A} = \emptyset$. اذا كان $s \in Q$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$.
ان $s \cap \bar{A} = \emptyset$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$ ، واذا كان $s \in Q$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$.

م . لنفرض ان $s < 0$. اذن $s \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $s \cap \bar{A} = \emptyset$ او $s \cap \bar{A} = \emptyset$. في

الحالة الاولى يوجد $s \in Q$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $s \cap \bar{A} = \emptyset$.

م - و، في الحالة الثانية يوجد $s \in Q$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $s \cap \bar{A} = \emptyset$.

٣ - و . اذن يوجد $s \in Q$ فانه $s \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $s \cap \bar{A} = \emptyset$. لهذا فان $s \cap \bar{A} = \emptyset$.

$(s \cap \bar{A}) = \emptyset$.

٤ - $s \cap \bar{A} = (s \cap \bar{A}) \cup (s \cap \bar{B}) \cup (s \cap \bar{C})$ - كبح $s \cap \bar{A}$ لكل $n \in Q$
لهذا فان $n \in Q$

$s \cap \bar{A} = (s \cap \bar{A}) \cup (s \cap \bar{B}) \cup (s \cap \bar{C})$ - كبح $s \cap \bar{A}$.

٥ - $s \cap \bar{A} < 0$ ، بعض العمليات الحسابية توضح ان $(s \cap \bar{A})$ وتبرية متزايدة . اذن $(s \cap \bar{A}) \in Q$

ي من نظرية ٣ .

٦- اثبت باستخدام الاستقراء ان $s_n > s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ومنه $s_2 > s_1 + 1$
 $\sqrt{1+x}$. احسب نها s_n باخذ النهايات في $s_{n+1}^2 = 1 + s_n$.
 ٩- $a = s_1$ وإذا كان $|a| < 1$ فان $a^2 < 1$. لهذا لن تكون (s_n) محصورة من اعلى
 مما يناقض (s_n) محصورة من اعلى.

تمارين ٣-٢

١- $(0, 1)$ و $(1, 2)$. كلا، لانه من نظرية ٦ يمكن الاستنتاج فقط ان اتحاد فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة.

٣- $n \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ لانه ان وجد $s \in n \cap \mathbb{Q}$ فان $s < 0$ ، وباستخدام مسلمة ارخيدس فانه يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{r} < s$. لهذا فان $s < \frac{1}{r}$ وهذا يناقض $s \in \mathbb{Q}$.

$$5- n \cap \mathbb{Q} = [1, 0].$$

$$6- n \cap \mathbb{Q} = (n, n+2) = \emptyset$$

٨- باستخدام النظرية ١٦ في الفصل الثاني نحصل على Q كثيفة في \mathbb{R} . سوف نثبت الآن ان $\mathbb{R} \supset \bar{Q}$. لتكن $s \in \mathbb{R}$ ، و $0 < \epsilon$ ولنكتب $s = s + \epsilon$. اذن يوجد $q \in Q$ بحيث ان $s > q$. اذا كان $s \in \mathbb{Q}$ فان $b = \frac{s+1}{4} \in \mathbb{Q}$ و $s - b > 0$ ،

لان $s \in \mathbb{Q}$.

ولكن اذا كان $s \notin \mathbb{Q}$ فان $a = s - \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \in \mathbb{Q}$ و $s - a < \epsilon$ ومنه s

$\in \bar{Q}$. لهذا فان $\mathbb{R} \supset \bar{Q}$.

$$(س + \frac{ص}{٢}) + \frac{٣ص}{٤} < ٠ . \text{ واذن من } = ص .$$

(٤) نتأكد من (مم) . اذا كان س = ع تصبح النتيجة واضحة . افرض ان س ≠ ع . اذا كان س = ص فان مـ (ص ، ع) = ١ وتصبح (مم) ١ ≥ ١ + ٠ . اذا كان س ≠ ص فان مـ (ص ، ع) + مـ (ص ، ص) ≤ مـ (س ، ص) = مـ (س ، ع) .
(٧) جزء من (م) غير صحيح .
ق (ص ، ص) = ٠ لا تعطي س = ص ، مثال على ذلك

$$س = (\frac{١}{ن}) = (١, \frac{١}{٢}, \frac{١}{٣}, \dots) \ni \text{ ي ، ص} = (٠, ٠, ٠, \dots)$$

٠ ي .

نبا | س - ص | = ٠ ، ولكن س ≠ ص .

تمارين ٣ - ٤

١ - افرض ان $\sup س$ ، صه قابلة للعد . اذا كانت $س = \emptyset$ تكون قابلة للعد بالتعريف . اذا كانت $س \neq \emptyset$ ، ثبت س $\ni س$. اذا كان $\ni N$ بحيث ان ق (ن) $\ni س$ ، عرف هـ (ن) = ق (ن) . ولكن اذا كان ق (ن) $\nexists س$ عرف هـ (ن) = س . اذن هـ : $N \leftarrow س$ اقتران شامل .

٤ - ق : (١ ، ٠) \leftarrow (أ ، ب) المعروف بـ ق (س) = أ + (ب - أ) س هو تقابل .
 $R - U Q = R$ ، غ ، Q قابلة للعد غير نهائية . لو كانت غ قابلة للعد غير نهائية لكانت R كذلك من النظرية ١٣ ، وهذا يناقض النظرية ١٤ .

تجاربین ۳-۵

٢- لتكن $S = C \cap R^*$. اذا كانت $S = \emptyset$ فان S تكون مفتوحة في R . بعكس ذلك خذ $S = C \cup S$ اذن $S = C \cup S$. بما ان C مفتوحة فانه يوجد $q(r, s)$ (نق) $\supset C$ ، من الواضح الان ان الفترة (r, s) ، $\supset S$ ، اذن S مفتوحة في R .

٥- (١) خذ $e_1, e_2 \in C$ و $q(r_1, a)$ ، اذن $|a - e_1| > |a - e_2|$ ، نق ، $|a - e_1| > |a - e_2|$. يجب ان نثبت ان

ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲ و ق ۱ ، نق)عنا يکون ۰ ن ≥ ۱ .
 الان |ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲ - ۱| = |ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲ - ۱|
 ≥ |ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲ - ۱| = ۱ .
 باخذ الحالتين = ۰ ون < ۰ نرى ان ب = |ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲| ، ب > نق ، ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲
 - ۱ |ن ۱ + (ن - ۱) ع ۲| = ۱ . اذن ق ۱ ، نق)عنا يکون ۰ ن ≥ ۱ .
 ۱ - ع ۱ = ۱ ، ۱ - ع ۲ = ۱ ، ۱ - ع ۳ = ۱ ، اذن ۱ - ع ۳ = ۱ .

$\xi = \xi + (\bar{\xi} + \xi)$. يمكن كتابة هذا على صورة

$$ع - \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

۷- ق (ع) = $\frac{ع}{ع+۱}$: هو تناظر مناسب.

تمارين ٤ - ١

١- خذ $\epsilon = \frac{1}{2}$ ، يوجد $n_1 \in \mathbb{N}$ بحيث ان
 لكل $n > n_1$ ، $|x_n - x| < \frac{1}{2}$ لـ كل n . كذلك يوجد n_2 بحيث ان لكل $n > n_2$
 لكل n ، $r < p$. افرض ان:

تمارين ٤ - ٢

- ١- لـ $n < 1$ ، $n = 1 + (-1)^n < n$ ومنه $n \leftarrow \infty$. كذلك $n \leftarrow \infty$.
- ٢- افرض ان $a < 0$ ونها $n = \exists R$. من نظرية ϵ ، نحصل على انه اذا كانت $\epsilon < 0$ فانه يوجد n بحيث ان $n > \frac{\epsilon}{1}$. لكل $n \leq n$. ونس $n < -$.
- $\frac{\epsilon}{1}$ لعدد لا نهائي من n . بضرب هاتين المتباينتين في n نحصل على $n = a$.
- ٧- افرض ان $m = \text{ص ح ع} \{ \text{ص ر، ص ر، ...} \}$ ، $\{ \text{ص ر، ص ر، ...} \}$ اذن $n \leq \text{و تعطي}$
 $\text{ح ر} = \text{ص ح ع} \{ \text{ص ر، ص ر، ...} \}$. اذن $n \leq \text{و تعطي}$
 $\text{ص ر} \leq m \text{ ر ح ر كذلك (ص ح ع) } n \leq \text{ص ر} \leq m \text{ ر ح ر}$
اجعل $r \leftarrow \infty$. المثال $n = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ، $\text{ص} = (0, 0, 0, 0, \dots)$.
- ٨- في حالة $n = 1$ لا نستطيع القول ان $n \leftarrow 0$. على سبيل المثال ان $n = 1$ لكل n .
- ٩- خطأ كمثال $n = (-1)^n$.

تمارين ٤ - ٣

- ١- $n = (1, 0, 0, 2, 0, 3, \dots)$ ، $\text{ص} = (1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots)$.
- افرض ان $(n) \in \mathbb{N}$. اذن يوجد $n < 0$ ون $n > 0$. بحيث ان $n \leq |a|$ لكل n . ولكن $(n) \in \mathbb{N}$ هي متتالية جزئية من (n) . لهذا فانه يوجد متتالية جزئية صفرية (n_r) من (n) . اذن $n \leq |a|$ لكل n مما يناقض $n \leftarrow 0$ ($n \leftarrow \infty$).
- ٤- $|a| > 1$ لعدد لا نهائي من n . اختر واحداً منها لنسمه n . كذلك $|a| > 1$.

$$٤ - \text{نها } s_n = \frac{s_{n+1} + s_{n+2}}{3}.$$

٨ - لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $s_n = s_{n+1}$ ، إذن $s_n \leftarrow s_{n+1}$ ، $(n \leftarrow \infty)$.
 اثبت الآن بالاستقراء ان $s_n < s_{n+1} \leq 0$ واستنتج ان
 $s_{n+1} > s_n$ ، إذن $s_n \leftarrow 0$ ومنه $s_n = 2$ من $s_{n+1} - s_n \leftarrow 0$
 إذن $s_{n+1} = s_n = 1$ ، $\sqrt{s_{n+1} s_n} = 1$

تمارين ٥ - ١

١ - اذا كان s_n ، s_n المجموعين الجزئيين التوئين لـ $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ ، فان المجموع
 الجزئي لـ $\sum c_n$ هو على صورة $s_n + s_n$ أو $s_n + a_n + b_n$. ولكن $\sum a_n$
 تقاربية تعطي $a_n \leftarrow 0$.

٢ - $\sum |a_n|$ تقاربية تعطي $\sum a_n$ تقاربية. من المتباينة الثلاثية:

$$|a_1| + \dots + |a_n| \geq |a_1| + \dots + |a_n| \text{ وعندما } n \leftarrow \infty \text{ نحصل على}$$

$$\sum |a_n| \geq \sum a_n. \text{ نحصل على «اقل من». على سبيل المثال اذا اخذنا } a_1 = 1, a_2 = 1,$$

$$= -1, a_3 = 0 \text{ لكل } n \leq 3.$$

٤ - المجموع ١.

$$٥ - د = (1, -1, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \dots) \text{ ولكن } \gamma \in$$

$$د = (1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots) \text{ من المثال ٣. } \gamma \notin$$

الآن اذا كانت $a \in L$ و $b \in L$ فإن

$$|a_n| + \dots + |a_{n+r}| \geq m (|a_n| + \dots + |a_{n+r}|) . \text{ واذن}$$

$$\exists |a_n| > \infty \text{ من القاعدة العامة لتقارب المتسلسلة} . \text{ لهذا فان } \exists \epsilon_1 .$$

٨- $\exists \epsilon_1$ تعطي $a_n \leftarrow 0$. لهذا فانه يوجد n بحيث ان $|a_n| > 1$ لكل $n < n_0$. اذن $|a_n| \geq \epsilon_1$ لكل $n < n_0$. وبتطبيق القاعدة العامة لتقارب المتسلسلات نحصل على

$$\exists |a_n| \text{ تقاربية} .$$

لهذا فان $\exists \epsilon_1$ اذا كانت $\exists \epsilon_2$ فان $|a_n| \leftarrow 0$ ومنه $|a_n| \leftarrow 0$ اي ان \exists

تقريباً . كذلك $(\frac{1}{n}) \exists \epsilon_1 / \epsilon_2$. $(1, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots)$. تقريباً $\epsilon_2 /$

٩- كمينة نلاحظ ان (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٦) ، (٨) ، (٩) صحيحة و (١) ، (٥) ، (٧) ، (١٠) ، (١١) خطأ . على سبيل المثال (٢) صحيحة لأن

$$|a_n| \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{p} \text{ لهذا فان } \exists a_n \text{ ذات تقارب مطلق} . \text{ واذن}$$

تقاربية . كذلك (١٠) خطأ لان $\frac{1}{n}$ تباعدية ولكن $\frac{1}{n} \leftarrow 0$.

$$١٠ - \frac{4}{33} . \text{ الرقم } ١٠١٠٠١٠٠٠٠ \text{ غير نسبي}$$

١١- أي عدد مثل $\frac{1}{p}$ يمكن كتابته على صورة $٠,٥٠$ أو $٤٩,٠٠$ وبصورة عامة فان العدد

س له صورة عشرية وحيدة اذا وفقط اذا لم يكن س على شكل $\frac{p}{q}$ حيث $\exists z, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

تمارين ٥ - ٢

$$١- (a) |a_n| \leftarrow \frac{1}{8} . \text{ اذن } \exists a_n \text{ تباعدية من النظرية } ٥ .$$

٢- اذا كانت $\epsilon > 0$ فان $|a_n - a| < \epsilon$ ، $n < d$. لنفرض ان
 $m = \text{أك } \{q^{-1}(0), \dots, q^{-1}(d)\}$. اذن $n < m$ تعطي $q(n) < d$ ، اذن
 $|a_{q(n)} - a| < \epsilon$.

$$3 - \frac{3}{4}$$

$$6 - 3 = 3$$

٧- $\sum_{n=1}^{\infty} (1+n) \epsilon^n$ هو حاصل الضرب الكوشي $(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots)^2 = (1 - \epsilon)^{-2}$.
 $10 - a_n = (1 - \epsilon)^n (1 + \epsilon)^n$ ، $b_n = (1 - \epsilon)^n (1 + \epsilon)^n$ تعطي $|a_n - b_n| \leq (1 + \epsilon)^n$.
 لهذا فان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعدية بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية . هذا لا يناقض نظرية ميرتينس لانها
 تقول ان المتسلسلة تقاربية ، وليس ذات تقارب مطلق .

$$11 - \alpha < \frac{1}{4}$$

$$13 - (m) ((\epsilon - 1)^{-2} \text{ تباعدية } |a_n| \leq 1)$$

تمارين ٦ - ١

$$1 - a_n = 1 - a_{n-1} \text{ لأن } a_n = (m - a_{n-1}) + a_{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_{n-1} = (m - a_{n-1}) + a_{n-1} = a_{n-1}$$

$$2 - \text{نجد ان } \epsilon = (\epsilon, \epsilon) = \epsilon^2 \text{ ، } \epsilon = (\epsilon, \epsilon) \text{ لكل } \epsilon < 1$$

$$3 - \text{لاي } a < 0 \text{ ، } s < 0 \text{ ، } |s - a| < 0 \text{ نحصل على } (s - a) = (s - a) = 1 - a$$

$$(s - a) = (s - a) = 1 - a \text{ والتي تقترب من } (s - a) = 1 - a \text{ عندما } s \rightarrow a$$

$$4 - \text{نجد } |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| = 1 + \frac{1}{1 - a} \text{ اذن } |a| < 1 \text{ تعطي } |a| < 1 \text{ لهذا فان}$$

ك (ع) $| \leq | \text{أ} \text{ع} | - | \text{م} | \text{ع} |^{1-2}$ من المتباينة المثلثية. كذلك $| \text{أ} \text{ع} | < | \text{م} | + | \text{ن} |$. لهذا فإن

$$| \text{أ} \text{ع} | < | \text{ل} | \text{ع} | + | \text{م} | \text{ع} |^{1-2} \text{. إذن}$$

$$\text{ك (ع)} < | \text{ل} | \text{ع} |^{1-2} \leq | \text{ل} |.$$

٧- لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta \leq 1$ بحيث إن $\delta < \delta_0$ تعطي $| \text{ق} (س) - \text{م} | < \epsilon$.

اختر $\delta_0 \ni N$ بحيث إن $\delta < \delta_0$. إذن $\delta < \delta_0$ تعطي

$| \text{ق} (ن) - \text{م} | > \epsilon$. إذن $\text{ق} (ن) \leftarrow \text{م} (ن \leftarrow \infty)$. عرف $\delta_0 = 0$ لكل $N \ni$ ، $\delta_0 (س) = 1$ لكل $\delta \ni (ن ، 1 + ن)$ ، حيث $N \ni$.

١٠- كمثال $\text{ق} (س) = 1$. إذا كانت $\delta \ni [1 ، 1 -]$. $\text{ق} (س) = \frac{1}{| \text{س} |}$ إذا كانت δ

$\notin [1 ، 1 -]$. هذا الاقتراح معصور على R .

تمارين ٦-٢

$$1- \text{ف}_1 = (1- ، \infty -) ، \text{ف}_2 = [1 ، 1 -] ، \text{ف}_3 = (1 ، \infty)$$

٢- ق متزايد فعلا تعطي ق متباين. افرض إن $\text{س} = \text{ق} (أ ، ب)$. إذن يوجد $\delta = \text{ق}^{-1}$

: $\text{س} \leftarrow [أ ، ب]$. خذ δ ، $\delta \ni \text{س}$ ، $\delta > \delta_0$. إذا كان $\delta_0 \geq \delta$ (ح) فإن ق متزايد يعطي $\text{ق} (\delta_0) \geq \text{ق} (\delta)$ ، أي إن $\delta \geq \delta_0$. وهذا يناقض $\delta > \delta_0$. إذن $\delta_0 < \delta$ (ح) ومنه δ_0 متزايد فعلا.

$$3- \text{ق} (س) = \text{س} (س > 1) ، \text{ق} (س) = 3 - س (س \geq 1) \geq 2.$$

$$4- (أ) نعم ، (ب) لا ، مثال $\text{ق} (س) = 0$ ، $\delta_0 (س) = \text{س}$. (د) نعم.$$

$$7- \text{ق} (0) = \text{ق} (0 + 0) = \text{ق} (0) + \text{ق} (0) . \text{ إذن } \text{ق} (0) = 0 .$$

كذلك $\text{ق} (-س) = - \text{ق} (س)$ و $\text{ق} (ن س) = \text{ق} (ن) \text{ق} (س)$ لكل $N \ni$ ، $\delta \ni R$. إذا

كان م = ق (٠) فان م \geq م - م - ϵ > ق (ص) \geq م لكل δ > ص > م . اذن
 δ > س > δ تعطي م - ϵ > ق (س) \geq م اذن م \geq ق (س) . اختر $N \in \mathbb{N}$
 بحيث ان $\frac{1}{N} > \delta$. اذن م \geq ق ($\frac{1}{N}$) = $\frac{ق(1)}{N}$ عندما ن $\rightarrow \infty$ نحصل
 على م \geq م ، م \leq م وبما ان م \geq م فان م = م . اذن
 ϵ > ق (ص) \geq م لكل δ > ص > م . و ϵ > ق (ص) \geq م لكل ϵ > م > س
 δ . اذن

|ق (س)| > ϵ لكل $|س| > \delta$. اذن ق (س) \leftarrow (س \leftarrow ٠) .
 ٨- بما ان |ق (س)| > ϵ ق (س) \leftarrow ق (س) = |ق (س) - ق (س)| فان مجموع القيم المطلقة هو
 ق (أ) - ق (ب) ومنه م = ق (أ) - ق (ب) .
 ٩- جرب ق (س) = س^١ ، س^٢ = س^١ ، س^٣ = س^١ ، ... لعدد مناسب ن .

تمارين ٦-٣

- ١- البرهان هونفس برهان النظرية ١ في البند ١، الفصل ٦ .
- ٢- (أ) متصل الا عند س = ١ ، (ب) ، (ج) متصل على كل النقاط .
- ٣- افرض ان δ عدد حقيقي . اذن |ق (س)| > ϵ اذا كان |س - أ| > δ . اختر عددا نسبيا ح بحيث ان ح \in (أ - δ ، أ + δ) . اذن |ح - أ| > δ ، ق (ح) = ٠ . لهذا فان |ق (أ)| > ϵ . ولكن ϵ < عدد عشوائي . اذن ق (أ) = ٠ لكل ϵ .

- ٤- افرض ان ϵ < م ونحذ |س| > ϵ . اذن
 |ق (س) - ق (٠)| = |ق (س)| = م |أو| س |اعتادا على كون س \in Q أو في Q
 اذن |ق (س)| > ϵ ومنه ق متصل عند ٠ . خذ δ < م . اذا كان ق متصلا
 عند أ فانه يوجد δ < م بحيث ان |ق (س)| > δ اذا كان |س - أ| > δ .

٥. إذا كان $\exists Q$ اختر عددا غير نسبي $\exists (a, a + \delta)$. إذن $|s| > a$ وهذا يناقض $s < a$. إذا كان a عددا غير نسبي اختر عددا نسبيا $\exists (a, a + \delta)$. إذن $|a - a| > a$. أي أن $a > a$ تناقض.

نفس الأسلوب إذا كان $a > 0$.

٥- ق (٠) = ٠، $|q(s)| > \epsilon$ إذا كان $|s| > \delta$. استخدم ق (س) - ق (أ) = ق (س - أ) للاتصال، عندأ. ثم برهن أن ق (ب) = ب ق (١) لكل ب $\exists Q$ هـ (ع) = غ تصلح.

٦- ق (٠) = ٠، $e \neq 0$ تعطي ق (ع) = $|e| (1 + a + a^2 + \dots)$. حيث $0 < a < 1$ ، لهذا نحصل على متسلسلة هندسية تقاربية. نجد أن ق (ع) = $1 + |e| (1 + a + a^2 + \dots)$ إذن ق متصل على \mathbb{R} ما عدا عند الصفر.

٩- إذا كان ك (س) = س - ق (س) فإن ك (أ) ≥ 0 وك (ب) ≤ 0 إذن ك (ح) = ٠ لعنصر ماجد $\exists [a, b]$. الآن $0 \geq h$ (س) $\geq b$ لعنصر ما ب < 0 ولكل س < 0 إذن هـ : $[0, b] \leftarrow [0, a]$ ب طبق الجزء الأول من السؤال حيث $a = 0$ ، هـ بدلا من ق.

١٢- إذا كان ق محصورا ويأخذ قيما حاصرة فإنه يوجد لـ ق اصغر قيمة. أي أنه يوجد $\exists [a, b]$ بحيث أن ق (س) \leq ق (د) لكل س $\exists [a, b]$. ولكن

ق (س) < 0 إذن حـ = ق (د) < 0 ومنه ق (س) \leq حـ لكل س $\exists [a, b]$. الآن هـ (س) = س < 0 على $[0, 1]$ ، هـ متصل على $[0, 1]$ ولكن حـ $\exists [0, 1]$ يوجد س $\exists (0, 1]$ بحيث أن س $> حـ$.

١٦- (أ_١) متناقضة ومحدودة من اسفل بـ ٠، إذن أ_١ \leftarrow م، أ_{١+١} \leftarrow م وق (أ_١) \leftarrow ق (م).

١٧- افرض أن ق اقتران تقلص، إذن $|q(s) - q(v)| \leq |s - v|$ لكل س، ص $\exists [0, 1]$. خذ س = ١، حـ $> ص$ ١. إذن $|ص - ١| \geq |حـ - ١|$ - ص، $|ص - ١| \geq |ص - حـ|$ وهذا يناقض حـ $> ص$.

تمارين ٦ - ٤

$$١- |ق(س) - ق(ص)| = \frac{|س - ص|}{س} \geq |س - ص| لان س ، ص < ١. \text{ خذ } \epsilon = \epsilon.$$

٣- ق منتظم الاتصال على $[٠, ٣]$. لهذا فانه لكل $\epsilon < ٠$ يوجد $\delta = \delta(\epsilon) > ١$ بحيث ان

$$|ق(س) - ق(ص)| < \epsilon \text{ اذا كانت } |س - ص| < \delta \text{ وس، ص} \in [٠, ٣].$$

الآن خذ $|س - ص| > \delta$ (س، ص) $\in [٠, \epsilon]$ وس، ص ≤ ٠ اذا كان س ≤ ٢ فان

$$|ق(س) - ق(ص)| = \frac{|س - ص|}{س} \geq |س - ص| \geq \epsilon, \text{ واذا كان } ٠ > \epsilon$$

س $> \epsilon$ فان ص $> س + \delta > ٣$. لهذا فان س، ص $\in [٠, ٣]$ واذن $|ق(س) - ق(ص)| < \epsilon$ في جميع الحالات.

٥- ق دوري يعطى ق(س + ن د) = ق(س) لكل س $\in \mathbb{R}$ ، ن $\in \mathbb{N}$. الآن ق منتظم الاتصال على $[-د, د]$. اذن يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $|ق(س) - ق(ص)| < \epsilon$ اذا كان $|س - ص| < \delta$ وس، ص $\in [-د, د]$. خذ س، ص $\in \mathbb{R}$ و $|س - ص| > \delta$. اذن ن د $\geq س > (١ + ن) د$ لعدد ما ن $\in \mathbb{N}$. استخدم س - ن د و ص - ن د $\in [-د, د]$.

تمارين ٧ - ١

$$١- |ق(س)| = |س - ١| \text{ غير قابل للتفاضل عند } ١ \text{ ولكن هـ(١)، و(١) = ٠}$$

$$٢- \text{هـ(س) = ن} \{ق(س) + \frac{1}{ن} - ق(س)\}$$

$$٣- ق(٠) = ٠ لان |ق(س) - ق(٠)| = |ق(س)| \geq س^٢ لاي س، وكذلك س^٢ \geq$$

ϵ | س | اذا كان | س | $\geq \epsilon$. نحصل على النتيجة من النظرية ١ . على سبيل المثال أ

$$Q \in \mathbb{N}^+ . \text{ اذن } K (س ، أ) = س + أ \text{ اذا كان } س \in Q \text{ وك } (س ، أ) = \frac{أ-1}{أ-س} .$$

اذا كان س $\notin Q$. من الواضح انه لا يوجد نهاية لـ $K (س ، أ)$ عندما س $\leftarrow أ$.

$$٤ - ح = \frac{أ+ب}{٧} .$$

$$٨ - ١٩ + ١٤ + (س - ٢) + (س - ٢) - ٢(س - ٢) .$$

$$٩ - (ب) \text{ اذا كان } ق (س) = أ + أ_١ + \dots + أ_n \text{ س } \text{ بمفاضلة الطرفين}$$

ق (س) = س^{١-} فان $أ_١ + \dots + أ_n \text{ س } = ١$ لكل س < ٠ بمفاضلة الطرفين
نحصل على $أ_١ = ٠$. كرر هذا تجد $أ_٢ = \dots = أ_n = ٠$. اذن ق (س) = ٠ مما يناقض ق (س)
= س^{١-} .

١٤ - نعم . | ك (س ، أ) | $\geq | س - أ - ١ | \leftarrow (س \leftarrow أ)$ لاي $أ \in \mathbb{C}$ ، اذن ق (أ) =
لكل $أ \in \mathbb{C}$.

١٦ - ك متصل على [أ ، ب] ، ان عملية حسابية تبين ان ك (أ) = (أ - ب) (أ - ح) ، ك
(ب) = (ب - أ) (ب - ح) . اذن ك (ب) $> ٠ > ك (أ)$. ومن نظرية القيمة المتوسطة
للافتراضات المتصلة نرى انه يوجد $\exists (أ ، ب)$ بحيث ان ك (د) = ٠

تمارين ٧ - ٢

$$١ - (١) \text{ حر} = \{ -٢ ، -\frac{١}{٢} ، ١ \} . \text{ قمع} = \{ -\frac{١}{٢} ، ١ \} ، \text{ قمع} = \emptyset .$$

$$(٢) \text{ حر} = \text{قمع} = \{ ٢ ، -٢ \} ، \text{ قمع} = \{ ٢ ، ٥ \} .$$

$$(٣) \text{ حر} = \text{قمع} = \text{قمع} = \{ \frac{\pi}{4} \} .$$

٢ - افرض ان طولي الضلعين هما س ، ص ، م = ٢ (س + ص) ، ح (مساحة) = س ص ،

$$ح = م \left(\frac{1}{4} - ص \right) . \text{جد حر (ح)} .$$

$$٣ - ح = \frac{م}{ن + م}$$

٦ - طبق نظرية رول على $أ$ س^٤ + $ب$ س^٣ - $ج$ س^٢ - $(أ + ب + ج)$ س على $[١ ، ٠]$.

٨ - إذا كان $ق (س) = ٠$ يوجد صفر واحد س_١ فإن $ق (س) = ٠$ ، إذا كان $ق (س) = ٠$.

$أ$ س_١ يوجد صفران س_١ ، س_٣ فإن $ق (س) = ٠$ ، $ق (س) = ٠$ من نظرية رول . إذن $ق (س) = ٠$.

وله صفر س_١ . إذن $أ = ٠$. ونفس الطريقة إذا كان $ق (س) = ٠$. $أ = ٠$ ، $أ$ س_١ + $أ$ س_٣ + $أ$ س_٥ وله ثلاثة

اصفران س_١ ، س_٣ ، س_٥ فإننا نجد $ق (س) = ٠$ ، $أ$ س_١ + $أ$ س_٣ + $أ$ س_٥ له صفران ، إذن $أ = ٠$ ، كما

في السابق . إذن $ق (س) = ٠$ ، $أ = ٠$ ، $أ = ٠$. نستمر بالاستقراء . إذا كان $هـ (س) =$

$$\frac{أ(س)}{ب(س)} \text{ حيث } أ(س) ، ب(س) \text{ كثير الحدود وكان } هـ(س) = د(س) \text{ لـ كل } س$$

$$\exists R . \text{ نأخذ كثير الحدود } ك(س) = أ(س) - هـ(س) \text{ بـ } (٠) \text{ بـ } (س) . \text{ إذن } ك(ن) = ٠ \text{ لـ كل } ن$$

$$\exists N ، \text{ إذن } ك(س) = ٠ \text{ لـ كل } س \in R .$$

تمارين ٧-٣

$$١ - ق(٣) - ق(٢) = ٥ \text{ ق(ح)} ؛ ح = \frac{١}{٣٦} .$$

$$٢ - ح = \frac{أ + ب}{٣} .$$

٥ - طبق نظرية رول على $\{ ق(س) \}$ ق^٢ (١ - س) . نعم يوجد $\exists (١ ، ٠)$.

٧ - لـ كل $\epsilon > ٠$ ، يوجد $\delta = \delta(\epsilon) > ٠$ بحيث إن $| ق(س) - م | < \epsilon$ لـ كل $س < \delta$.

الآن إذا كان $س < \delta$ فإنه لعنصر ما $ح \in (أ ، س)$ نحصل على

ق(س) = ق(أ) + (س - أ) ق(ح) . نحصل على النتيجة بكتابة ق(س) = ق(أ) + (س - أ) ق(ح) .

$$م + م \text{ واستخدام } | ق(س) - م | < \epsilon$$

٩ - لاحظ ان هـ (س) < ٠ وهـ (ب) - هـ (أ) < ٠ استخدم النظرية ٨ .

١١ - استخدم نظرية رول على الاقتران، وق (س) = ق (س) .

$$١٣ - ٢ ، \frac{n(1+n)}{٢} .$$

١٤ - ارتفاع المستطيل = نصف القطر = م (٤ + π)^{١-}

$$١٨ - ح = \frac{ك-}{٣} .$$

١٩ - ق (س) = م^٣ + س .

تمارين ٧ - ٤

٢ - افرض ان $\frac{م١+م٢}{٣}$ طبق نظرية تايلور .

ق (س_١) = ق (و) + ... ، ق (م_٣) = ق (و) + ... ثم اجمع
٤ - انظر المثال ٢٥ .

٥ - لو (١ + س) = س - $\frac{م٢}{٢(ح+١)}$ حيث $٠ < ح < م$.

المتسلسلة تقاربية بمقارنتها مع المتسلسلة التقاربية $\sum \frac{١}{٣^٢}$. عند اخذ المجاميع الجزئية

استخدم لو أ ب = لو أ + لو ب ، ولو (١ + $\frac{١}{ن}$) < (ن < ∞) .

٦ - قيمة عظمى محلية عند ٠ ، انعطاف عند $\pm \frac{١}{٢\sqrt{ب}}$

٨- من نظرية القيمة الوسطى $Q^{(1-n)}(w) - Q^{(1-n)}(o) = Q^{(n)}(s)$ لعنصر ما س بين o و

و

تمارين ٧-٥

٤- $Q^{(n)}(s) = Q^{(n)}(s)$ تعطي $Q^{(n)}(s) = Q^{(n)}(s)$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وبما ان

$$s \leq \frac{Q^{(n)}(s)}{n} \leftarrow (n \leftarrow \infty) \text{ فاننا نحصل على}$$

$Q^{(n)}(s) = Q^{(n)}(s)$ (١) $(s + 1) + \frac{Q^{(n)}(s)}{n} + \dots$ هذا يعطي ان $Q^{(n)}(s) = 0$. لانه اذا كان

$Q^{(n)}(s) < 0$ فانه باخذ $s = \frac{Q^{(n)}(s)}{Q^{(n)}(s)} < 0$ نحصل على $Q^{(n)}(s) < 1 + s$

$< \frac{Q^{(n)}(s)}{Q^{(n)}(s)}$. اذن $Q^{(n)}(s) < 0$ لعنصر ما س وهذا يناقض $Q^{(n)}(s) > 0$ لكل س

$\exists R$. بها ان $Q^{(n)}(s) = 0$ فاننا نحصل على $Q^{(n)}(s) = 0$ لكل س $\exists R$.

٦- $Q^{(2)}(s) = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، $Q^{(1)}(s) = \text{جتاس}^2$ ، $Q^{(0)}(s) = \text{جاس}^2$ جتا^٢ س ،

.....

(٣) من التعريف، $Q^{(n)}(s) = 0$. $\frac{s + 1 - s}{s - s} = 0$. استخدم قاعدة لوبتال

مرتين .

تمارين ٧-٦

١- $Q^{(n)}(s) \geq 0$ $s \geq 1$ لكل س $\exists [1, \infty)$. الخطأ $\geq \frac{Q^{(n)}(s)}{n} + \frac{Q^{(n)}(s)}{n}$

أي ١٢٥ ، طول الفترة $L = \frac{\pi}{2} \times 180$ و $| \text{جاس} | \geq 1$ ، اذن الخطأ اقل

من أويساوي $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} \times 5 \times 10^{-10}$ على فرض ان $n > 10$.

تمارين ٨ - ٢

١ - المعادلة غير صحيحة لـ $s = ٠$

٢ - المتسلسلة الاسية ذات تقارب مطلق في $|ع| > ١$ لأن

$$|ان ع^n| \geq |ان| \geq |ن| \geq |ان| \text{ لـ } |ان| \leq ٢. \text{ الآن}$$

$$ع + ا_١ ع^٢ + \dots = ص + ا_١ ص^٢ + \dots \text{ تعطي}$$

$$(ع - ص) (ص + (١ + ا_١ ع + ع + ص) + \dots) = ٠$$

$$و |١ + ا_١ ع + (ع + ص) + \dots| < ١ - (٢ |ا_١| + |٣| + |ا_١| + \dots) = ٠$$

$$\text{لـ } |ع| > ١ \text{ اذن } ص = ع.$$

$$٤ - \text{استخدم } (١ + س)^٢ = (١ + س)^١ (١ + س)^١, \text{ نظرية ذات الحدين وان } (ن) =$$

$$= (ن - ١) ر.$$

$$٥ - ق (ع) = ع - \frac{ع^٢}{٢} + \frac{ع^٣}{٣} - \dots$$

٧ - لـ $\exists R$ و $|س| > ١$ خذ مشتقة ق (س) $(١ + س)^{-١}$. نجد ان المشتقة صفر لأن

$$(١ + س) ق (س) = أ ق (س). \text{ اذن ق (س) } (١ + س)^{-١} = \text{عددا ثابتا} = ق (٠) = ١.$$

تمارين ٨ - ٣

٢ - من النتيجة ١ (٢) للنظرية ٢ نحصل على ان ق (س) $\sum ا_n س^n$ تعرف اقترانا متصلًا

$$\text{ق على } |س| > \text{نق.}$$

إذا كانت $\sum ا_n س^n$ تقاربية فانه باستخدام نظرية النهاية لأبل نحصل على ق (س) \leftarrow ق

(نق) عند $س \leftarrow$ نق \leftarrow اذن ق متصل عند نق. وبطريقة مشابهة نحصل على ق

متصل عند - نق إذا كانت $\sum ا_n (-نق)^n$ تقاربية.

$$-1 \leftarrow \frac{1}{y} \leftarrow \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = 1 - x$$

(۲) $\exists n \in \mathbb{N}$ ، (۳) افرض ان $m < 0$ ونحذر $\exists N$ بحيث ان

$$J = j_1 + \dots + j_m + j_{m+1} = (s) \text{ الآن } m+1 \leq m + 1 = m + 1 + 0 = m + 1 + s_1 + \dots + s_m \text{ تقترب}$$

من ل عندما س ← ١- ، لهذا فان

هـ (س) < ل - ا إذا كان $\delta > \text{س} > 1$. إذن $\delta > \text{س} > 1$ تعطي ق (س)

$$\infty \leftarrow (س) < م. \text{ لهذا فان } ق(س) \leftarrow \infty (س \leftarrow -1).$$

٦- بشكل خاص $|a_1 + \dots + a_n| \geq m$ ، اذن $|a_n| \leq m$ لكل n ، ومنه

أرغ $a \geq m$ أ. لهذا فإن \exists أرغ ذات تقارب مطلق على a $|a| > 1$. إذا كان $e = 0$ فإن

ا(ع) = ا. ا. م. اذا كان $0 < |ع| < 1$. اكتب ص $\frac{ع}{|ع|}$. اذن |ص|

\therefore لهذا فان

$$|A| + |A_1| + \dots + |A_n| \geq n.$$

الآن كون حاصل الضرب الكوشي لـ $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$ هو \mathbb{Z}^n .

تمارين ٩ - ١

١- $ق(س + ص) = ق(س) ق(ص)$ تعطي $ق(١) = ق(١)^٢$. اذا كان $ق(١) = ٠$ فان

ق (س) = ق (س) ق (٠) = ٠ لكل س مما يناقض كون ق شاملاً.

اذن ق (۰) = ۱ . باستخدام تعريف ق (س) ونهاية کسرنیوتن نسبت ان ق (س) =

ق (س) قَ (*).

$$٢- ق (س) = سا (س٢) .$$

$$٤- (١) اذا كان س١ (١ع) هو المجموع الجزئي النوني في متسلسلة سا (١ع) فان س١ (١ع) = س١ (١ع) ، استخدم$$

$$س١ \leftarrow س١ نعطي س١ \leftarrow س١ (ن \leftarrow \infty) . (٣) استخدم |ل| = ٢ ل ل حيث ل =$$

$$سا (ت س) . اذا كان س = ت فان |ل| = سا (١-) = \frac{1}{8} > ١ .$$

$$٥- عند الزمن ن، اذا كان التيار في الدائرة أ فان أ (ن) = -ك (ن) . افرض ان ف هو$$

$$\text{فرق الجهد المكثف} . فان ف = \frac{ك}{س} ومن قانون أوم ف = أم اذن -م ك (ن) = \frac{ك (ن)}{س}$$

$$\text{من النظرية ٢، ك (ن) = ك (٠) سا (٠-). وعند ن = ٠، ف = ل اذن ك (٠) = ل ح.}$$

$$٧- اختر ن = ن٠ (٤) بحيث ان | \frac{١٠٠٠}{1+(١+٠)٠} + \dots | \in > \text{اخذن}$$

م واحدس

$$\sum_{r=1}^n \{ \frac{١}{r} - \frac{١}{r+1} \} = \frac{١}{١} - \frac{١}{n+1}$$

$$٨- (١) اذا كان س = ٠ فان ٠ = س + ١ س واذا كان س \neq ٠ فان$$

$$٠ = س + ١ س = \frac{١-٠}{١} < ١ + س لان ٠ < ٠ .$$

$$٩- (١) | ١ - \frac{١}{٢} | + | \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} | + \dots \geq | \frac{١}{١٢} | + \dots$$

$$\text{اذا كان س > ٠ فان } | ١ - س | = | س | = | س | > | س | > ٠ اسأ - ١$$

$$(٢) | ١ - س | \geq ١ - س اذا كان | س | \geq ١ و ١ - س > \frac{١}{٢} .$$

تمارين ٩-٢

$$٢- (١) \text{ جاع} = ع - \frac{ع^2}{١٣} + \dots, \text{ لهذا فان } ع \neq ٠ \text{ تعطي}$$

$$\frac{\text{جاع}}{ع} = ١ - \frac{ع}{١٣} + \dots \leftarrow ١ \text{ عندما } ع \leftarrow ٠.$$

٣- استخدم تعريف جتاس، جتاص، جتال كمتسلسلات.

$$٤- (١) \text{ جا } (أ \pm ب) = \text{جا} أ \text{ جتاص } ب \pm \text{جتا} ب \text{ جتال } أ. \text{ خذ } ١ = \frac{ع + ل}{٣}, \text{ ب} = \frac{ع - ل}{٣},$$

$$(٣) \text{ جتا} = \frac{\pi}{٣}, ٠ = \text{جا}^2 + \frac{\pi}{٣} \text{ جتا}^2, ١ = \frac{\pi}{٣} \text{ اذن جا} = \frac{\pi}{٣}.$$

$$\text{لهذا فان جا } (ع - \frac{\pi}{٣}) = \text{جا} - \frac{\pi}{٣} \text{ جتاص} - \text{جتا} = \frac{\pi}{٣} \text{ جاع} = \text{جتاع}.$$

$$١٠- \text{اذا كان } ع = ت \text{ من } و ص \text{ عدد حقيقي موجب، فان } | \text{جاع} | = \frac{٣ - ٣}{٣} \leftarrow \infty \text{ عندما } ص \leftarrow ٠. \text{ لهذا فان } | \text{جاع} | < ١ \text{ لعدد مركب ما ع.}$$

س (ن) = - من (ن) تعطي س (ن) = أ جتان + ب جان. بها ان الجسم بدأ عند م فان س (م) = ٠. السرعة الابتدائية س (٠) = ع. اذن س (ن) = ع جان. السرعة عند زمن ن هي س (ن) = ع. جتان وتكون اول ما تساوي لصفر عند ن = $\frac{\pi}{٣}$. المسافة المقطوعة عندها هي ع، اذن حركة الجسم تنذب حول الصفر بين النقطتين (ع، ٠) و (ع، ٠) ويقال ان حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة.

ان حركات كهذه (حيث يكون س (ن) = - ح من (ن)، حدثات) تظهر في حركة البندول البسيط.

١٣- بما أن هـ (س) = - جاس فانه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة نحصل على أن هـ اقتران تقلصي على الفترة [١ ، -١] . ولكن س١ ∉ [١ ، -١] لهذا فإن (س١ ، س٣ ، ...) تتقارب الى م ∉ [١ ، -١] . إذن م = جتام و ٠ > جتا١ ≥ م ≥ ١ .

تمارين ٩-٣

٢- (١) معرف لـ س ≠ $\frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2})$. المشتقة صفر.

(٢) معرف لكل س ∃ R المشتقة لـ جاز^٢ (س) + جتا^٢ ز (س) = جتا ز (٢ س)

(٦) معرف لـ س ≤ ٠ ، المشتقة لـ س < ٠ هي $\frac{1}{\sqrt{1-S^2}}$ (جاز (س)) جتا ز (س) .

٣- (١) جتا ز (س) = $1 + \frac{S^2}{12} + \frac{S^4}{144} + \dots$ ≤ ١ لكل س ∃ R و

(جتا ز (س))' = جاز (س) < ٠ لكل س < ٠

(٢) جتا ز (ع) = جتا (ت ع) وإذن جتا ز ((١ + √٢) $\frac{\pi}{4}$) = جتا ((١ + √٢) $\frac{\pi}{4}$)

$\frac{\pi}{4}$ = ٠ ، وبالعكس جتا ز (ع) = ٠ تعطي أن ٠ = جتا (ت ع) = جتا (- ت ع) . وإذن

$$-ت ع = \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \text{ ومنه } ع = \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) - ت$$

٧- إذا كان ب = ٠ فإن القيمة العظمى هي |أ| والقيمة الصغرى هي -|أ| . إذا كان ب ≠ ٠

٠ فإن ق (س) = أ جتا س - ب جاس = ٠ عندما تحقق س نظام $\frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$. لهذه الدس

ق (س) = $\frac{B^2 + A^2}{2\sqrt{1-B^2}}$ جتا س = $\sqrt{A^2 + B^2}$ أو $-\sqrt{A^2 + B^2}$. كذلك ق (س) = -

ق (س) . لهذا فإن القيمة العظمى هي $\sqrt{A^2 + B^2}$ والقيمة الصغرى هي $-\sqrt{A^2 + B^2}$.

تمارين ٩ - ٤

١- (٢) بما ان الاقتران معرف بواسطة لو فان الاقتران معرف اذا فقط اذا كان $s < 0$.
المشتقة هي ١ .

(٥) معرف لـ $s < 0$ ، المشتقة (١ + لوس) سا(س لوس) .

(٧) معرف لـ $s \neq 0$ ، بفصل الحالات $s < 0$ و $s > 0$ نجد ان

$$دلو |س| = \frac{1}{س} \text{ لكل } س \neq 0 .$$

$$٣- (١) لو (١ + س) = س - \frac{1}{٢} + \dots ، لو (١ - س) = -س - \frac{1}{٢} + \dots \text{ لـ } |س|$$

> ١ . ولو $\frac{1}{س} = لو$ - لو اذ كان $أ$ ، $ب < 0$. غير صحيح عند ١ أو -١ .

(٢) اختر $س = \frac{1}{٢}$. أول ثلاثة حدود من متسلسلة لـ ٢ تعطي $٠, ٦٩٣, ٠$

٤- اذا كان يوجد $\exists N$ بحيث ان لون ٢ فان $٢ = ٠$ ولكن

$٧, ٢, ٠ > ٨, ٢$. اذن $٧ > ٠ > ٨$. لهذا فانه لا يوجد ن .

٦- اذا كان $٥ = جتا^{-١}س$ فان جتا (ن + ١) $٠ + جتا (ن - ١) = ٠$ $٢ = جتا ٥$ جتا ٥

وبالاستقراء نجد ان

$$لن (س) = ٢^{-١}س - \dots - لن \leq ١ .$$

٧- اذا كان $ع = أ + ت ب$ ، $م = ح + ت د في$ $س$ فان

$$|ب - د| > ٠ \pi ٢ = ٤ \theta = ٢ \theta \text{ تعطي } م - ع = \pi ٢ \text{ ن ت حيث } ن \text{ عدد صحيح} .$$

اذن $د - ب = \pi ٢$ ن . اذن $|ن| > ١$ ، لهذا فان $ن = ٠$ ومنه $ع = م$.

تمارين ١٠ - ١

١- (١) ك (س) = $1 - 2^s$ | س | اقتراح بدائي (خذ $s < 0$ و $s > 0$ ، ولكن لاحظ أنه يجب الرجوع للتعريف كنهاية كسر نيوتن لحساب $K(0)$). تكامل نيوتن المحدد هو $K(1) = 1$.

(2) $1 - e$ ، (3) صفر ، (4) لو (لو)، (5) لو (س + 1) - لو (س + 2)
 اقتران بدائي . الاقتران المحد هو $(\frac{4}{3})$.

٢-٢-١ ق^٢ ولوه بدائيان
٤- يوجد ك بحيث ان ك = ق على [أ، ب]، لهذا فان تحديد ك على [أ، ح] اقتران بدائي لتحديد ق على [أ، ح]. لاحظ ان
ك (ب) - ك (أ) = ك (ح) - ك (أ) + ك (ب) - ك (ح).

هـ - اذا كان ي = ق هـ فان (ق هـ - ي) = هـ ق لهذا فان هـ ق = (نيو [أ ، ب] . كذلك

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هـ ق} = \text{ق هـ} - \text{ی ی} \\ \text{هـ ق} = \text{ق هـ} - \text{ی ی} \end{array} \right.$$

٦ - استخدم نظرية داربو

۸۔ افرض ان q متزايد واكتب $y = q(b) - q(a)$. اخراج بحيث ان
 $(s_{-r}, s_{-r+1}) > (s_{-r+1}, s_{-r})$ و $(1 + s_{-r}) \geq 1 \geq s_{-r} \geq 0$. اذن

$$\{ (q(s), -q(s)) \} \sum \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \geq \epsilon (c - c^*)$$

٩- بدراسة قيم q على الفترة $(\frac{1}{1+n}, \frac{1}{n}]$ نرى ان q متزايد على $[1, \infty)$.

١٠ - لتكن التكاملات هي تكاملات نيوتن محددة على [أ ، ب] . ق^٢ (س) < ٠ على (أ ،

ب) تعطي ف = [ق^٢ < ٠] لاحظ ان

$$ح^٢ [ق^٢ + ٢ - ح] ق^٢ + ١ - ح^٢ \leq ٠$$

لاي ح- R . اذا اخذنا ح- = $\frac{[- ق^٢]}{ف}$ فاننا نحصل على متباينة شوارتس .

$$\text{للاستنتاج خذ ق (س) } \sqrt{\text{جتاس}} \text{ ، ح- (س) } = ١ ، ٠ = أ ، ب = \frac{\pi}{٢} .$$

تمارين ١٠ - ٢

١ - افرض ان امكن انه يوجد $\exists [أ ، ب]$ بحيث ان ق (ح-) < ٠ . افرض ان $أ > ح >$

ب (الحالات ح- = أ ، ح- = ب) مشابهة . من اتصال ق فانه يوجد $\delta < ٠$ بحيث ان

$$|ق (س) - ق (ح-)| > \frac{ق (ح-)}{٢} \text{ لـ } |أ - ح-| - \delta \geq س \geq ح- + \delta > ب . \text{ لهذا فان}$$

$$ق (س) < \frac{ق (ح-)}{٢} \text{ لـ } ح- - \delta \leq س \leq ح- + \delta . \text{ بما ان ق (س) } \leq ٠ \text{ على } [أ ،$$

ب] فاذ:

$$٠ = \left\{ ق (س) دس \leq \int_{\delta}^{ح-} ق (س) دس \leq \int_{\delta}^{أ} \frac{ق (ح-)}{٢} دس \right.$$

$$= ق (ح-). \delta < ٠$$

هذا تناقض .

٢ - بما ان ق ، ح- محصوران فانه يوجد ثابت م بحيث ان

$$|ق (س)| \geq م ، |ح- (س)| \geq م \text{ لكل س } \exists [أ ، ب] . \text{ اثبت ان}$$

$$|ق (س) - ح- (س)| - ق (ص) - ح- (ص) \geq م |ق (س) - ق (ص)| + |ح- (س) - ح-$$

$$(ص)|$$

واستتبع انه اذا كان $y = \text{صح ع ق} - \text{ك ح د ق فان}$

ي (ق هـ) \geq م { ي (ق) + هـ (ق) } . طبق الآن النظرية ٥ .

۳- لہذا $s \geq 1$ نحصل على $\sqrt{s+1} \geq \sqrt{2}$ واذا

$$\frac{m}{\sqrt{\frac{m}{n} + \frac{1}{n}}} \geq m^{\frac{2}{3}} \cdot \text{كامل الآن}$$

۴- ق (نس) = ۱ (س غیر سبی) ق (س) = ۱- (س نسبی).

۷- $a_n = 0$ ، b_n زوجي، $a_n = \frac{1}{n}$ ، b_n فردی. اذن $a_n \leftarrow 0$ ، $(n \leftarrow \infty)$. لكل b_n

نقسم مدى التكامل بالنقاط $\frac{\pi}{n}$ ، $\frac{2\pi}{n}$ ، ... ونجد ان مساهمة كل $[\frac{\pi}{n}]$ ،

هو $\frac{\pi(1+j)}{j}$. اذن $b_n = 2$ لكل n ومنه $b_n \leftarrow (n \leftarrow \infty)$.

۸۔ باستخدام الارشاد، ق (و) $\{ \geq \}$ ف ه \geq ق (ی) $\{ \geq \}$ ه. الآن ل (س) = ق

(س) { ه متصل على [أ ، ب] ، طبق نظرية القيمة المتوسطة إلى .

تمارين ١٠-٣

١- افرض ان $a = 0$ ، $b = 1$ في المثال ٧، ولاحظ ان $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ (ب $\leftarrow \infty$).

٢- افرض ان $q(s) = \text{ظا}^1 s$ ، $h(s) = s$ في نظرية ١٤ اذن

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{1}{p}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{2p}{p + 1}$$

كذلك باستخدام طريقة التكامل بالاجزاء مرتين نحصل على

{ جاس جتاز (س) د س = $\frac{1}{4}$ - (جاس جاز (س) - جتاس جتاز (س)). }

٣- التكامل بالاجزاء ن مرة واستخدم ب^١ ٥ ← ٥ ← ٥ (ب ← ∞) لـ ٠ = ١ ، ٠ ، ١ ، ...
ن. نجد ان ل = ن ا.

٤- طبق النظرية ١٥ لـ هـ (س) = جتا (ن س).

٨- طبق النظرية ١٧ : (١) [١ من^١ دس = (١ + ١) ^١ - ١ ،

(٢) لو $\frac{3}{2}$ ، (٣) $\frac{\pi}{4}$.

٩- نهان^١ ∞ س_٥ (٥) = [جتا (٥ س) دس والتي تساوي ١ اذا كانت ٥ = ٠ و

$\frac{\theta}{\eta}$ اذا كان ٥ ≠ ٠ . اذن نهان^١ س_٥ (٥) = ١ .

ولكن نهان^١ س_٥ (٥) = ١ لكل ن، لان جتا $\frac{\theta}{\eta}$ ← ١ (٥ ← ٠) .

تمارين ١٠ - ٤

١- بما ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م (س \leftarrow \infty)$ فانه يوجد و س. بحيث ان

$|ق(س)| > |هـ(س)|$ لكل س < م. . الان طبق النظرية ١٨ لتثبت ان $|ق| \ni ر$
[١ ، ∞) . من النظرية ١٩ يتبع ان $ق \ni ر [١ ، \infty)$. باخذ ق(س) = ٥ س^١ س^١ حساس و

هـ(س) = س^٢ نجد ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow ٠ (س \leftarrow \infty)$.

٢- لـ ب نأخذ التكامل من حـ الى و، افرض س = ص^٢ وكامل بالاجزاء .

٣- افرض ان س = ص^٢ وكامل بالاجزاء ثلاث مرات .

٤- التكامل ل يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ لو (جتا ص) د ص. اذن

$$2 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \text{ لو (جا من } \frac{\pi}{2} \text{ د ص. ومنه } -\pi - 2 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}.$$

٦- لا تحديد على ب لكن $0 < .$

$$8 - (2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

تمارين ١٠-٥

١- $|s| > 1$ مشتقة

ق (س) = جا^{-١}س - (س + ...) هي (١ - س^٢)^{-1/٢} - (١ + ...) ويساوي صفرا من نظرية ذات الحدين. إذن ق (س) = ق (٠) = ٠ $|s| > 1$. طبق نظرية آبل للنهايات للحصول على المتسلسلة عند س = ± 1 .

٣- (١) بما ان ح_١ - ح_٢ ≤ ق (ر + ١) - ق (ر) $1 \leq r$ فانه بالامكان وضع ر = ن ، ن + ١ ، ... ، م - ١ ونجمع المتباينات لنحصل على ح_١ - ح_ن ≤ ق (م) - ق (ن). عندما $m \rightarrow \infty$ نحصل على م - ح_ن ≤ - ق (ن).

٦- (١) م (ص) = أ (١ - جتا ص) + أ جا ص، لهذا فان الطول يساوي

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi.$$

تمارين ١١

١ - من متباينة منكوسكي، نجد ان

$$\|m\|_1 + \|m\|_2 \geq \|m\|_2 \quad \forall m \in \mathbb{R}^2$$

اذن $\|m\|_1 \geq \|m\|_2$ ،

كذلك $\|l\|_1 \geq \|l\|_2$ ،

اذن $\|m\|_1 - \|l\|_1 \geq \|m\|_2 - \|l\|_2$. لهذا فان $|q(m) - q(l)| \in \mathbb{R}$ اذا كان $\|m\|_1 - \|l\|_1 > 0$ ،

اذن q متصل عند l . لكن q غير قابل للتفاضل عند 0 لانه من

السهل اثبات ان q في 0 غير موجودتين عند 0 .

٢ - $q = q$ عند 0

و $|q(m)| \geq |s| + |t| \geq \|m\|_2 \geq \|m\|_1 \geq \epsilon$ على شرط ان يكون $\|m\|_1 \geq \epsilon$.

٤ - اكتب $q(m) - q(l) = q(m) - q(s, b) + q(s, b) - q(l)$ ،

طبق نظرية القيمة الوسطى لـ q في $(m) - q(s, b)$ ثم استخدم اتصال q عند l .

٥ - q ، k توافقيان على \mathbb{R}^2 ولكن q غير توافقي .

قاموس المصطلحات الواردة في هذا الكتاب ورموزها

Abelian Group	زمرة تبادلية (أبيلية)
Absolutely Convergent	تقاربي مطلق
Absolute Convergence	تقارب مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة
Acceleration	تسارع
Accumulation point	نقطة تراكم
Additive	جمعية
Algebraic	جبرية
Alternating series	متسلسلة متناوبة

Archimedes, Axiom of	مسلمة أرخميدس
Argument of a complex number	سعة العدد المركب
Associative operation	عملية تجميعية
Asymptotic error constant	ثابت الخطأ التقاربي
Axiom	مسلمة
Bijective function	اقتزان تقابل
Binary	ثنائي
Binomial	ثنائي الحدود
Bounded	محصور
Bounded Variation	تغير محصور
Convergent	تقاربي
Complex numbers	اعداد مركبة
Cardinal number	عدد رئيسي
Cartesian Product	الضرب الديكارتي
Chain Rule	قاعدة السلسلة
Characteristic function	اقتزان مميز
Closed	مغلق
Closure of a set	انغلاق المجموعة
Codomain	المجال المقابل
Commutative	تبديلي
Compact	متراصة
Comparison test	اختبار المقارنة
Complement of a set	تممة المجموعة
Composition of functions	تركيب الاقتزانات
Conditional Convergence	تقارب مشروط

Completeness of \mathbb{R}	خاصية التمام في \mathbb{R} (حقل الأعداد الحقيقية)
Congruence	نظائري
Conjugate	مرافق
Conjunction	الوصل
Connected	موصول
Continuous function	اقتران متصل
Contraction mapping	اقتران تقلص
Contradiction	تناقض
Contrapositive	المعكوس الانعكاسي
Convex	محدب
Cosine	جتا (جيب التمام)
Countable	قابل للعد
Critical Points	نقاط حرجية
Curve	منحنى
Decimal	عشري
Definite integral	تكامل محدد
Dense set	مجموعة كثيفة
Derivative	مشتقة
Determinants	محددات
Differentiable	قابل للتفاضل
Direct proof	برهان مباشر
Disjoint	منفصل - متباين
Disjunction	الفصل
Distributive Laws	قوانين التوزيع
Divergent	تباعد

Domain	مجال
Eccentricity	اختلاف مركزي
Element	عنصر
Empty set	المجموعة الجالية
Equivalence	تكافؤ
Existential Quantifier	السور الوجودي
Exponential	أسّي
Extremum	قمة
Factor group	زمرة كسرية
Factorial	مضروب ، مضروب
Field	حقل
Finer partition	تجزئة بحسنة
Finite	نهائي ، منته
Fixed point	نقطة ثابتة
Function	القران
Fundamental theorem	النظرية الأساسية
Gradient	ميل
Global extremum	قمة مطلقة
Greatest lower bound	أكبر حاصر أدنى
Group	زمرة
Harmonic	توافقي
Homeomorphis	القران توبولوجي
Hyperbolic functions	الاقترانات الزائدية
Ideal	مثالية
Identity (in a group)	عنصر محايد (في زمرة)

Image	صورة
Imaginary	تخيلي
Implication	التضمين
Improper Integral	تكامل معتل
Increasing function	اقتران متزايد
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Indeterminate	صفة غير معينة
Index	دليل
Induction	استقراء
Inequality	متباينة
Infimum	اكبر حاصر ادنى
Infinite	غير منته ، لا نهائي
Injective function	اقتران ثنائي (واحد لواحد)
Integer	عدد صحيح
Interior (of a set)	داخل (المجموعة)
Intermediate Value theorem	نظرية القيم الوسطى
Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Inverse	عكس ، معكوس
Irrational	غير نسبي
Isomorphism	تشاكل
Kerosi	نواة
Least upper bound	اصغر حاصل اعلى
Limit	نهاية
Linear	خطي

Local	محلي
Logarithm	لوغارتم
Logically equivalent	منطائياً متكافئاً
Mapping	اقتزان ، دالة
Mean Value Theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Metric Space	فضاء قياسي
Modulus of Complex number	مقياس العدد المركب
Monotonic	وتري
Natural numbers	الاعداد الطبيعية
Necessary and Sufficient	كاف وضروري
Negation	نفي
Nesting principle	خاصية التشابك
Nilpotent	صفرى
Norm	مقياس
Normed Linear Space	فضاء خطي مقياسي
Null sequence	متتالية صفرية
One to one correspondence	تناظر واحد لواحد
Onto	شامل
Open	مفتوح
Open cover	غطاء مفتوح
Ordered pair	زوج مرتب
Partial	جزئي
Periodic	دوري
Permutations	تباديل
Point of inflexion	نقطة انعطاف (انقلاب)

Prime numbers	اعداد أولية
Primitive	بدائي
Proper subset	مجموعة جزئية فعلا
Quantifier	سور
Radius of Convergence	نصف قطر التقارب
Ratio Test	اختبار النسبة
Rectifiable Curve	منحنى قابل للتعديل
Recurrence Relation	علاقة دورية
Reflexive	انعكاسي
Relation	علاقة
Restriction of a function	تقييد الاقتران
Ring	حلقة
Sequence	متتالية
Series	متسلسلة
Set	مجموعة
Sine	جيب ، جا
Strict Increase	تزايد فعلي
Sub additive	تحت جمعية
Subgroup	زمرة جزئية
Subring	حلقة جزئية
Subsequence	متتالية جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Supremum	اصغر حاصل اعلى
Surjective	شامل
Symmetric	متماثل

Tangent	ماس
Tautology	تحصيل حاصل
Topological	تولوجي
Totally ordered field	حقل تام الترتيب
Transitive	متعد
Trapezium rule	قاعدة شبه المنحرف
Trichotomy	التثليث
Trigonometric	مثلثي
Trivial	بديهي
Truth table	جدول الصواب
Ultimately constant	ثابت في النهاية
Uniform	منتظم
Universal Quantifier	سوركي
Upper	علوي
Well - ordering principle	قاعدة الترتيب الحسن

Bibliotheca Alexandrina



0213186